بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه **جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد**
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان :

برخی خواص از g - قاب ها در هیلبرت C* - مدول

استاد راهنما:
دکتر عبدالمجید فتاحی

نگارش:

اعظم یزدانبخشی

مهر ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و
نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه
متعلق به دانشگاه رازی است.

دانشگاه رازی

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه **جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد**
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

نام دانشجو:

اعظم یزدانبخشی

عنوان :

برخی خواص از g - قاب ها در هیلبرت *C - مدول

در تاریخ   توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه   به تصویب نهایی رسید.

استاد راهنمای پایان‌نامه   دکتر عبدالمجید فتاحی   با مرتبه‌ی علمی استاد یار   امضاء:

استاد داور داخل گروه   دکتر سیده مرضیه قویدل   با مرتبه‌ی علمی استاد یار   امضاء:

استاد داور خارج گروه   دکتر محمد ابوالقاسمی   با مرتبه‌ی علمی استاد یار   امضاء:

خدایا...

به من تقوای ستیز بیاموز تا در انبوه مسؤلیت نلغزم و از تقوای پرهیز مصونم‌دار تا در خلوت عزلت نپوسم.

اندیشه و احساس مرا در سطحی پایین میاور که زرنگی‌های حقیر و پستی‌های نکبت‌بار و پلید شبه‌آدم‌های اندک را متوجه شوم، چون دوست دارم بزرگواری گول‌خور باشم تا کوچکواری گول‌زن.

کمکم کن دیرتر برنجم، زودتربببخشم، کمتر قضاوت کنم و بیشتر فرصت دهم.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

خدایا هرگز نگویمت بیا دست مرا بگیر

عمریست گرفته‌ای مبادا رها کنی

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر عبدالمجید فتاحی ، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگار مهر و مهربانی، مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدسش را و تشکر می‌کنم از خواهر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بود.

اعظم یزدانبخشی

مهر ۱۳۹۱

تقدیم به

مادرم

چکیده

در این پایان‌نامه، برخی نتایج جدید برای g-قاب‌ها در هیلبرت C^*-مدول‌ها را ارائه می‌دهیم . آنگاه یک عملگر A-خطی کراندار L معرفی می‌کنیم. با استفاده از این عملگر، خواصی از g-قاب‌ها و g-پایه ریس در هیلبرت C^*-مدول را مشخص می‌کنیم.در پایان، برخی تساوی‌ها و نامساوی‌های مهم برای قاب‌ها و g-قاب‌ها را در هیلبرت C^*-مدول ثابت می‌کنیم .
کلمات کلیدی

g-قاب، هیلبرت C^*-مدول، هیلبرت A-مدول

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

پیشگفتار

قاب‌ها برای فضاهای هیلبرت رسما به وسیله دافن [۱] و شیفر [۲] [۱۲] در سال ۱۹۵۲ برای مطالعه برخی مسایل در سریهای فوریه غیرهارمونیک تعریف شده‌اند.
در سال ۱۹۸۶ به وسیله دوبیچز [۳]، گراسمن [۴] و می‌یر [۵] [۱۰]دوباره نشان داده شده و توسعه داده شده‌اند و از آن به بعد مشهور شده‌اند.
نظریه قاب‌ها نقش مهمی در نظریات و کاربردها بازی می‌کند که به‌طور گسترده در پردازش سیگنال [۱۵]،نظریه نمونه‌گیری[۵]، مدل‌سازی سیستم[۱۱]، اندازه‌گیری کوانتوم [۱۳]،پردازش تصویر [۷]، رمزگذاری و ارتباطات [۳۲، ۲۱] به‌کار برده شده است.
سان [۶][۳۱] مفهومی از g-قاب [۷]را در فضای هیلبرت نشان داده است. او با همه قاب‌ها به‌عنوان g-قاب برخورد کرد و برخی نتایج مهم را به‌دست آورد.
در [۳۷، ۳۶] برخی خواص g-قاب‌ها شبیه به قاب‌های موجود از آنها شناخته شده است. اما برخی خواص نیز شبیه نیستند.
در ادامه مفهومی از قاب‌های خاص (g-قاب ها) در هیلبرت C^*-مدول‌ها نشان داده شده‌اند و برخی خواص از قاب‌ها و g-قاب‌ها در [۲۴، ۲۳، ۱۶] به‌دست آورده شده‌اند.
تفاوت‌های بسیاری بین هیلبرت C^*-مدول‌ها و فضاهای هیلبرت وجود دارند. برای مثال، می‌دانیم که هر زیرفضای بسته در یک فضای هیلبرت یک متمم متعامد دارد، اما این برای هیلبرت C^*-مدول درست نیست و ما نمی‌توانیم مشابهی از قضیه نمایش ریس از تابعک‌های پیوسته در هیلبرت C^*-مدول‌ها را به‌دست آوریم. بنابراین خیلی مشکل است که یک بحث از نظریه هیلبرت C^*-مدول را در کل فضای هیلبرت گسترش دهیم.
هدف از این پایان‌نامه، توسعه بیشتر و کامل‌تر نظریه قاب و g-قاب در هیلبرت C^*-مدول است. در این پایان‌نامه دو مطلب را بررسی می‌کنیم. اول : خواصی از g-قاب‌ها را در هیلبرت C^*-مدول مشخص خواهیم کرد. دوم : برخی تساوی‌ها و نامساوی‌های مهم از قاب‌ها و g-قاب‌ها در هیلبرت

[۱] Duffin

[۲] Schaeffer

[۳] Daubechies

[۴] Grossmann

[۵] Meyer

[۶] Sun

[۷] generalized frame

C^*- مدول‌ها را نشان خواهیم داد.

فصل اول، برخی مفاهیم و تعاریف اولیه مورد نیاز در فصل‌های بعدی است. فصل دوم آن، مفاهیم اولیه قاب‌ها را نشان می‌دهد. در فصل سوم، g- قاب‌ها مورد بررسی قرار گرفته است و در فصل چهارم، دوگان g- قاب ها و برخی تساوی‌ها و نامساوی‌ها روی قاب‌ها و g- قاب‌ها در هیلبرت C^*- مدول نشان داده شده است.

مطالب این پایان‌نامه از [۳۸] گرفته شده است.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$\delta_{\alpha,\beta}$	دلتای کرونکر
$Span(A)$	مجموعه ترکیبات خطی متناهی از اعضای A
A^c	متمم A
$\mathcal{H}$	فضای هیلبرت
$d(x,y)$	فاصله x از y
$U^{\perp}$	متمم متعامدU
$\mathcal{N}(U)$	فضای پوچU
$\mathcal{R}(U)$	فضای برد U
$L(X,Y)$	فضای عملگرهای خطی کراندار از X به Y
$L(X,\mathbb{C})$	فضای تابعک‌های خطی کراندار از X به $\mathbb{C}$
$L^p(\mu)$	فضای L^p روی اندازه شمارشی μ
$\\|f\\|_p$	نرم L^p برای f
$dim\mathcal{H}$	بعد$\mathcal{H}$
$U^{\dagger}$	شبه معکوس U
$End_A^*(U,V_j)$	گردایه ای از همه نگاشت های A - خطی الحاق‌پذیر
$\bigoplus V_j$	مجموع مستقیم V_j
$\tilde{\Lambda_j}$	دوگان Λ_j

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این فصل به‌ذکر تعاریف و قضایایی از آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی می‌پردازیم و نمادها و قضایای مورد نیاز فصول بعدی را معرفی می‌کنیم.

۱-۱ فضاهای نرم‌دار

تعریف ۱-۱-۱.
فضای برداری مختلط X را یک **فضای خطی نرم‌دار**[۱] می‌نامیم، اگر به هر x، یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که
(الف) به ازای هر x و y در X، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$،
(ب) اگر $x \in X$ و α عددی مختلط باشد، آنگاه $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،
(پ) $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.
بنابر (الف) نامساوی زیر برقرار است:

$$\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| \qquad (x, y, z \in X).$$

خواص فوق نشان می‌دهد که اگر فاصله x و y را برابر $\|x-y\|$ تعریف کنیم، هر فضای خطی نرم‌دار، یک **فضای متری** [۲] است.

تعریف ۱-۱-۲.
فضای تمام توابع خطی و پیوسته از X به $\mathbb{R}$ را **فضای دوگان** [۳]می‌نامیم و با X^* نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۳.
فرض می‌کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد و $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای در X باشد.
(الف) گوییم $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ به $x \in \mathbb{X}$ همگراست، هرگاه $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$.یعنی به‌ازای هر $\epsilon > 0$ یک $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $n \geq N_\epsilon$، $\|x_n - x\| < \epsilon$،

---
[۱] linear normed space
[۲] metric space
[۳] dual space

(ب) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در X **کوشی** [۱] است، هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ یک $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $m, n \geq N_\epsilon$ داشته باشیم :

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

قضیه ۱-۱-۴.

در فضای نرم‌دار X، هر دنباله همگرا، کوشی است.

برهان. رجوع کنید به قضیه ۲.۲.۵ از [۱۴].

□

۱-۲ فضاهای اندازه

تعریف ۱-۲-۱.

$\mathcal{A}$ را یک **جبر**[۲] روی X می‌نامیم، درصورتی‌که نسبت به اجتماع متناهی و متمم‌گیری بسته باشد. یعنی

(الف) برای هر $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$ داریم: $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \in \mathcal{A}$،

(ب) برای هر $A \in \mathcal{A}$ داریم: $A^c \in \mathcal{A}$.

تعریف ۱-۲-۲.

جبر $\mathcal{A}$ را یک σ**-جبر** [۳] می‌نامیم، درصورتی‌که اجتماع هر خانواده شمارا از اعضای $\mathcal{A}$، عضو $\mathcal{A}$ باشد. یعنی برای هر $\{A_i\}_{i\in J} \subset \mathcal{A}$ داریم: $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

تعریف ۱-۲-۳.

فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای ناتهی باشد و $\mathcal{A}$ یک σ- جبر روی X باشد. تابع $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ را یک **اندازه** [۴] روی $\mathcal{A}$ می‌نامیم، درصورتی‌که در خواص زیر صدق کند:

(الف) $\mu(\varnothing) = 0$،

(ب) برای هر دنباله مجزا از اعضای $\mathcal{A}$ مانند $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ داریم: $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

---

[۱] Cauchy

[۲] algebra

[۳] σ- algebra

[۴] measure

تعریف ۱-۲-۴.
فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ یک σ- جبر باشد. آنگاه (X,μ) را یک **فضای اندازه‌پذیر**[۱] می‌نامیم. اعضای $\mathcal{A}$ را مجموعه‌های **اندازه‌پذیر**[۲] می‌نامیم.

قضیه ۱-۲-۵.
اگر $\mathcal{F}$ گردایه ای از زیرمجموعه های X باشد، کوچکترین σ- جبر در X مانند $\mathcal{M}^*$ موجود است، به‌طوری‌که $\mathcal{F}\subset\mathcal{M}^*$ باشد.(گاهی این $\mathcal{M}^*$ را σ- جبر تولید شده به‌وسیله $\mathcal{F}$ نامند.)

برهان. رجوع کنید به قضیه ۱۰.۱ از [۳۴].

□

تعریف ۱-۲-۶.
جبر $\mathcal{A}$ را یک **$*$- جبر یا جبر برگشتی** [۳] می‌نامیم، هرگاه عمل برگشتی $* : a\longrightarrow a^*$ روی $\mathcal{A}$ برقرار باشد، به‌طوری‌که برای هر $a,b\in\mathcal{A}$ و هر $\lambda\in\mathbb{C}$ خواص زیر برقرار باشند:

۱. $(a+b)^*=a^*+b^*$،

۲. $(ab)^*=b^*a^*$،

۳. $(\lambda a)^*=\overline{\lambda}a^*$،

۴. $(a^*)^*=a$.

تعریف ۱-۲-۷.
جبر $\mathcal{A}$ را یک **C^*- جبر**[۴] می‌نامیم، اگر برای هر $a\in\mathcal{A}$، $\|aa^*\|=\|a\|^2$که در آن $\| a \|=< a,a >^{\frac{1}{2}}$.

تعریف ۱-۲-۸.
فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ یک C^*- جبر باشد. $a\in\mathcal{A}$ را **مثبت** [۵] گوییم، اگر $a\geq 0$ باشد، همچنین $a=a^*$ و $\sigma(a)\in\mathbb{R}^+$ که $\sigma(a)$ طیف a است.

---

[۱] measurable space

[۲] measurable

[۳] *- algebra

[۴] C*-algebra

[۵] positive

تعریف ۱-۲-۹.

فرض می‌کنیم A یک حلقه باشد و M یک مجموعه ناتهی، به‌طوری‌که $(M,+)$ یک گروه آبلی باشد. M را یک A**-مدول** [1] می‌نامیم، هرگاه عمل **ضرب**[2] روی $A\times M$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد، به‌طوری‌که برای هر $a\in A$ و $m\in M$ داشته باشیم : $A\times M\longrightarrow M$ که $(a,m)\longrightarrow am$ آنگاه برای هر $a,a_1,a_2\in A$ و هر $m,m_1,m_2\in M$خواص زیر برقرار است:

۱. $(a_1+a_2)m=a_1m+a_2m$،

۲. $a(m_1+m_2)=am_1+am_2$،

۳. $a_1(a_2m)=(a_1a_2)m$.

۱-۳ فضاهای باناخ و هیلبرت

تعریف ۱-۳-۱.

اگر فضای خطی نرم‌دار X کامل باشد،یعنی هر دنباله کوشی با متر تعریف شده توسط نرم در X همگرا باشد، آنگاه X را یک **فضای باناخ** [3] می‌نامیم.

مثال ۱-۳-۲.

$\mathbb{C}$ (مجموعه اعداد مختلط) همراه با نرم قدر مطلق، فضای باناخ است.

تعریف ۱-۳-۳.

دو نرم $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ در فضای نرم‌دار X را **هم‌ارز** [4](معادل) می‌نامیم، هرگاه اعداد ثابت و مثبت A و B موجود باشند، به‌طوری‌که به‌ازای هر $x\in X$،

$$A\|x\|_1\leq\|x\|_2\leq B\|x\|_1\ .$$

قضیه ۱-۳-۴.

فرض می‌کنیم $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ دو نرم هم‌ارز روی فضای برداری X باشند، دراین‌صورت فضای X با $\|.\|_1$ باناخ است، اگر و تنها اگر با $\|.\|_2$ باناخ باشد.

[1] A-module

[2] product

[3] Banach space

[4] equivalent

برهان. رجوع کنید به قضیه۴.۸.۲۱ از [۲۲].

□

تعریف ۱-۳-۵.

فضای برداری مختلط $\mathcal{H}$ را یک **فضای ضرب داخلی**[1] می‌نامیم، اگر به هر زوج مرتب از x و y در $\mathcal{H}$ یک عدد مختلط مانند $< x, y >$ چنان مربوط باشد که قواعد زیر برقرار باشند:

(الف) $< x, y >= \overline{< y, x >}$،

(ب) برای هر $x, y, z \in \mathcal{H}$ داریم : $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$،

(پ) اگر $x, y \in \mathcal{H}$ و α اسکالر باشد، $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$،

(ت) به‌ازای هر $x \in X$، $< x, x >\geq 0$،

(ث) $< x, x >= 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

حال چند نتیجه از این اصول را ذکر می‌کنیم.

قاعده (پ) ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $y \in \mathcal{H}$ ، $< 0, y >= 0$.

قواعد (ب) و (پ) را می‌توان در یک حکم جا داد.به‌ازای هر $y \in \mathcal{H}$ نگاشت $x \to < x, y >$ یک تابعک خطی بر $\mathcal{H}$ است.

(الف) و (پ) نشان می‌دهند که $< x, \alpha y >= \overline{\alpha} < x, y >$.

(الف) و (ب) ایجاب می‌کنند $< z, x + y >=< z, x > + < z, y >$.

بنا بر (ت) می‌توانیم تعریف کنیم $\|x\| =< x, x >^{1/2}$.

و نیز از تعریف فضای ضرب داخلی، نتایج زیر به‌دست می‌آید.

قضیه ۱-۳-۶. ***(نامساوی کوشی - شوارتز)*** [2]

به‌ازای هر $x, y \in \mathcal{H}$ داریم :

$$| < x, y > | \leq \|x\|\|y\|.$$

برهان. رجوع کنید به قضیه ۲.۴ از [۳۴]. □

قضیه ۱-۳-۷. ***(نامساوی مثلثی)*** [3]

به‌ازای هر $x, y \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

[1] inner product space

[2] Cauchy - Schwarz inequality

[3] triangle inequality

برهان. رجوع کنید به قضیه ۳.۴ از [۳۴]. $\square$

ملاحظه ۱-۳-۸.

از نامساوی مثلثی نتیجه می‌گیریم $\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|$. بنابراین اگر فاصله بین x و y را با $d(x,y) = \|x-y\|$ نشان دهیم، $(\mathcal{H}, d)$ در تمام شرایط فضای متریک صدق می‌کند و از شرط (ث) تعریف (۱-۳-۵) نتیجه می‌گیریم که اگر $\|x\| = 0$ آنگاه $x = 0$. لذا $\mathcal{H}$ یک فضای نرم‌دار است.

نتیجه ۱-۳-۹. (*اتحاد متوازی‌الاضلاع*) [1]

به‌ازای هر $x, y \in \mathcal{H}$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داریم:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

تعریف ۱-۳-۱۰.

اگر فضای ضرب داخلی $\mathcal{H}$ با نرم $\|x\| =< x, x >^{1/2}$ کامل باشد، آنگاه $\mathcal{H}$ را یک **فضای هیلبرت**[2] می‌نامیم.

مثال ۱-۳-۱۱.

(الف) به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، فرض می‌کنیم $\mathbb{C}^n$ مرکب از تمام n تایی‌های مرتب $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ است که در آن x_i ها مختلط‌اند.

جمع و ضرب اسکالر و نیز ضرب داخلی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \ \ , \alpha\mathbf{X} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) \quad (\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{C}^n \ \ , \ \alpha \in \mathbb{C})$$

$$< \mathbf{X}, \mathbf{Y} >= \sum_{i=1}^{i=n} x_i \overline{y_i},$$

در این‌صورت $\mathbb{C}^n$ یک فضای هیلبرت است.

(ب) فضای $L^2(X, \mu)$ با ضرب داخلی زیر، یک فضای هیلبرت است.

$$< f, g >= \int_X f\overline{g} d\mu \qquad\qquad f, g \in L^2(X, \mu).$$

(پ) فضای $\ell^2(\mathbb{Z})$ با ضرب داخلی زیر، یک فضای هیلبرت است.

$$< \mathbf{X}, \mathbf{Y} >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n y_n \ \ ; \ \ \mathbf{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \ , \ \mathbf{Y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

ملاحظه ۱-۳-۱۲.

فضاهای هیلبرت، رده خاصی از فضاهای باناخ را تشکیل می‌دهند و تمام قضایای فضاهای باناخ در مورد فضاهای هیلبرت نیز برقرار است.

---

[1] parallelogram identity

[2] Hilbert space

در این پایان‌نامه از این به‌بعد، $\mathcal{H}$ را یک فضای هیلبرت در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱-۳-۱۳.

اگر $\mathcal{H}$ دارای زیرمجموعه چگال شمارش‌پذیری باشد، آنگاه $\mathcal{H}$ را **فضای هیلبرت جدایی‌پذیر** [۱] می‌نامیم.

مثال ۱-۳-۱۴.

$\mathbb{R}$ جدایی‌پذیر است.زیرا $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال و شماراست.

تعریف ۱-۳-۱۵.

زیر فضای بسته[۲] از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، زیر فضایی برداری است که با توپولوژی حاصل از نرم در $\mathcal{H}$، بسته باشد.

تعریف ۱-۳-۱۶.

دو عنصر x و y در $\mathcal{H}$ را **متعامد**[۳] می‌نامیم، هرگاه $< x, y >= 0$. همچنین**متمم متعامد** [۴] زیر فضای U از $\mathcal{H}$ عبارت است از :

$$U^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} \;\; ; \quad < x, y >= 0 \;\; , \;\; \forall y \in U\}.$$

ملاحظه ۱-۳-۱۷.

فرض می‌کنیم M زیر فضای بسته‌ای از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}.$$

به‌این معنی که هر $x \in \mathcal{H}$ را می‌توانیم به‌طور یکتا به‌صورت $x = y + z$ نمایش دهیم که $y \in M$ و$z \in M^{\perp}$. به‌علاوه y و z عناصر یکتایی به‌ترتیب در M و $M^{\perp}$ هستند که فاصله آنها تا x مینیمم است.

تعریف ۱-۳-۱۸.

دو فضای هیلبرت $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ را به‌ترتیب با ضرب‌های داخلی$< .,. >_1$ و $< .,. >_2$ **یکریخت**[۵] می‌نامیم، هر گاه عملگری خطی، کراندار ودوسویی مانند $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ موجود باشد که ضرب داخلی را حفظ

[۱] separable Hilbert space

[۲] closed subspace

[۳] orthogonal

[۴] orthogonal complement

[۵] isomorphic