۴۷۲۹۱

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد فیزیک

گرایش ذرات بنیادی

اثر کازیمیر میدان کلاین – گوردون

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا مطلوب

۱۳۸۹/۳/۱۷

تحویل به کتابخانه مرکزی و مرکز اسناد دانشگاه شهید باهنر کرمان

مولف :

سونیا مبسم

خرداد ۸۸

۱۳۷۳۹۱

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

بخش فیزیک

دانشکده علوم

دانشگاه شهید باهنرکرمان

تسلیم شده است و هیچ گونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: سونیا مبسم

استاد راهنما: دکتر محمدرضا مطلوب

داور ۱: دکتر علی شجاعی

داور ۲: دکتر امید حمیدی

نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر احمد شیخی

۱۳۸۹/۳/۱۷

حق چاپ محفوظ و مخصوص به دانشگاه است.

دانشگاه شهید باهنر کرمان
اداره تحصیلات تکمیلی

تقدیم به

پدر بزرگوارم

و مادر مهربانم

از خانواده عزیزم به ویژه از پدر خوبم و مادر مهربانم صمیمانه سپاسگزارم که در همه حال آموختن را گرامی داشتند و مرا بر آن ترغیب کردند و در این شاهراه با مهر و ایثار بی‌دریغشان همیشه حامیان من بودند.

تقدیر و تشکر

فرصتی بسیار گرانبها است تا قدردانیهای خود را نسبت به استاد بزرگوار و فرهیخته جناب آقای دکتر محمدرضا مطلوب ابراز دارم به سبب درسهایی که از علم ژرف و دانایی وسیع ایشان آموختم از به نظم آوردن اندیشه، دقیق بودن، تلاشهای صبورانه و فروتنی حقیقی تا داشتن ایمان برای به نتیجه رسیدن در پژوهش علمی. همچنین از ایشان بسیار سپاسگزارم که با تدریس بی‌نظیرشان لحظاتی ناب فراهم آوردند تا بتوانم عظمت، سنگینی و جاذبه درس را لمس کنم و ارج نهم.

همچنین وظیفه خود می‌دانم از اساتید محترم آقایان دکتر امید حمیدی و دکتر علی شجاعی که داوری این پایان‌نامه را عهده دار شدند و مرا از نظرات مفیدشان آگاه ساختند تشکر و قدردانی نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه اثر کازیمیر میدان اسکالر جرم‌دار معرفی شده است. برای محاسبه نیروی کازیمیر بین دو صفحه موازی نفوذناپذیر، تانسور انرژی – اندازه حرکت همراه با یک روش تنظیم مناسب بکار گرفته شده است. محاسبات برای ابعاد ۱ – ۳ و ۱ – ۱ صورت گرفته است. به جرم و ابعاد فضا توجه خاصی گردیده است. با رسم نمودار این موارد تشریح شده است.

فهرست

عنوان صفحه

فصل اول: مقدمه‌ای بر اثر کازیمیر ۲

فصل دوم: کوانتش میدان کلاین-گوردون

مقدمه ۱۰

۲-۱) مکانیک کلاسیک ۱۰

۲-۲) مکانیک کوانتومی ۱۲

۲-۳) نوسانگر هماهنگ ساده ۱۵

۲-۴) معادله کلاین-گوردون ۱۶

۲-۵) نظریه میدان کوانتومی ۱۸

۲-۶) میدان کوانتومی کلاین-گوردون ۱۹

۲-۷) کوانتش میدان کلاین-گوردون یک بعدی در فضای تهی ۲۲

۲-۸) نیروی کازیمیر ۲۵

۲-۹) محاسبه تانسور تنش کوانتومی معادله کلاین-گوردون ۲۶

فصل سوم: نیروی کازیمیر دو تیغه در یک بعد

مقدمه ۳۱

۳-۱) کوانتش میدان کلاین-گوردون در نیم فضا (ناحیه I) ۳۳

۳-۲) کوانتش میدان کلاین-گوردون در داخل دو تیغه (ناحیه II) ۳۶

۳-۳) محاسبه نیروی کازیمیر ۳۹

۳-۴) انرژی کازیمیر دو تیغه ۴۷

فصل چهارم: نیروی کازیمیر دو تیغه در سه بعد

مقدمه ۵۴

۴-۱) کوانتش میدان کلاین-گوردون در فضای سه بعدی ۵۵

۴-۲)کوانتش میدان در نیم‌فضای سه بعدی ۵۷

۴-۳) کوانتش میدان در داخل تیغه‌ها در سه بعد (ناحیه II)..... ۵۹

۴-۴) محاسبه نیروی کازیمیر ۶۲

۴-۵)انرژی کازیمیر دو تیغه ۶۷

فصل پنجم: نیروی کازیمیر بین دو تیغه با استفاده از قضیه اتلاف-افت و خیز

مقدمه ۷۰

۵-۱) نیروی میدان خلاء ۷۰

۵-۲-۱) تابع گرین فضای یک بعدی ۷۲

۵-۲-۲) محاسبه نیروی کازیمیر یک بعدی ۷۵

۵-۳-۱) تابع گرین حالت سه بعدی ۷۷

۵-۳-۲) محاسبه نیروی کازیمیر سه بعدی ۸۳

فصل ششم: نتیجه

۶ -۱) خلاصه مطالب ۸۷

۶-۲) نتایج ۸۸

پیوست. الف. تحقیق درستی قضیه اتلاف- افت و خیز ۹۰

مراجع ۹۳

فصل اول

مقدمه‌ای بر اثر کازیمیر

انرژی نقطه صفر یکی از ویژگیهای ذاتی میدان‌های کوانتومی است. از جایگذاری عملگر میدانهای کوانتومی در هامیلتونی انرژی نقطه صفر ظاهر می‌شود. با توجه به اینکه این انرژی بینهایت است برای بدست آوردن عملگر هامیلتونی خوش‌تعریف معمولا به روشهای خاصی مانند نرمال اوردرینگ ویک[۱] متوسل می‌شوند[۱]. برای روشنتر شدن موضوع، این مطلب را بر اساس نوسانگرهای هماهنگ ساده توضیح می‌دهیم و میدان را به مورد خاص میدان الکترومغناطیسی محدود می‌کنیم.

بنابر نظریه مکانیک کوانتومی پایین‌ترین تراز انرژی یک نوسانگر، این نیست که نوسانگر در پایین‌ترن نقطه ساکن شود. زیرا این منجر به موقعیت معین و سرعت معین، یعنی صفر می‌گردد در نتیجه در تناقض با اصل عدم قطعیت هایزنبرگ خواهد بود[۲]. با استفاده از فرمولبندی مکانیک کوانتومی ترازهای انرژی نوسانگر هماهنگ ساده به صورت $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ بدست آمده که در آن $n = 0, 1, \ldots$ و $\hbar$ ثابت پلانک می‌باشد. می‌توان از این رابطه انرژی تراز پایه را بدست آورد که برابر $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ و مخالف صفر می‌شود. این انرژی کمینه به افت و خیزهای نقطه صفر معروف است.

در الکترودینامیک کوانتومی میدان الکترومغناطیسی تک فرکانس از لحاظ ریاضی معادل با یک نوسانگر هماهنگ ساده با همان فرکانس است. میدان الکترومغناطیسی فضای تهی شامل طیف نامتناهی از فرکانسها است. در نتیجه حالت پایه، یا حالت خلاء $|0>$ میدان الکترومغناطیسی فضای تهی، انرژی بی‌نهایت یعنی $E_0 = \frac{\hbar}{2}\sum_{k\lambda}\omega_{k\lambda}$ را خواهد داشت. [۳].

بر اساس نظریه فیزیک جدید جهان با میدانهای کوانتومی توصیف می‌شودکه کوانتای این

[۱] Wick's normal-ordering

میدانها فرمیونها (مانند الکترون و کوارک ...) و بوزنها (مانند فوتون و گلئون ...) می‌باشند. در نتیجه همه این میدانها در حالت خلاء دارای انرژی نقطه صفر بی‌نهایت خواهند بود[۴]. چگونه می‌توان این مسئله را حل کرد، آیا با نرمال اوردرینگ انرژی نقطه صفر را حذف کرد و وجود نوسانات نقطه صفر میدانهای کوانتومی را جدی تلقی نکرد؟

چنین سوالاتی ما را به سمت اثر کازیمیر سوق می‌دهد اثری که انرژی نقطه صفر را آشکار سازی کرد.

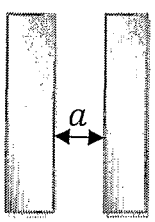
فیزیکدان هلندی بنام هنریک کازیمیر[۱] در ۲۹ می سال ۱۹۴۸ مقاله‌ای تاثیرگذار در زمینه فیزیک ارائه کرد. در این مقاله کازیمیر از دیدگاه نظری اظهار کرده بود که دو صفحه رسانا و خنثی که در فضای تهی جایگزیده شده‌اند، یکدیگر را جذب می‌کنند[۵]. بعدها این نیروی جاذبه به نام نیروی کازیمیر شهرت یافت. در توضیح چگونگی این نیرو می‌توان گفت: این نیرو بوسیله الکترودینامیک کلاسیک قابل توضیح نیست زیرا صفحات رسانا هر دو بدون بار می-باشند. از طرفی این نیرو از نوع نیروی گرانشی نیز نمی‌تواند باشد چون جرم صفحات ناچیز است و اندازه و فاصله آنها در حد ماکروسکوپی است پس جزء نیروهای هسته‌ای ضعیف و قوی نیز نیست. فقط الکترودینامیک کوانتومی قادر به توضیح این اثر است. به این صورت که در شرایط ایده‌آلی که کازیمیر در نظر گرفته بود دو تیغه کاملا رسانا در فاصله بسیار کوچک در حد میکرومتر در دمای صفر $[T=o]$ در فضای تهی به موازات هم قرار دارند (شکل۱-۱). در نتیجه هیچ فوتونی حقیقی بین دو صفحه وجود نخواهد داشت در این صورت فقط خلاء یا حالت پایه الکترودینامیک کوانتومی می‌تواند وجود داشته باشد. حضور تیغه‌های رسانا

[۱] Hendrik casimir

خلاء را دستخوش تغییر می‌کند[۶]. به عبارتی انرژی نقطه صفر میدان الکترومغناطیسی در حضور سطوح مرزی نسبت به انرژی نقطه صفر فضای تهی تغییر می‌کند. از همین نقطه است که مفهوم انرژی کازیمیر پدید می‌آید. به این شکل که تفاوت انرژی نقطه صفر در حضور و غیاب تیغه‌ها انرژی کازیمیر را بدست می‌دهد و بدنبال آن مفهوم نیروی کازیمیر با مشتق‌گیری از انرژی کازیمیر بیان می‌شود. البته به دلیل ایده آل بودن شرایط مرزی یکی از روشهای تنظیم[۱] بکار گرفته شد تا مقداری متناهی برای نیروی کازیمیر بدست آید. بطور کلی می‌توان گفت نیروی کازیمیر پاسخ خلاء در مقابل حضور قیدهای خارجی است در صورتی .که این قیدها فضای نامتقارنی را ایجاد کرده باشند [۷].

کازیمیر، نیرویی که برای دو صفحه کاملا رسانا در فضای سه بعدی محاسبه کرده بود بصورت زیر ارائه کرد

$$F_c = \frac{\hbar c \pi^2}{240 a^4} \qquad (1-1)$$



شکل ۱- ۱.

[۱] regularization

که در آن a فاصله میان دو صفحه است. همچنین وجود $\hbar$ در این رابطه کاملاً غیر کلاسیک بودن این نیرو را نشان می دهد و در حد کلاسیک این نیرو صفر می شود[۸]. ده سال بعد سپارنی[۱] پیشگویی کازیمیر مبنی بر وجود نیروی کازیمیر برای دو صفحه رسانای موازی را به طور تجربی تأیید کرد[۹] و برای صفحات به مساحت ۱ cm^2 و به فاصله $a = ۰/۵\mu m$ نیروی جاذبه ای به مقدار $۰/۲ \times ۱۰^{-۵}N$ بدست آورد که بسیار نزدیک به نتیجه کازیمیر بود[۱۰].

تقریبا بعد از سه دهه مقاله کازیمیر بسیار مورد توجه قرار گرفت و شاخه تحقیقاتی جدیدی ایجاد کرد که هدف آن جواب دادن به سوالاتی عمیق در مورد ساختار خلاء نظریه میدانهای کوانتومی شد[۱۱]. بنابراین اثر کازیمیر تنها مختص خلاء الکترودینامیک کوانتومی نیست. می‌توان نشان داد که هر میدان نسبیتی که تحت تأثیر شرایط مرزی قرار گرفته باشد دارای انرژی نقطه صفر مدوله شده است.

در این پایان‌نامه ما اثر کازیمیر میدان کلاین- گوردون را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور میدان کلاین-گوردونی را در نظر می‌گیریم که شرط دیریشله[۲] بوسیله دو تیغه موازی روی آن اعمال می‌شود. کوانتاهای این میدان ذرات بوزنی جرمدار اسپین صفراند و همچنین شرط بدون بار بودن را برای این ذرات لحاظ خواهیم کرد.

در این پایان‌نامه چند هدف دنبال می‌شود. اولین هدف بررسی اثر چند پارامتر بر نیروی کازیمیر می‌باشد:

[۱] Sparnaay
[۲] Dirrichlet

- تغییرات نیروی کازیمیر نسبت به جرم و مفهوم فیزیکی آن
- تاثیر تعداد ابعاد فضا بر نیروی کازیمیر

که با رسم نمودار این تغییرات بررسی می‌شود.

هدف دوم انتخاب روش محاسباتی مناسبتر و جدیدتر برای نیروی کازیمیر می‌باشدکه مفهوم این نیرو را بخوبی دربر داشته باشد. نیروی کازیمیر را به دو روش می‌توان محاسبه کرد:

- روش کلی[۱]: انرژی نقطه صفر(روش کازیمیر)
- روش موضعی[۲]: تانسور انرژی-اندازه حرکت

روش دوم، روش جدیدی است و برتریهایی بر روش اول دارد. اولاً، بدین وسیله نیروی کازیمیر مستقیماً محاسبه می‌شود و همچنین این نوع محاسبه تصویری واضحتر و قابل تجسمتر از اثر کازیمیر ارائه می دهد. به این صورت که کمیت یاد شده در فضای موجود یکنواخت نیست و تفاوت دراین کمیت برای داخل و خارج تیغه‌ها به خوبی نمایان است که این نیز از تفاوت مدهای میدان خارج و داخل تیغه‌ها نشئت می گیرد. به عبارتی به دلیل وجود شرایط مرزی، ساختار افت و خیزی میدان کلاین-گوردون خلاء در فاصله میان تیغه‌ها با مناطق دیگر متفاوت می‌باشد. این تفاوت، کاهش فشار بر تیغه‌ها را دربر دارد و سبب ربایش تیغه‌ها به سمت یکدیگر می شود[۱۲]. به طور کلی می توان گفت روشهای موضعی همیشه اطلاعات بیشتری در مورد سیستم نسبت به روشهای کلی دارند[۱۳]. به خاطر دلایل مطرح شده، در این پایان‌نامه تانسور انرژی- اندازه حرکت را اساس محاسبه نیروی کازیمیر قرار می‌دهیم. بهمین جهت باید در ابتدا تانسور انرژی- اندازه حرکت میدان کلاین گوردون را محاسبه کنیم.

[۱] Global method
[۲] Local method

در فرایند محاسبه نیروی کازیمیر نیازمند محاسبه تابع همبستگی میدان در هندسه مورد نظر هستیم. روش مستقیم برای محاسبه این عبارت، کوانتیزه کردن میدان است. با علم بر کارهایی که تا اکنون در زمینه نیروی کازیمیر انجام شده کوانتش میدان در هندسه‌های پیچیده دشوار و طولانی است. بنابراین یکی از هدفهای مهم این پایان‌نامه استفاده از روشی است که ما را از کوانتش میدان در محاسبه نیروی کازیمیر بی‌نیاز سازد. چنین روشی قضیه اتلاف_افت و خیز می‌باشدکه قبلا در محاسبه نیروی کازیمیر بین دو تیغه کاملا رسانا در سه بعد[۷] و دی‌الکتریک در یک بعد[۶] بکارگرفته شده برای اینکه نشان دهیم این روش برای همه میدانها قابل استفاده است قضیه اتلاف _افت و خیز میدان کلاین-گوردون را در محاسبه نیروی کازیمیر میدان کلاین-گوردون بکار می‌گیریم. دومین مزیت این است که این قضیه در همه ابعاد و اشکال هندسی فرمولبندی یکسانی دارد. در نتیجه ممکن است این روش برای محاسبه نیروی کازیمیر در فضا-زمان بالاتر از چهار بعد بسیار کارآمد باشد. آخرین مورد اینکه نیروی کازیمیر نتیجه مستقیم افت و خیز میدان کلاین-گوردون خلاء است که کاربرد قضیه اتلاف- افت و خیز، همبستگی نیروی کازیمیر با افت و خیز میدان کلاین-گوردون را بوضوح نمایان می کند.

در توضیح ساختار کلی این پایان نامه می‌توان گفت: این پایان نامه به دو قسمت عمده تقسیم می‌شود. به این شکل که نیروی کازیمیر میدان کلاین-گوردون خلاء براساس تانسور انرژی-اندازه حرکت برای دو تیغه در یک و سه بعد با دو روش محاسبه می‌شود. در فصلهای سوم و چهارم با روش کوانتش و در فصل پنجم با روش قضیه اتلاف- افت و خیز این محاسبه انجام می‌شود.

بطور خلاصه در مورد فصلبندی این پایان‌نامه می‌توان گفت:

در فصل دو، ابتدا مفاهیم پایه‌ای از مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی و نظریه میدان کوانتومی آورده شده و میدان کلاین- گوردون نیز معرفی می‌شود. سپس نحوه کوانتش میدان- کلاین گوردون توضیح داده شده و با استفاده از کوانتش میدان در فضای تهی، شکل کلی میدان کوانتیده بدست می‌آید. با استفاده از میدان کوانتیده فضای تهی، انرژی نقطه صفر محاسبه می‌شود و روش کازیمیر برای محاسبه انرژی کازیمیر بیان می‌شود. در نهایت ابزار لازم برای محاسبه مستقیم نیروی کازیمیر یعنی تانسور انرژی- اندازه حرکت میدان کلاین- گوردون بدست آورده می‌شود.

در فصل سوم با استفاده از روش کوانتش، نیروی کازیمیر در یک بعد محاسبه می‌شود. برای این منظور میدانهای داخل تیغه‌ها و بیرون تیغه‌ها را با استفاده از شکل کلی میدان کوانتیده، کوانتیده می‌شود. سپس نیروی کازیمیر بدست آمده بوسیله تانسور انرژی- اندازه حرکت با جوابی که از روش کازیمیر حاصل شده مقایسه می‌شود. در نهایت نمودار نیروی کازیمیر و همچنین انرژی کازیمیر را بر حسب جرم رسم شده سپس مفهوم فیزیکی این نمودارها بررسی خواهد شد.

در فصل چهارم تمام محاسبات انجام شده در یک بعد برای سه بعد انجام می‌شود .

در فصل پنجم ابتدا قضیه اتلاف- افت و خیز معرفی می‌شود و سپس نحوه محاسبه نیروی میدان خلاء بوسیله این قضیه توضیح داده شده است. در اولین بخش این فصل ابتدا تابع گرین در داخل تیغه‌ها و بیرون محاسبه شده و بوسیله تابع گرین نیروی کازیمیر وارد بر تیغه در یک بعد محاسبه می‌شود. در بخش دوم این روش محاسباتی برای سه بعد اعمال می‌شود و نیروی کازیمیر وارد بر تیغه در سه بعد بدست می‌آید.

فصل دوم

کوانتش میدان کلاین-گوردون

مقدمه

در این فصل قصد داریم چگونگی کوانتش میدان کلاین-گوردون در فضای تهی یک بعدی را بیان کنیم. برای این منظور، ابتدا مروری بر مفاهیم پایه از مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی خواهیم داشت. به دلیل ارتباط نزدیک بین نوسانگر هارمونیک ساده و میدان کوانتومی، مروری کوتاه نیز بر مسئله نوسانگر هارمونیک ساده در مکانیک کوانتومی می‌کنیم. سپس معادله کلاین-گوردون در مکانیک کوانتومی نسبیتی معرفی می‌شود. با استفاده از این مفاهیم به کوانتش میدان کلاین-گوردون در فضای تهی در یک بعد به روش بسط بر حسب ویژه توابع خواهیم پرداخت. آنگاه انرژی مربوط به این میدان محاسبه خواهد شد. این انرژی به انرژی نقطه صفر معروف است و مقداری واگرا دارد. یکی از آثار این انرژی نامتناهی، نیروی کازیمیر است. ما در اینجا نیروی کازیمیر را با استفاده از تانسور انرژی-اندازه حرکت کوانتومی میدان کلاین-گوردون بدست خواهیم آورد.

۲ - ۱ مکانیک کلاسیک

برای مطالعه مکانیک کلاسیک ذرات نقطه‌ای، یک ذره بدون ساختار با جرم m را در نظر می‌گیریم. این ذره در یک بعد تحت پتانسیل مستقل از زمان $V(q)$ حرکت می‌کند. تغییرات زمانی مسیر $q(t)$ با معادله حرکت نیوتن داده می‌شود:

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q} \qquad (۱-۲)$$

این معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه $q(t_o)$ و $\dot{q}(t_o)$ قابل حل است. توصیف بهتر سیستم به وسیله تابع لاگرانژی بیان می‌شود:

$$L(q,\dot{q}) = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) \qquad (2-2)$$

می‌توان مسیر $q(t)$ را با حل معادله اویلر-لاگرانژ بدست آورد:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = o \qquad (2-3)$$

با جایگذاری تابع لاگرانژی در معادله اویلر-لاگرانژ معادله حرکت نیوتن حاصل می‌شود.

اندازه حرکت مزدوج کانونیک می‌تواند به عنوان یک متغیر مستقل به جای سرعت بکار رود که از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \qquad (2-4)$$

در فرمولبندی هامیلتونی جفت متغیرهای (q,p) را بجای $(q,\dot{q})$ در نظر می‌گیرند. بنابراین با استفاده از این متغیرها می‌توان هامیلتونی را به شکل فشرده زیر نوشت:

$$H(q,p) = p\dot{q}(t) - L\big(q,\dot{q}(p)\big) \qquad (2-5)$$

در این فرمولبندی حرکت ذره با جرم m را، با دو معادله جفت شده مرتبه اول توصیف می‌کنند:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad (2-6)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad (2-7)$$

معادلات هامیلتون نیز با معادله حرکت نیوتن هم‌ارز است.

فرمولبندیهای لاگرانژ و هامیلتون توصیفی ساده‌تر و زیباتر از سیستم را ارائه می‌دهند.