دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

مشخص‌سازی‌هایی از ماتریس‌های جمعاً نامثبت (جمعاً منفی)

استاد راهنما

دکتر مهدی پناهی

استاد مشاور

دکتر مسعود امان

نگارنده

سمیرا صاحبی

شهریورماه ۱۳۹۱

چکیده

یک ماتریس حقیقی مرتبه‌ی $m \times n$، A جمعاً نامثبت (جمعاً منفی) نامیده می‌شود هرگاه هر مینور آن نامثبت (منفی) باشد. در این تحقیق مشخص‌سازی‌هایی از این رده‌های ماتریسی به وسیله‌ی مینورها، به وسیله‌ی تجزیه‌ی رتبه کامل آن‌ها و به وسیله‌ی تجزیه‌ی QR باریک آن‌ها ارائه می‌شود.

واژگان کلیدی: ماتریس‌های جمعاً نامثبت و جمعاً منفی، تجزیه‌ی رتبه کامل، تجزیه‌ی QR باریک

تعداد صفحات پایان نامه: ۸۰

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نسیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چراکه این دو وجود، پس از پروردگار، مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند. آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند. با احترام فراوان برای تلاش این عزیزان برای موفقیت هایم. اگر در خور تقدیم باشد این پایان نامه را تقدیم می کنم به

پدر بزرگوار، مادر مهربانم

و استاد ارجمندم جناب آقای دکتر پناهی.

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد

برای فزونی تکبر و غرور،

نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دست مایه‌ای برای تجارت،

بلکه گامی باشد

برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

تقدیر و تشکر

شکر و سپاس خدای را که با الطاف ربانی اش توفیق داد تا این مجموعه را به پایان رسانده و از خداوند منان توفیق و سعادت همه پویندگان و رهروان علم و دانش را خواهانم.

پس از حمد و ثنای الهی و شکرگزاری به درگاه خداوند متعال اکنون که حاصل همه ی تلاش ها مثمر ثمر واقع شد بر خود فرض می دانم که با بضاعت اندک در کمال ادب و احترام مراتب سپاس خالصانه و صمیمانه را از همه ی کسانی که من را در این وادی یاری نموده اند ابراز دارم.

از پدر و مادر عزیزم که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند، تشکر و قدردانی می کنم.

از زحمات استاد محترم راهنما، جناب آقای دکتر مهدی پناهی که در تمام مراحل انجام این تحقیق از رهنمودها و کمک های بی دریغ ایشان بهره مند بوده ام، به ویژه به خاطر ساعت های طولانی که به بحث و تبادل نظر در مورد موضوع تحقیق بنده اختصاص داده اند که همواره برای من الهام بخش ایده های تازه نسبت به موضوع بوده است، تشکر و قدردانی می کنم. استاد بزرگواری که هرگز پرسش های بی شمارم را در طول انجام این تحقیق بی پاسخ نگذاشت و مرحله به مرحله مسیر درست حرکت را به من نشان داد، که اکنون هر آنچه می دانم به پاس لطف و صبوری ایشان است.

از استاد محترم مشاور جناب آقای دکتر مسعود امان که لطف زیادی نسبت به من داشتند، سپاسگزاری می نمایم.

از استادان فرزانه و دلسوز جناب آقای دکتر اسدا... محمودزاده وزیری و سرکار خانم دکتر نسیم نصرآبادی که زحمت

داوری این رساله را متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از جناب آقای دکتر جانفدا نماینده محترم تحصیلات تکمیلی و همچنین از آقای دکتر نصرآبادی که در جلسه دفاع من حضور داشتند سپاسگزارم.

از جناب آقای تولایی که مشوق من در راه ادامه تحصیل بوده اند تشکر می کنم.

از حمایت های صمیمانه خواهران عزیزم بخصوص خواهر بزرگم و همچنین همه ی دوستانم که در طول این دو سال همیشه همراه و همگام من بودند، به واسطه این قدم ناچیزی که در راه علم و تحقیق برداشته ام، همواره قدردان آنان خواهم بود.

سمیرا صاحبی
شهریورماه ۱۳۹۱

فهرست مطالب

پیش گفتار

ماتریس حقیقی A از مرتبه‌ی $n \times m$، جمعاً نامثبت (جمعاً منفی) نامیده می‌شود هر گاه هر مینور آن نامثبت (منفی) باشد و آن را با $t.n.p.$ $(t.n.)$ نشان می‌دهند. این ماتریس‌ها در شاخه‌های مختلف علوم مانند محاسبات عددی و اقتصاد ظاهر می‌شوند. برای ماتریس‌های $t.n.$ مربعی، ویژگی‌های طیفی آن و تجزیه‌ی LDU آن در [۷] بررسی شده است. برای ماتریس‌های $t.n.p.$ نامنفرد تجزیه‌ی LDU و برخی خواص آن‌ها در [۲] معرفی شده است. علاوه بر آن، مشخص‌سازی به وسیله‌ی مینورها برای ماتریس‌های $t.n.p.$ و $t.n.$ با استفاده از تجزیه‌ی رتبه کامل به شکل پلکانی واحد آن‌ها در [۴] بدست آمده است. در این تحقیق مشخص‌سازی‌هایی از ماتریس‌های $t.n.p.$ مستطیلی به وسیله‌ی مینورها و تجزیه‌ی QR باریک آن‌ها و همچنین یک مشخص‌سازی از ماتریس‌های $t.n.$ مستطیلی به وسیله‌ی تجزیه‌ی QR باریک آن‌ها ارائه می‌شود.

این تحقیق به صورت زیر سازمان‌دهی شده است.

در فصل اول نمادها، تعاریف اولیه و قضایایی که در روند تحقیق به کار گرفته شده و آشنایی با آن‌ها برای مطالعه و درک مطالب موثر است، را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم روش‌های شبه حذفی گوس و شبه حذفی نویل برای تجزیه‌ی رتبه کامل به شکل پلکانی واحد ماتریس‌های $t.n.p.$ و $t.n.$ بیان می‌شود.

در فصل سوم منحصر بفردی تجزیه‌ی رتبه کامل به شکل پلکانی واحد یک ماتریس ثابت شده و سپس مشخص‌سازی از ماتریس‌های $t.n.p.$ مستطیلی به وسیله‌ی مینورها ارائه شده است.

در پایان مشخص‌سازی از ماتریس‌های $t.n.p.$ و $t.n.$ مستطیلی به وسیله‌ی تجزیه‌ی QR باریک آن‌ها در فصل چهارم ارائه شده است.

فصل ۱
تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

.

۱.۱ نمادها، تعاریف اولیه و قضایای مقدماتی

در این بخش تعاریف، نمادها و نتایج مقدماتی که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز داریم، ارائه می‌شود.

مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی $n \times m$ با $\mathbb{R}^{n\times m}$، مجموعه همه‌ی ماتریس‌های حقیقی مربعی مرتبه‌ی n با $\mathbb{R}^{n\times n}$ و مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای حقیقی n مولفه‌ای با $\mathbb{R}^n$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ...، x_m بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ باشند. این بردارها مستقل خطی نامیده می‌شوند هرگاه نتوان یکی را بر حسب ترکیب خطی سایر بردارها نوشت. به عبارت دیگر $x_۱$، $x_۲$، ...، x_m مستقل خطی‌اند هرگاه رابطه‌ی $\alpha_۱ x_۱ + \alpha_۲ x_۲ + \cdots + \alpha_m x_m = ۰$، تنها به ازای $\alpha_۱ = \alpha_۲ = \cdots = \alpha_m = ۰$ برقرار باشد. در صورتی که بردارهای $x_۱$، $x_۲$، ...، x_m مستقل خطی نباشند، وابسته‌ی خطی نامیده می‌شوند.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید $\{x_۱, x_۲, ..., x_k\}$ مجموعه‌ای از بردارها در $\mathbb{R}^n$ باشند. در این صورت:

۱. ترانهاده‌ی x_i با x_i^T نشان داده می‌شود.

۲. x_i را یکه گویند هرگاه $x_i^T x_i = ۱$.

۳. مجموعه بردارهای $\{x_۱, \ldots, x_k\}$ متعامد است هرگاه

$$x_i^T x_j = ۰, \qquad i \neq j.$$

۴. فرض کنید مجموعه بردارهای $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ متعامد باشد. این مجموعه یکا متعامد (متعامد یکه) نامیده می‌شود، هرگاه

$$x_i^T x_i = 1, \qquad i = 1, 2, \dots, k.$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. در این صورت:

۱. رتبه‌ی سطری (ستونی) A برابر حداکثر تعداد سطرهای (ستون‌های) مستقل خطی آن است. همواره رتبه‌ی سطری A با رتبه‌ی ستونی آن برابر است.

۲. رتبه‌ی A برابر حداکثر تعداد سطرهای (تعداد ستون‌های) مستقل خطی آن است و آن را با $\mathrm{rank}(A)$ نشان می‌دهند. همواره $\mathrm{rank}(A) \le \min\{n, m\}$.

۳. اگر $\mathrm{rank}(A) = \min\{n, m\}$، آن‌گاه A را رتبه کامل گویند.

تعریف ۴.۱.۱. ماتریس‌های $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ را در نظر بگیرید. در این صورت:

۱. ترانهاده‌ی B ماتریسی $m \times n$ است که آن را با B^T نشان داده و به صورت

$$B^T = (b_{ji}),$$

تعریف می‌شود.

۲. B نامنفی (مثبت، نامثبت، منفی) است هرگاه تمام درایه‌هایش نامنفی (مثبت، نامثبت، منفی) باشد و می‌نویسیم $B \ge 0$ ($B > 0$، $B \le 0$، $B < 0$).

۳. A بالا مثلثی (پایین مثلثی) نامیده می‌شود هرگاه برای هر $i > j$ ($j > i$)، $a_{ij} = 0$.

۴. A متعامد نامیده می‌شود هرگاه $A^T A = I$.

۵. A متقارن است هرگاه

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

۶. A معین مثبت نامیده می‌شود هرگاه برای هر بردار غیر صفر $x \in \mathbb{R}^n$،

$$x^T A x > ۰.$$

۷. A منفرد نامیده می‌شود هرگاه $\det A = ۰$، در غیر این صورت آن را نامنفرد می‌نامند.

تعریف ۵.۱.۱. یک نرم برداری روی $\mathbb{R}^n$ یک نگاشت حقیقی مانند $\|.\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ است که به هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$ یک عدد حقیقی با خواص زیر نسبت می‌دهد.

۱. برای هر بردار غیر صفر $x \in \mathbb{R}^n$، $\|x\| > ۰$.

۲. برای هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$ و هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

۳. برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

بعضی نرم‌های برداری معروف عبارتند از:

(نرم- ۱) $$\|x\|_۱ = \sum_{i=۱}^{n} |x_i|,$$

(نرم اقلیدسی یا نرم-۲) $$\|x\|_۲ = \Big(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^۲\Big)^{\frac{۱}{۲}},$$

(نرم ماکزیمم یا نرم بی‌نهایت) $$\|x\|_\infty = \max_{۱\leq i\leq n} |x_i|,$$

که در آن $x = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

مثال ۶.۱.۱. بردار $x = (۵, ۲, -۱)^T \in \mathbb{R}^۳$ مفروض است. نرم-۱، نرم-۲ و نرم ماکزیمم آن به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
\|x\|_۱ &= \sum_{i=۱}^{۳} |x_i| = ۵ + ۲ + ۱ = ۸, \\
\|x\|_۲ &= \Big(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^۲\Big)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲۵ + ۴ + ۱} = \sqrt{۳۰}, \\
\|x\|_\infty &= \max_{۱\leq i\leq ۳} |x_i| = \max\{۵, ۲, ۱\} = ۵.
\end{aligned}$$

تعریف ۷.۱.۱. ماتریس $n \times n$ قطری D با $D = \mathrm{diag}(d_۱, d_۲, \ldots, d_n)$ نشان داده می‌شود که در آن $d_۱$، $d_۲$، $\ldots$، d_n درایه‌های قطری وسایر درایه‌های آن صفر هستند.

تعریف ۸.۱.۱. ماتریس $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ که از تعویض سطرهای (یا ستون‌های) ماتریس همانی بدست می‌آید، یک ماتریس جایگشت نامیده می‌شود.

ضرب ماتریس جایگشت P از چپ (از راست) در ماتریس A باعث تعویض سطرهای (ستون-های) آن می‌شود. اگر P یک ماتریس جایگشت باشد، آن‌گاه $P^T P = I$.

مثال ۹.۱.۱. فرض کنید ماتریس جایگشت P و ماتریس A به صورت

$$A=\begin{pmatrix} ۴ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ -۲ & ۰ & ۹ \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix},$$

باشند. در این صورت

$$AP=\begin{pmatrix} ۱ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ ۹ & -۲ & ۰ \end{pmatrix}, PA=\begin{pmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ -۲ & ۰ & ۹ \\ ۴ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. ماتریس $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$ بالا پلکانی[۱] نامیده می‌شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. اولین درایه‌ی غیر صفر در هر سطر درایه‌ی پیشرو برای آن سطر نامیده می‌شود.

۲. هر درایه‌ی پیشرو در سمت راست درایه‌ی پیشرو در سطر بالای آن است.

۳. سطرهای صفر، سطرهای انتهایی آن هستند.

اگر علاوه بر شرایط فوق این ماتریس در شرط زیر نیز صدق کند، آن‌گاه بالا پلکانی تحویل یافته [۲] نامیده می‌شود.

۴. هر درایه‌ی پیشرو تنها درایه‌ی غیر صفر در آن ستون است.

یک ماتریس پایین پلکانی (تحویل یافته) است، هرگاه ترانهاده‌ی آن یک ماتریس بالا پلکانی (تحویل یافته) باشد. بیش از این، اگر همه‌ی درایه‌های پیشرو مساوی یک باشند آن‌گاه صفت واحد به تعاریف فوق افزوده می‌شود [۵].

در ضمن هر ماتریس پایین (بالا) مثلثی واحد، یک ماتریس پایین (بالا) پلکانی واحد است ولی عکس آن برقرار نیست.

مثال ۱۱.۱.۱. ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$A=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۴ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۵ & ۶ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۴ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}.$$

[۱] upper echelon
[۲] upper reduced echelon

A و B هر دو بالا پلکانی هستند. A بالا پلکانی تحویل یافته است ولی B بالا پلکانی تحویل یافته نمی‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱۲. برای $k,n \in \mathbb{N}$ که $1 \leq k \leq n$، $Q_{k,n}$ به صورت مجموعه‌ی از همه‌ی دنباله‌های صعودی اکید از k عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی n تعریف می‌شود؛ یعنی

$$Q_{k,n} = \{\alpha \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k), 1 \leq k \leq n, \alpha_i \in \mathbb{N} \quad \forall i, 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq n\}.$$

وقتی اعداد طبیعی دنباله‌های فوق متوالی نیز باشند، مجموعه‌ی فوق با $Q^{\circ}_{k,n}$ نمایش داده می‌شود [۴].

تعداد اعضای مجموعه‌ی $Q_{k,n}$ برابر است با

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

و تعداد اعضای مجموعه‌ی $Q^{\circ}_{k,n}$ برابر است با $n-(k-1)$.

مثال ۱.۱.۱۳. برای $n=4$ و $k=1,2$، داریم

$$Q_{1,4} = \{1,2,3,4\},$$
$$Q_{2,4} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\},$$

تعداد اعضای مجموعه‌های $Q_{1,4}$ و $Q_{2,4}$ به ترتیب برابر است با $4 = \binom{4}{1}$ و $6 = \binom{4}{2}$.

$$Q^{\circ}_{2,4} = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$$

و تعداد اعضای $Q^{\circ}_{2,4}$ برابر است با $3 = 4-(2-1)$.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنید n، m، k، l اعداد طبیعی باشند و ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. در این صورت:

۱. اگر $k \leq n$، $l \leq m$ و $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in Q_{k,n}$، $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l) \in Q_{l,m}$، آن‌گاه زیرماتریس $l \times k$ از A شامل سطرهای α_1، ...، α_k و ستون‌های β_1، ...، β_l را با $A[\alpha|\beta]$ نشان می‌دهند. برای $k \leq \min\{n,m\}$، دترمینان زیرماتریسی از مرتبه‌ی $k \times k$، A شامل سطرهای α_1، ...، α_k و ستون‌های β_1، ...، β_k را یک مینور[۳] A می‌نامند [۱۲].

۲. اگر $k \leq \min\{n,m\}$ و $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in Q_{k,\min\{n,m\}}$، آن‌گاه زیرماتریس $A[\gamma|\gamma]$ را به اختصار با $A[\gamma]$ نشان می‌دهند و آن را یک زیرماتریس اصلی[۴] A می‌نامند. $\det A[\gamma]$ یک مینور اصلی A نامیده می‌شود [۱۰].

---

[۳] minor

[۴] principal submatrix

۳. زیرماتریس‌های اصلی $A[۱,۲,\ldots,k]$، $k=۱,۲,\ldots,\min\{n,m\}$، زیرماتریس‌های اصلی پیشرو [۵] A نامیده می‌شوند. یک مینور اصلی پیشرو [۶] از مرتبه‌ی k برای A، مینوری به صورت $\det A[۱,\ldots,k]$ می‌باشد.

مثال ۱.۱.۱۵. فرض کنید

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\ ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \end{pmatrix},$$

$\alpha=(۱,۲,۴)$، $\beta=(۲,۳)$ و $\gamma=(۱,۲,۳)$. دراین صورت:

$$A[\alpha|\beta]=A[۱,۲,۴|۲,۳]=\begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{pmatrix},$$

یک زیر ماتریس ۳×۲ از A،

$$A[\alpha]=A[۱,۲,۴]=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۵ \\ ۴ & ۵ & ۷ \end{pmatrix},$$

یک زیرماتریس اصلی A و

$$A[\gamma]=A[۱,۲,۳]=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{pmatrix},$$

یک زیرماتریس اصلی پیشرو A می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶. یک مینور ستون‌اول[۷] ماتریس $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$، مینوری به شکل $\det A[\alpha|۱,۲,\ldots,k]$ می‌باشد که $\alpha\in Q^{\circ}_{k,n}$، $k=۱,۲,\ldots,\min\{n,m\}$. یک مینور سطراول [۸] A مینوری به شکل $\det A[۱,۲,\ldots,k|\beta]$ است که $\beta\in Q^{\circ}_{k,m}$، $k=۱,۲,\ldots,\min\{n,m\}$ [۸].

مثال ۱.۱.۱۷. فرض کنید

[۵] leading principal submatrix
[۶] leading principal minor
[۷] row-initial minor
[۸] column-initial minor

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۵ & ۶ & ۱ \\ ۷ & ۳ & ۴ & ۲ & ۲ \\ ۵ & ۹ & ۸ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۹ & ۱ & ۳ & ۱ \end{pmatrix},$$

$\alpha = (۲, ۳)$، $\beta = (۳, ۴, ۵)$. در این صورت مینورهای ستون‌اول $\det A[\alpha|۱, ۲]$ و سطر‌اول $\det A[۱, ۲, ۳|\beta]$ به ترتیب برابر

$$\det A[\alpha|۱, ۲] = \det A[۲, ۳|۱, ۲] = \det \begin{pmatrix} ۷ & ۳ \\ ۵ & ۹ \end{pmatrix} = ۴۸,$$

$$\det A[۱, ۲, ۳|\beta] = \det A[۱, ۲, ۳|۳, ۴, ۵] = \det \begin{pmatrix} ۵ & ۶ & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۲ \\ ۸ & ۳ & ۴ \end{pmatrix} = ۶,$$

می‌باشند.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریسی پایین مثلثی (متناظراً بالا مثلثی) باشد. مینورهای $\det A[\alpha|\beta]$ با $\alpha_k \geq \beta_k$ (متناظراً $\alpha_k \leq \beta_k$)، برای هر k، مینورهای غیر بدیهی [۹] A نامیده می‌شوند؛ زیرا به وضوح همه‌ی مینورهای باقی مانده برابر صفر هستند [۹].

مثال ۱۹.۱.۱. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} ۴ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ -۸ & ۱ & ۱ & ۰ \\ -۸ & ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix},$$

در این صورت

$$\det A[۲, ۳, ۴|۱, ۲, ۳] = \det \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۸ & ۱ & ۱ \\ -۸ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} = ۱۷,$$

یک مینور غیر بدیهی A و

$$\det A[۱, ۲, ۴|۱, ۳, ۴] = \det \begin{pmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ -۸ & ۲ & ۳ \end{pmatrix} = ۰,$$

یک مینور بدیهی A می‌باشد.

[۹] nontrivial minors

تبصره ۲۰.۱.۱. *در حالت کلی مینورهای غیر بدیهی یک ماتریس پایین مثلثی مانند A ممکن است صفر یا غیر صفر باشند. به عنوان نمونه در مثال قبل*

$$\det A[۳,۴|۱,۲] = \det \begin{pmatrix} -۸ & ۱ \\ -۸ & ۱ \end{pmatrix},$$

یک مینور غیر بدیهی A با مقدار صفر می‌باشد. اما می‌دانیم که اگر در ماتریس پایین (متناظراً بالا) مثلثی شرط $\alpha_k \geq \beta_k$ (متناظراً $\alpha_k \leq \beta_k$) برای هر k برقرار نباشد، آن‌گاه به وضوح مینور $\det A[\alpha|\beta]$ برابر صفر خواهد شد. همچنین اگر A قطری باشد، آن‌گاه مینورهای غیر بدیهی آن به صورت $\det A[\alpha]$ می‌باشند.

تعریف ۲۱.۱.۱. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ جمعاً نامنفی[۱۰] (جمعاً مثبت[۱۱]) است هرگاه

$$\det A[\alpha|\beta] \geq ۰ (> ۰), \quad \forall\alpha \in Q_{k,n}, \quad \forall\beta \in Q_{k,m}, \quad k = ۱,۲,\dots,\min\{n,m\}$$

و با TP (STP) نشان داده می‌شود.

اگر A یک ماتریس TP (STP) باشد، آن‌گاه A^T و هر زیرماتریسی از A و A^T نیز TP (STP) است. واضح است که اگر A یک ماتریس STP باشد آن‌گاه $\operatorname{rank}(A) = \min\{n,m\}$.

تعریف ۲۲.۱.۱. ماتریس مستطیلی $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$، پایین (بالا) مثلثی نامیده می‌شود هرگاه هر زیرماتریس اصلی پیشرو $k \times k$ از آن، $k = ۱,۲,\dots,\min\{n,m\}$، یک ماتریس پایین (بالا) مثلثی باشد.

مثال ۲۳.۱.۱. ماتریس مستطیلی

$$A = \begin{pmatrix} ۴ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۵ & -۲ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & -۲ & -۳ \\ ۱ & ۳ & ۴ & ۵ \end{pmatrix},$$

پایین مثلثی می‌باشد، زیرا هر زیرماتریس اصلی پیشرو $k \times k$ از آن، $k = ۱,۲,۳,۴$، یک ماتریس پایین مثلثی است.

[۱۰] totally positive
[۱۱] sttictly totally positive

تعریف ۲۴.۱.۱. یک ماتریس مستطیلی پایین (بالا) مثلثی $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$، $\triangle STP$ پایینی (بالایی) نامیده می‌شود، هرگاه همه‌ی مینورهای غیر بدیهی آن مثبت باشند (مینورهای $\det A[\alpha|\beta]$ با $\alpha_k \geq \beta_k$ (متناظراً $\alpha_k \leq \beta_k$)، برای هر k، $۱ \leq k \leq \min\{n,m\}$، مینورهای غیر بدیهی آن هستند). علاوه بر این، اگر $a_{ii} = ۱$، برای $i = ۱,۲,\ldots,\min\{n,m\}$ آن‌گاه A، $\triangle STP$ پایینی (بالایی) واحد نامیده می‌شود [۴].

مثال ۲۵.۱.۱. ماتریس مستطیلی پایین مثلثی

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۴ \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید. به راحتی می‌توان بررسی نمود که همه‌ی مینورهای غیر بدیهی A مثبت‌اند و $a_{ii} = ۱$، برای $i = ۱,۲,۳$. در نتیجه A، $\triangle STP$ پایینی واحد است.

تعریف ۲۶.۱.۱. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ جمعاً نامثبت[۱۲] (جمعاً منفی[۱۳]) است هرگاه

$$\det A[\alpha|\beta] \leq ۰ (< ۰), \quad \forall \alpha \in Q_{k,n}, \quad \forall \beta \in Q_{k,m}, \quad k = ۱,۲,\ldots,\min\{n,m\}$$

و با $t.n.p.$ $(t.n.)$ نشان داده می‌شود.

اگر A یک ماتریس $t.n.p.$ $(t.n.)$ باشد، آن‌گاه A^T و هر زیرماتریسی از A و A^T نیز $t.n.p.$ $(t.n.)$ است.

تعریف ۲۷.۱.۱. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ (اکیداً) علامت منظم[۱۴] از مرتبه‌ی k، $۱ \leq k \leq \min\{n,m\}$، است هرگاه همه‌ی مینورهای مرتبه‌ی pام آن، $p = ۱,۲,\ldots,k$، علامت (اکید) یکسان داشته باشند. به بیانی دیگر یک دنباله علامت $\varepsilon = (\varepsilon_i)$ از اعداد حقیقی با $|\varepsilon_i| = ۱$، $i = ۱,۲,\ldots,k$، $۱ \leq k \leq \min\{n,m\}$، را در نظر بگیرید. اگر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ برای هر $\alpha \in Q_{p,n}$ و $\beta \in Q_{p,m}$، $p = ۱,۲,\ldots,k$، در رابطه‌ی $\varepsilon_p \det A[\alpha|\beta] \; (> ۰) \geq ۰$ صدق کند، آن‌گاه A ماتریسی (اکیداً) علامت منظم از مرتبه‌ی k با علامت‌های $\varepsilon_۱$، ...، ε_k نامیده می‌شود [۷].

مثال ۲۸.۱.۱. ماتریس

[۱۲] totally nonpositive
[۱۳] totally negative
[۱۴] (strictly) sign regular

$$A = \begin{pmatrix} -۱ & -۲ & -۳ & -۳ \\ -۴ & -۵ & -۶ & -۴ \\ -۵ & -۶ & -۶ & -۳ \end{pmatrix},$$

اکیداً علامت منظم از مرتبه‌ی ۲ با علامت‌های $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ می‌باشد. چون برای $\alpha = (۱,۲,۳)$ و $(۲,۳,۴)$ = β، $\det A[\alpha|\beta] > ۰$، و برای $\alpha = (۱,۲,۳)$ و $\beta = (۱,۲,۳)$، $\det A[\alpha|\beta] < ۰$، A، اکیداً علامت منظم از مرتبه‌ی ۳ نیست.

شرط لازم برای (اکیداً) علامت منظم بودن یک ماتریس این است که آن ماتریس (مثبت یا منفی) نامثبت یا نامنفی باشد.

اگر A، TP (STP) باشد آن‌گاه A، (اکیداً) علامت منظم از مرتبه‌ی k، $k = \min\{n,m\}$، با علامت‌های $\varepsilon_i = +1$، $i = ۱,۲,\ldots,k$ است و اگر A، $t.n.p.$ $(t.n.)$ باشد آن‌گاه A، (اکیداً) علامت منظم از مرتبه‌ی k، $k = \min\{n,m\}$، با علامت‌های $\varepsilon_i = -1$، $i = ۱,۲,\ldots,k$ می‌باشد.

اتحاد زیر ارتباط بین مینور حاصل ضرب دو ماتریس را بر حسب حاصل ضرب مینورهای دو ماتریس بیان می‌کند.

اتحاد کوشی-باینت[۱۵]. فرض کنید $\alpha \in Q_{p,n}$، $\beta \in Q_{p,m}$ و $F = GH$، که در آن $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$، $G \in \mathbb{R}^{n\times r}$ و $H \in \mathbb{R}^{r\times m}$ و $p \in \{۱,۲,\ldots,\min\{n,m,r\}\}$. در این صورت رابطه‌ی زیر به اتحاد کوشی-باینت مرسوم است [۱].

$$\det F[\alpha|\beta] = \sum_{w\in Q_{p,r}} \det G[\alpha|w] \det H[w|\beta].$$

مثال ۲۹.۱.۱. فرض کنید $\alpha = (۱,۲)$، $\beta = (۲,۳)$ و $F = GH$، که در آن

$$G = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{pmatrix}.$$

داریم

$$\det(F)[۱,۲|۲,۳] = \sum_{w\in Q_{۲,۳}} \det G[۱,۲|w] \det H[w|۲,۳]$$

$$= \det G[۱,۲|۱,۲] \det H[۱,۲|۲,۳] + \det G[۱,۲|۱,۳] \det H[۱,۳|۲,۳]$$

$$+\det G[۱,۲|۲,۳] \det H[۲,۳ \mid ۲,۳] = -۳ + ۳ + ۱۰ = ۱۰.$$

[۱۵] Cauchy-Binet identity

گزاره‌ی زیر به راحتی از اتحاد کوشی-باینت نتیجه می‌شود.

گزاره ۳۰.۱.۱. *ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ و $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ را در نظر بگیرید. اگر*

۱. *A و B، TP باشند و B، TP باشد آن‌گاه AB علامت منظم از مرتبه‌ی $\min\{n,m,p\}$ با علامت $\varepsilon = (۱,۱,\ldots,۱)$ می‌باشد. علاوه بر این، اگر $m \geq \min\{n,p\}$، آن‌گاه AB، TP است.*

۲. *A ماتریس $(t.n.)$ $t.n.p.$، B ماتریس $t.n.$ و $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$ یک ماتریس STP باشد آن‌گاه AB (اکیداً) علامت منظم از مرتبه‌ی $\min\{n,m,p\}$ با علامت $\varepsilon = (۱,۱,\ldots,۱)$ است و AC (اکیداً) علامت منظم از مرتبه‌ی $\min\{n,m,p\}$ با علامت $\varepsilon = (-۱,-۱,\ldots,-۱)$ می‌باشد. علاوه بر این، اگر $m \geq \min\{n,p\}$، آن‌گاه AB، (STP) TP و AC، $(t.n.)$ $t.n.p.$ است [۷].*

گزاره ۳۱.۱.۱. *ماتریس پایین پلکانی $A \in \mathbb{R}^{n\times r}$ با $\mathrm{rank}(A) = r$ را در نظر بگیرید. در این صورت:*

۱. *A، TP است اگر و فقط اگر*

$$\det A[\alpha|۱,۲,\ldots,k] \geq ۰, \quad \forall \alpha \in Q_{k,n}, \quad k = ۱,۲,\ldots,r.$$

۲. *A، $\triangle STP$ پایینی است اگر و فقط اگر*

$$\det A[\alpha|۱,۲,\ldots,k] > ۰, \qquad \forall \alpha \in Q^{\circ}_{k,n}, \quad k = ۱,۲,\ldots,r.$$

برهان. به [۵] رجوع شود. □

تبصره ۳۲.۱.۱. *اگر L (U) یک ماتریس TP پایین (بالا) مثلثی واحد با اولین ستون (سطر) مثبت باشد، آن‌گاه $\det L[j,i|۱,j] \geq ۰$ $(\det U[۱,j|j,i] \geq ۰)$. بنابراین $l_{ij} > ۰$ $(u_{ji} > ۰)$، برای هر $i > j$. بدین معنی که، L (U) یک ماتریس TP پایین (بالا) مثلثی واحد با درایه‌های زیر (بالای) قطر اصلی مثبت می‌باشد [۲].*

به طریق مشابه، اگر L یک ماتریس TP پایین (بالا) پلکانی واحد با اولین ستون (سطر) مثبت باشد، آن‌گاه همه‌ی درایه‌های غیر بدیهی L (U) مثبتند. درایه‌های غیر بدیهی L، درایه‌های زیر عنصر پیشرو در هر ستون ماتریس L و درایه‌های غیر بدیهی U، درایه‌های سمت راست عنصر پیشرو در هر سطر U می‌باشند [۴].