بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه کاشان
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

عنوان:

حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی کسری با استفاده از تقریب های تفاضلات متناهی فشرده

استاد راهنما:

دکتر اکبر محبی

به‌وسیله:

مصطفی عباس زاده

شهریور ماه ۱۳۹۱

بسمه تعالی

تاریخ:
شماره:
پیوست:

مدیریت تحصیلات تکمیلی دانشگاه

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

دانشگاه کاشان
دانشکده علوم

نام و نام خانوادگی دانشجو : آقای مصطفی عباس زاده

شماره دانشجویی : ۸۹۱۱۵۸۰۰۰۳

رشته : ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده : علوم ریاضی

عنوان پایان‌نامه : "حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی کسری با استفاده از تقریب های تفاضلات متناهی فشرده "

این پایان‌نامه به مدیریت تحصیلات تکمیلی به منظور بخشی از فعالیتهای تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد ارائه می‌گردد.دفاع از پایان نامه در تاریخ 91/06/19 مورد تأیید و ارزیابی هیأت داوران قرار گرفت و با نمره به عدد: ۱۹/۸۷ به حروف: نوزده و هشتاد و هفت صدم و درجه عالی به تصویب رسید.

اعضاء هیأت داوران

عنوان	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱. استاد راهنما :	آقای دکتر اکبرمحبی	استادیار	محبی
۱. استاد مشاور :	آقای دکتر عباس سعادتمندی	دانشیار	سعادتمندی
۲. متخصص وصاحب نظر داخل دانشگاه :	آقای دکترحمید رضا تبریزی دوز	استادیار	تبریزی
۳. متخصص وصاحب نظر خارج دانشگاه :	آقای دکتر مهدی تاتاری	استادیار	تاتاری
۴.نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه :	سرکار خانم دکتر هدی قاسمیه	استادیار	قاسمیه

دکتر منصورنیا
مدیر تحصیلات تکمیلی

آدرس: کاشان - بلوار قطب راوندی
کدپستی ۵۱۱۶۷ - ۸۷۳۱۷
تلفن ۵۵۵۲۹۳۵ - دورنگار ۵۵۵۲۹۳۵
http: www.kashanu.ac.ir

تقدیم به پدر و مادرم :

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار، مایه هستی‌ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند. آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.

سپاس

شکر و درود بر خداوند زیبایی‌ها، بر رسول پاکی‌ها و بر ائمه‌ی مهربانی‌ها.

و سپاس ویژه‌ی من بر

استاد گرانمایه جناب آقای دکتر اکبر محبی

که راهنمایی مرا در تهیه و نگارش این تحقیق به‌عهده داشتند و در طول دوران تحصیل بنده‌ی حقیر را مورد لطف و عنایات خویش قرار داده‌اند.

هم‌چنین، از تلاش‌های جناب آقای دکتر عباس سعادتمندی به‌عنوان استاد مشاور، جناب آقای دکتر حمیدرضا تبریزی‌دوز به عنوان استاد داور داخل دانشگاه و جناب آقای دکتر مهدی تاتاری به عنوان داور خارج دانشگاه که این تحقیق را مورد مطالعه قرار دادند و در جلسه‌ی دفاع شرکت نمودند، تشکر می‌نمایم.

در پایان از سرکار خانم دکتر هدی قاسمیه که به‌عنوان نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی دانشگاه قبول زحمت نمودند، قدردانی به‌عمل می‌آورم.

سپاس دیگر من بر دوستان با محبّتم که عیان و نهان، در خَلوت و جَلوت، مرا دست به هدایت گرفتند. همه را به آرزوی توفیق الهی می‌سپارم.

و من الله التوفیق

مصطفی عباس‌زاده

چکیده

هدف این پژوهش، بدست آوردن طرح های تفاضلات متناهی با مرتبه دقت بالا برای برخی از معادلات دیفرانسیل جزئی با مشتقات کسری است. به همین منظور ما در یک فصل جداگانه به بیان تعاریف و شماری از خواص مشتقات کسری پرداخته‌ایم. در این فصل سه نوع از عمگر های مشتق و انتگرال کسری معروف را بیان کرده‌ایم. سپس تعدادی از معادلات دیفرانسیل جزئی با مشتقات کسری مهم در مهندسی و فیزیک از جمله معادلات استوکس، پخش-وزش، زیر پخش، کلاین-گردون و کتانئو مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برای معادلات فوق، پس از یافتن تقریبهای تفاضلات متناهی فشرده و اثبات حل پذیری طرح پیشنهاد شده، از روش های آنالیز فوریه و روش انرژی برای اثبات پایداری و همگرایی طرح‌های تفاضلی بهره جسته‌ایم. نتایج حاصل از به کارگیری روش های پیشنهاد شده، موید مرتبه دقت بالا و کارائی روش‌ها می‌باشد.

کلمات کلیدی:

معادلات دیفرانسیل جزئی با مشتقات کسری، تقریب های تفاضلات متناهی فشرده، حل پذیری، پایداری، همگرائی، معادله استوکس کسری، معادله پخش کسری، معادله کلاین گردون کسری، معادله پخش-وزش کسری، معادله زیر پخش دگرگون یافته غیر عادی کسری و معادله تعمیم یافته کتانئو.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

عنوان صفحه

مقدمه

آنالیز عددی شامل مطالعه، توسعه و تجزیه تحلیل الگوریتم ها برای بدست آوردن جواب های عددی مسائل مختلف ریاضی است. اغلب، آنالیز عددی **ریاضیات محاسبات علمی** نامیده می شود. از جمله مسائلی که در ریاضی وجود دارند، معادلات با مشتقات جزئی می باشند. معادلات با مشتقات جزئی (PDE) غالباً در ریاضیات، علوم مهندسی و طبیعی به کار می روند که **زبان بین رشته ای** برای علوم می باشند. PDE ها در مسائلی که آهنگ های تغییر توابع با چند متغیر مستقل را در بر دارد ظاهر می شوند. اغلب PDE هایی که در سال های دور مورد بررسی قرار گرفته اند، با مشتقات معمولی بوده اند ولی در سال های اخیر با ظهور محاسبات کسری، معادلات با مشتقات جزئی کسری نیز شکوفا شده اند. اغلب مسائل فیزیکی، امروزه بوسیله این مفهوم مدل بندی می شوند. ما نیز در این تحقیق به دنبال ایجاد طرح های تفاضلات متناهی با مراتب دقت بالا برای PDE های کسری هستیم. به علاوه آنالیز روشها شامل حل پذیری، همگرائی و پایداری نیز مورد بررسی قرار می گیرند که در روشهای عددی از اهمیت بالائی برخوردار هستند. در فصل اول تاریخچه کوتاه از محاسبات کسری به همراه مروري بر مشتق گیری و انتگرال گیری کلاسیک را بیان مي کنیم. در فصل دوم به مرور محاسبات کسری پرداخته و در فصل سوم معادله زیر پخش دگرگون یافته غیر عادی با مشتقات کسری و جمله غیر خطی مورد بررسی قرار داده و با معرفی تقریب تفاضلات متناهی فشرده برای این معادله، به بررسی پایداری و همگرایی طرح فوق می پردازیم. با حل چند مسئله با روش فوق، مرتبه دقت بالا

و پایداری روش رانشان می دهیم. فرآیند فصل سوم را در فصل چهارم برای معادله پخش-وزش با مشتق کسری زمانی و در فصل ششم برای معادله اولیه استوکس و پخش کسری بیان می کنیم.

فصل ۱

تاریخچه کوتاه از محاسبات کسری و مروری بر مشتق گیری و انتگرال گیری کلاسیک

در سال‌های اخیر محاسبات کسری نه تنها در علوم کاربردی بلکه در ریاضیات محض نیز رشد چشمگیری یافته‌اند. اما طبقه‌بندی محاسبات کسری همانند علوم جدید، کاری کاملا غلط خواهد بود. در عوض " **انتگرال پذیری و مشتق پذیری از مرتبه دلخواه**"[۱] ممکن است یک نماد مناسب‌تر برای زمینه‌ی محاسبات کسری باشد چنانچه این عنوان امروزه قابل فهم‌تر است. در سال‌های اخیر تعدادی کتاب در مورد محاسبات کسری منتشر شده است و در همه آنها برای یافتن تاریخچه، مرجع‌های دیگری معرفی کرده‌اند. در این فصل در سه بخش مجزا یک بازنگری تاریخی روی محاسبات کسری انجام می‌دهیم.

۱.۱ ظهور محاسبات کسری

یکی از نخستین توجهات در مورد معنی مشتقات از مرتبه‌ی غیر صحیح را می‌توان در نامه‌ی **لایبنیتز**[۲] به **هاسپیتال**[۳] در تاریخ ۱۶۹۵/۸/۳ یافت، که در آنجا لایبنیتز پاسخی به سوال مطرح شده از سوی

[۱] Integeration and differentiation to an arbitrary order
[۲] Leibniz
[۳] L Hospital

هاسپیتال، در مورد معنی مشتقات از مرتبه غیر صحیح ارائه می‌دهد. در این نامه به حالت خاص $n = \frac{۱}{۲}$ پاسخ داده شده است.

در کلمات این نامه **محاسبات کسری**[۴] متولد شد. به دنبال اولین تحقیقات لایبنیتز و هاسپیتال، محاسبات کسری در وهله‌ی اول یک زمینه تحقیقاتی مناسب برای نوابغ ریاضی شد. **فوریه**[۵]، **اویلر**[۶] و **لاپلاس**،[۷] از جمله افرادی هستند که با محاسبات کسری و نتایج ریاضی آن کار کردند. تعریف‌های متعددی برای مشتقات و انتگرال های کسری وجود دارد. اغلب این تعاریف معروف که در جهان ریاضیات عمومیت یافته‌اند، شامل **ریمان-لیوویل** [۸] و **گرانوالد-لتنیکوف** [۹] هستند. اغلب، نظریه‌های ریاضی قابل کاربرد برای مطالعه‌ی محاسبات کسری پیش از شروع قرن بیست میلادی توسعه یافته بود. به هر حال در صد سال گذشته افزایش جالب و عجیب این علم در علوم کاربردی و مهندسی مشاهده می‌شود. همچنین **کاپوتو** [۱۰] شماری از تعاریف کلاسیک مشتقات ریمان لیوویل را برای حل معادلات دیفرانسیل کسری، بازنویسی کرد. در محدوده ی قرن بیست و یک میلادی، کاربردهای فراوان و نمونه‌های فیزیکی از محاسبات کسری یافت می‌شود. در حالیکه درک مفهوم فیزیکی محاسبات کسری مشکل است، تعاریف خود محاسبات کسری باریک بینانه‌تر از مشابه صحیح آن نیست. فهمیدن تعاریف و استفاده از محاسبات کسری با بحث در مورد مفاهیم لازم و نسبتا ساده‌ی ریاضی روشن‌تر خواهد شد. **تابع گاما**[۱۱] و **تابع بتا**[۱۲] از جمله این مفاهیم هستند که در بخش‌های بعد جداگانه به بررسی آنها خواهیم پرداخت.

[۴] Fractional calculus
[۵] Fourier
[۶] Euler
[۷] Laplace
[۸] Riemman-Liouville
[۹] Grunwald-Letnikov
[۱۰] Caputo
[۱۱] Gamma fuanction
[۱۲] Beta function

۲.۱ تابع گاما-اویلر

قبل از اینکه تابع **گاما-اویلر** [۱۳] معمولی را بیان کنیم، به چند تعریف که در سراسر این تحقیق برای اثبات بعضی از خواص تابع گاما به کار می‌روند، نیاز داریم.

تعریف ۱.۱. ثابت اویلر، γ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) \approx 0/5772156649. \qquad (1.2.1)$$

نام دیگر ثابت اویلر، ثابت **اویلر-ماسچرونی**[۱۴] نیز هست.

راه‌های مختلفی برای تعریف تابع گاما-اویلر وجود دارد، ما در اینجا یکی از آنها را که در محاسبات کسری مفید خواهد بود، معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲.۱. برای هر $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ تابع گاما اویلر $\Gamma(z)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \int_{0}^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt & if \quad \mathrm{Re}(z) > 0, \\ \frac{1}{z}\Gamma(z+1) & if \quad \mathrm{Re}(z) \leq 0, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots. \end{cases} \qquad (2.2.1)$$

تابع گاما-اویلر در تمام فضای مختلط به جز صفر و اعداد صحیح مثبت تعریف شده است. در ادامه بعضی از خواص تابع گاما-اویلر را که در فصل های بعد استفاده می‌شوند، بررسی می‌کنیم.

قضیه ۳.۱. تابع گاما-اویلر در خواص زیر صدق می‌کنند،

[۱۳] Gamma-Euler
[۱۴] Euler-Mascheroni constant

۱. برای هر z که $Re(z) > ۰$ قسمت اول (۲.۲.۱) برابر است با

$$\Gamma(z) = \int_{۰}^{۱} \left(Ln\left(\frac{۱}{t}\right)\right)^{z-۱} dt.$$

۲. برای هر z که $z \in \mathbb{C} \setminus \{۰, -۱, -۲, -۳, \dots\}$

$$\Gamma(۱ + z) = z\Gamma(z).$$

۳. برای هر n که $n \in \mathbf{N}$

$$\Gamma(n) = (n - ۱)!.$$

۴. برای هر $z \in \mathbb{C} \setminus \{۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$

$$\Gamma(۱ - z) = -z\Gamma(-z).$$

۵. برای هر z که $Re(z) > ۰$ حد زیر برقرار است،

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z + ۱)(z + ۲)\dots(z + n)}. \qquad (۳.۲.۱)$$

خاصیت حدی بالا معادل با ضرب نامتناهی اویلر ارائه شده در زیر است،

$$\frac{۱}{z}\prod_{n=۱}^{\infty} \frac{(۱ + (۱/n))^z}{۱ + z/n}.$$

۶. فرض کنید $z \in \mathbb{C} \setminus \{۰, -۱, -۲, -۳, \dots\}$، آنگاه تابع گاما-اویلر به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\frac{۱}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=۱}^{\infty} \left(۱ + \frac{z}{n}\right)e^{-z/n},$$

به طوریکه γ ثابت اویلر (۱.۲.۱) است.

اثبات. چهار خاصیت اول به راحتی می‌توانند اثبات شوند. برای اثبات رابطه ۱ کافیست تغییر متغیر $u = -\log(t)$ را در قسمت اول رابطه (۲.۲.۱) استفاده کنیم. با استفاده از انتگرال گیری جزء به

جزء در رابطه (۲.۲.۱) بدست می‌آوریم،

$$\Gamma(z)=\int_{۰}^{\infty} t^{z-۱}e^{-t}dt = t^{z-۱}e^{-t}\Big|_{t=۰}^{t=\infty}+\int_{۰}^{\infty}(z-۱)t^{z-۲}e^{-t}dt$$

$$=(z-۱)\int_{۰}^{\infty} t^{z-۲}e^{-t}dt=(z-۱)\Gamma(z-۱),$$

که اثبات دومین رابطه را نتیجه می‌دهد. به وضوح دیده می‌شد که $\Gamma(۱)=۱$ و با استفاده متوالی از خاصیت ۲، می‌توان خاصیت ۳ را نتیجه گرفت. برای اثبات رابطه ۵ تابع کمکی زیر را تعریف می‌کنیم،

$$\Gamma_n(z)=\int_{۰}^{n}\left(۱-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-۱}dt.$$

با در نظر گرفتن این تابع و استفاده از قاعده انتگرالگیری جزء به جزء و قرار دادن $s=t/n$، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\Gamma_n(z) &= n^z\int_{۰}^{۱}(۱-s)^n s^{z-۱}ds\\ &= \frac{n^z}{z}n\int_{۰}^{۱}(۱-s)^{n-z}s^z ds\\ &= \frac{n!n^z}{z(z+۱)(z+۲)\dots(z+n-۱)}\int_{۰}^{۱}s^{z+n-۱}ds\\ &= \frac{n!n^z}{z(z+۱)(z+۲)\dots(z+n)},\end{aligned}$$

که رابطه ۵ را نشان می‌دهد. زیرا

$$\lim_{n\to\infty}\left(۱-\frac{t}{n}\right)^n=e^{-t},$$

و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(z)=\lim_{n\to\infty}\int_{۰}^{n}\left(۱-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-۱}dt=\int_{۰}^{\infty}e^{-t}t^{z-۱}dt.$$

حال از تابع کمکی تعریف شده برای اثبات خاصیت ۶ نیز استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه داریم که

$$\Gamma_n(z) = \frac{n!n^z}{z(z+۱)(z+۲)\dots(z+n)}$$

$$= \frac{n^z}{z\left(۱+\frac{z}{۱}\right)\left(۱+\frac{z}{۲}\right)\dots\left(۱+\frac{z}{n}\right)},$$

با توجه به اینکه

$$n^z = e^{z\ln(n)} = e^{z(\ln(n)-۱-۱/۲-\dots-۱/n)}e^{z+z/۲+\dots+z/n}$$

با استفاده از این داریم

$$\Gamma_n(z) = \frac{e^{z(\ln(n)-۱-۱/۲-\dots-۱/n)}e^{z+z/۲+\dots+z/n}}{z\left(۱+\frac{z}{۱}\right)\left(۱+\frac{z}{۲}\right)\cdots\left(۱+\frac{z}{n}\right)}$$

$$= e^{z(\ln(n)-۱-۱/۲-\dots-۱/n)}\frac{۱}{z}\frac{e^{z/۱}}{\left(۱+\frac{z}{۱}\right)}\frac{e^{z/۲}}{\left(۱+\frac{z}{۲}\right)}\cdots\frac{e^{z/n}}{\left(۱+\frac{z}{n}\right)}.$$

با توجه به روابط به دست آمده داریم

$$\frac{۱}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\Gamma_n(z)}$$

$$= e^{z\gamma}z\lim_{n\to\infty}e^{-z}\left(۱+\frac{z}{۱}\right)e^{-z/۲}\left(۱+\frac{z}{۲}\right)e^{-z/n}\left(۱+\frac{z}{n}\right)$$

$$= e^{z\gamma}z\prod_{n=۱}^{\infty}\left(۱+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}.$$

■

۳.۱ تابع بتا

تابع بتا[۱۵] ، یک تابع خاص دیگر است که با تابع گاما ارتباط مستقیم دارد.

[۱۵] Beta Function

تعریف ۴.۱. تابع بتا $B(z,w)$، تابعی از دو متغیر $z,w\in\mathbb{C}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

در اینجا به بررسی بعضی از خواص این تابع می‌پردازیم، که در قسمت‌های بعد از آنها استفاده خواهیم کرد. به خصوص **انتگرال بتا**[۱۶] که در محاسبات کسری استفاده خواهد شد.

قضیه ۵.۱. تابع بتا دارای خواص زیر است،

۱. برای zو w که در آن $Re(z),Re(w)>0$ ، تعریف (۴.۱) معادل است با،

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt=\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}}dt, \qquad (۴.۳.۱)$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2z-1}(\cos t)^{2w-1}dt. \qquad (۵.۳.۱)$$

۲. $B(z+1,w+1)=\int_0^1 t^z(1-t)^w dt$.

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که تساوی طرف راست (۴.۳.۱) در خاصیت ۱ قضیه، از تغییر متغیر $t=\frac{x}{x+1}$ بدست آمده است. همچنین برای اثبات رابطه ی (۵.۳.۱) از تغییر متغیر $t=\sin^2\varphi$ استفاده کرده‌ایم. حال برای ادامه اثبات، حاصلضرب زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\Gamma(z)\Gamma(w)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\int_0^\infty e^{-s}s^{w-1}ds,$$

و قرار می‌دهیم، $t=x^2$ و $s=y^2$، سپس بدست می‌آوریم،

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = 4\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2z-1}dx\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2w-1}dy$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}x^{2z-1}y^{2w-1}dxdy,$$

[۱۶] Beta Integral