بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی

گرایش آنالیز عددی

روش موجک گالرکین برای حل معادلات دیفرانسیل

استاد راهنما :

دکتر علی داوری

پژوهشگر:

مینا ترابی

آبان ماه ۱۳۹۱

کلیه‌ی حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی خانم مینا ترابی

تحت عنوان:

روش موجک گالرکین برای حل معادلات دیفرانسیل

در تاریخ ۹۱/۸/۲۹ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......عالی...... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی داوری	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر کیوان مهاجر	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر سعید وحدتی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

تقدیم به

بهترین همراهان زندگیم،

پدر و مادرم

دو عزیزی که فرصت اندیشیدن، رستن و اعتلا را به من عطا نمودند

و پیشکش می نمایم به

خواهر مهربانم

که ضرب آهنگ قدم هایش بذر آرامش را روی چشم های خسته اما تشنه علم من پاشید.

الهی!

هیچگاه تنهایشان مگذار و اجازه بده نامت در چار دیواری بی هم نفسی شان تا همیشه منتشر شود.

سپاس‌گزاری...

خدایا هر کس از تو نوشت واژه کم آورد، فکر کم آورد، دل، ولی تپید و تپید و ادعا کرد حتی اگر از نفس هم بیافتد کم نمی‌آورد، دل راست می‌گفت که انسان قله‌ای دارد به نام تنهایی که در آن به تماشای غروب تمام وابستگی‌هایش می‌نشیند و سپس حس می‌کند تنها تو در کنار او می‌مانی. اینک من دست‌های التماسم را به سویت دراز می‌کنم و فریاد میزنم که با یاری، توکل، امید و عشق به تو توانستم در مسیری قدم بگذارم که حتی ثانیه هایش هم با رایحه خوش علم و دانش آمیخته شد.

در ابتدا از اولین و بزرگ‌ترین معلمان زندگیم، پدر و مادر بزرگوارم که در رویش نهال دانشم صبوری کردند و روح اندیشیدن را در من بیدار کردند، از صمیم قلب تشکر می‌کنم.

بر خود لازم می‌دانم به پاس زحمات استاد راهنمای گرامی‌ام، جناب آقای دکتر داوری که با سعه‌ی صدر و دقت نظرشان باعث هرچه پربار شدن این پایان‌نامه شدند، نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم.

هم‌چنین از استاد گرامی، جناب آقای دکتر چراغی که با نظرات و رهنمودهای ارزشمند خود مرا یاری نمودند، سپاس‌گزارم.

در پایان از سایر دوستان و بزرگوارانی که در به ثمر رسیدن این پایان‌نامه مرا یاری کردند تشکر می‌کنم و آرزوی سلامتی و بهروزی برای همگان دارم.

چکیده

موجک یکی از دستاوردهای جدید در ریاضیات است و کاربردهای فراوانی در حوزه‌های مختلف علمی دارد. در این پایان نامه، ابتدا به طور مختصر به آنالیز فوریه و عدم توانایی آن در نمایش رفتارهای موضعی توابع اشاره شده است. در ادامه آنالیز چند ریزه ساز تعریف شده و به کمک آن خانواده‌ی خاصی از توابع موجک به نام موجک دوبشی معرفی می‌شوند. پس از معرفی موجک دوبشی روند کلی حل یک معادله دیفرانسیل با استفاده از روش گالرکین مطرح می‌شود. از آنجایی که موجک دوبشی نمایش صریح ندارد جهت بدست آوردن مشتقات و انتگرال انتقال‌ها و اتساع‌های این تابع چگونگی محاسبه ضرایب اتصال بیان می‌شود. در پایان با استفاده از روش موجک گالرکین معادلات دیفرانسیل هلم‌هلتز، گرما و برگرز در یک بعد و معادله گرما در دو بعد حل می‌شود و کارایی آن با روش تفاضلات متناهی مقایسه می‌شود.

واژگان کلیدی: موجک دوبشی، معادلات دیفرانسیل، روش گالرکین، ضرایب اتصال، ماتریس مشتق‌گیری

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فهرست نمادها

ضرب داخلی .... $<.,.>$

فضای توابع انتگرال پذیر مربعی در بازه‌ی $[a,b]$ .... $L^2([a,b])$

فضای توابع اساساً کراندار در بازه‌ی $[a,b]$ .... $L_\infty([a,b])$

فضای سوبولف مرتبه m در ناحیه‌ی Ω .... $H^m(\Omega)$

نرم در فضای سوبولف مرتبه m .... $\|.\|_m$

شبه نرم در فضای سوبولف مرتبه m .... $|.|_m$

محمل تابع مقیاس ϕ .... $supp(\phi)$

p امین گشتاور $\phi(x-k)$ .... M_k^p

تصویر متعامد f فضای بر V_j .... $P_{V_j}f$

تابع مقیاس متناوب .... $\tilde{\phi}$

ضرایب اتصال n جمله‌ای .... $\Gamma_{j,l_1,l_2,\cdots,l_n}^{d_1,d_2,\cdots,d_n}$

عملگر پیمانه (n همنهشت است با p) .... $<n>_p$

بزرگترین عد صحیح کمتر از x .... $\lfloor x \rfloor$

پیش‌گفتار

بدست آوردن شکل دقیق جواب برای معادلات دیفرانسیل گوناگون همیشه امکان پذیر نیست و باید از روش‌های عددی برای حل این مسائل استفاده کرد. روش‌های عددی که معمولاً برای حل این مسائل به کار می‌روند به دو دسته تقسیم می‌شوند. دسته اول روش‌های موضعی هستند مانند روش تفاضلات متناهی و دسته دوم روش‌های سرتاسری هستند مانند روش‌های طیفی. در هر کدام از این روش‌ها، یک مجوعه توابع با نام توابع پایه‌ای استفاده می‌شود؛ با این تفاوت که در روش‌های موضعی توابع پایه موضعی‌اند یعنی در هر زیر دامنه متفاوت‌اند، ولی در روش‌های طیفی توابع پایه‌ای به صورت فراگیر در کل دامنه تعریف، تابع جواب را تقریب می‌زنند. وقتی‌که جواب مسائل مورد بحث متناوب باشد شناخته شده ترین روش طیفی، استفاده از بسط توابع متناوب به صورت سری فوریه است. در فصل اول این پایان‌نامه علاوه بر ذکر مقدماتی از آنالیز حقیقی، سری فوریه و تبدیل فوریه معرفی شده است و با ذکر یک مثال ناتوانی سری فوریه در نمایش رفتارهای موضعی توابع بررسی شده است.

در سال ۱۹۳۰ ، ریاضیدانان به قصد تحلیل ساختار های تکین موضعی، به فکر اصلاح پایه‌های فوریه افتادند. برخلاف چندجمله‌ایهای مثلثاتی، موجک‌ها در فضا به صورت موضعی بررسی می‌شوند و به این ترتیب ارتباط نزدیک‌تری بین بعضی توابع و ضرایب آن‌ها امکان‌پذیر می‌شود. در حدود سال ۱۹۸۸ ، اینگرید دوبشی از ایده آنالیز چند ریزه ساز استفاده کرد تا بتواند یک خانواده از موجک‌ها را بنیان گذاری کند. این موجک‌ها که به نام موجک‌های دوبشی نامگذاری شده‌اند

خواص مطلوبی را برآورده می‌سازند. آن‌ها دارای محمل فشرده و خواص متعامد بودن و پیوستگی هستند. علاوه بر این بافزایش مرتبه موجک دوبشی این دسته توابع هموارتر می‌شوند. موجک‌های دوبشی به جز موجک دوبشی مرتبه اول که همان موجک هار است نمایش صریح ندارند ولی با استفاده از روش‌های ضمنی قابل تقریب هستند. در فصل دوم مفاهیم بنیادی از نظریه موجک بیان شده است؛ به طور خاص‌تر خواص تابع مقیاس و موجک دوبشی در نظر گرفته شده است و با ارائه یک الگوریتم، مقادیر تابع مقیاس و موجک دوبشی در مجموعه نقاط دودویی بدست می‌آید. علاوه بر این موجک‌های متناوب که در حل مسائلی با دامنه‌ی متناهی و موجک‌های دو بعدی که در حل معادلات دیفرانسیل دو بعدی به کار می‌روند معرفی می‌شوند.

در روش‌های طیفی معمولاً از روش‌های پایه‌ای گالرکین و هم محلی استفاده می‌شود. روش گالرکین یک ساختار کلی برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیل است که بر پایه حساب تغییرات بنا شده است. در این روش جواب معادله‌ی دیفرانسیل مورد بحث، توسط یک دسته توابع پایه‌ای تقریب زده شده و سپس معادله‌ی مذکور در یک تابع آزمونی که از جنس توابع پایه‌ای است ضرب داخلی می‌شود. فصل سوم به بیان روند سه گامی فرول‌سازی تغییراتی و روش گالرکین اختصاص یافته است. علاوه بر این چون موجک‌های دوبشی نمایش صریح ندارند به روشی نیاز است که قادر باشد انتگرال حاصلضرب تابع مقیاس دوبشی و مشتقاتش را محاسبه کند. به این منظور ضرایب اتصال، که رابطه‌ی بین بسط تابع مقیاس دوبشی و مشتقاتش است تعریف شده و بنابر نیاز این پایان نامه ضرایب اتصال دو جمله‌ای و ضرایب اتصال سه جمله‌ای با ارایه یک روش عددی محاسبه می‌شوند. استفاده از توابع موجک به عنوان پایه‌های روش گالرکین روش موجک گالرکین را بنا می‌کند. مطالعات اولیه در این زمینه در سال ۱۹۹۰، توسط گلوینسکی انجام شد. وی از پایه‌های مقیاس دوبشی برای حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی بیضوی، سهموی و هذلولوی در یک بعد و معادلات بیضوی در دو بعد استفاده کرد. در روش موجک گالرکین پایه‌های روش گالرکین، پایه‌های متعامد مربوط به موجک‌هایی با محمل فشرده هستند. این پایه‌ها به طرق مختلفی ساخته می‌شوند. در نهایت در فصل چهارم روش موجک گالرکین، با به کار بردن پایه‌های تولید شده توسط

توابع مقیاس دوبشی به به عنوان پایه‌های روش گالرکین مطرح می‌گردد و با استفاده از این روش معادلات دیفرانسیل هلم‌هلتز، گرما و برگرز در یک بعد و معادله گرما در دو بعد حل می‌شود و کارایی آن با روش تفاضلات متناهی مقایسه می‌شود.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی آورده می‌شوند. مطالب ذکر شده در این فصل در مباحث بعدی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. مراجع استفاده شده برای این فصل [۹، ۳] می‌باشند.

۱.۱ مقدماتی از آنالیز حقیقی

۱.۱.۱ فضای ضرب داخلی

تعریف ۱.۱.۱. *اگر $\mathbb{X}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد، یک ضرب داخلی روی $\mathbb{X}$ نگاشتی است چون $<.\,,.>: \mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{C}$ به طوری که:*

۱. $< ax+by\,,z >= a< x\,,z > +b< y\,,z >,\quad \forall x,y\in\mathbb{X}$ و $a,b\in\mathbb{C}$

۲. $< x\,,y >= \overline{< y\,,x >},\quad \forall x,y\in\mathbb{X}$

۳. $< x\,,x >\geq 0,\quad \forall x\in\mathbb{X}$

۴. $< x\,,x >= 0 \Leftrightarrow x=0,\quad \forall x\in\mathbb{X}$

تذکر ۲.۱.۱. *تابع $f:\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{C}$ یک تابع دو خطی[۱] است اگر در خواص ۱ و ۲ تعریف (۱.۱.۱) صدق کند.*

تعریف ۳.۱.۱. *فضای برداری $\mathbb{X}$ همراه با یک ضرب داخلی، فضای ضرب داخلی نام دارد و با $(\mathbb{X},<.,.>)$ نمایش داده می‌شود.*

تعریف ۴.۱.۱. *زیرمجموعه E از $\mathbb{X}$ وابسته خطی نامیده می‌شود هرگاه اسکالرهای $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ در میدان $\mathbb{C}$ که همگی صفر نیستند و بردارهای متمایز $x_1,x_2,\cdots,x_n$ در $\mathbb{E}$ یافت شوند به طوری‌که*

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0$$

هر مجموعه که وابسته خطی نباشد مستقل خطی است.

تعریف ۵.۱.۱. *زیر مجموعه مستقل خطی از بردارهای $\mathbb{X}$ که فضای $\mathbb{X}$ را پدید می‌آورد یک پایه برای $\mathbb{X}$ است.*

مثال ۶.۱.۱. *فرض کنید l_2 فضای برداری شامل تمام دنباله‌های $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)$ باشد به طوری‌که*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty,$$

در این صورت تابع $<x,y>_{l_2}$ که به صورت

$$<x,y>_{l_2}=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y}_n$$

تعریف می‌شود یک ضرب داخلی روی این فضا تعریف می‌کند و در نتیجه تحت این تعریف l_2 یک فضای ضرب داخلی است [۳].

مثال ۷.۱.۱. *تابع $f\in L^2([a,b])$ انتگرال‌پذیر مربعی است اگر و تنها اگر*

$$\int_a^b|f(x)|^2dx<\infty$$

---

[۱] Bilinear

اگر $V = L^2([a\,,b])$ فضای تمام توابع انتگرال پذیر مربعی روی بازه $[a\,,b]$ باشد، آنگاه تابع $\mathbb{C} \to V \times V :_{L^2}< .\,. >$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک ضرب داخلی روی این فضا تعریف می‌کند

$$< f\,,g >_{L^2}= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx,$$

و در نتیجه تحت این تعریف $L^2([a\,,b])$ یک فضای ضرب داخلی است **[۳]**.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید $\mathbb{X}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. تابع $p : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ یک شبه نرم[۲] نامیده می‌شود، اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. $p(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{X}$

۲. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \quad \forall x \in \mathbb{X}, \alpha \in \mathbb{C}$

۳. $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{X}$

تعریف ۹.۱.۱. تابع $\|.\| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ روی فضای برداری $\mathbb{X}$ یک نرم نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y \in \mathbb{X}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ خواص زیر را داشته باشد:

۱. $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{X}$

۲. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X}, \alpha \in \mathbb{R}$

۳. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{X}$

تذکر ۱۰.۱.۱. اگر $(\mathbb{X}, < .\,,. >)$ یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه به ازای هر $x \in \mathbb{X}$ تابع $\|.\| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ با ضابطه $\|x\| = \sqrt{< x\,,x >}$ یک نرم روی $\mathbb{X}$ تعریف می کند. این نرم را نرم القاء شده توسط ضرب داخلی $< .\,,. >$ می‌نامند.

[۲] Seminorm

تعریف ۱۱.۱.۱. عدد حقیقی M را یک کران اساسی [۳] تابع f گویند هرگاه:

$$|f(x)| \leq M, \quad (\text{تقریباً همه جا})$$

و تابع f را اساساً کراندار گویند هرگاه دارای یک کران اساسی باشد.

مثال ۱۲.۱.۱. فضای برداری $L_\infty([a\,,b])$ متشکل از توابع اساساً کراندار در بازه‌ی $[a\,,b]$ را در نظر بگیرید، این فضا تحت نرم بی‌نهایت که به صورت

$$\|f\|_\infty = \sup\{M : |f(x)| \leq M, \quad (\text{تقریباً همه جا}) \quad x \in [a\,,b]\}$$

تعریف می‌شود یک فضای نرمدار است [۳].

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید V یک فضای نرمدار باشد، فضای V را یک فضای باناخ گوییم، هرگاه فضای V همراه با این نرم یک فضای تام باشد، یعنی هر دنباله کوشی در این فضا همگرا باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید H یک فضای ضرب داخلی باشد، فضای H را یک فضای هیلبرت گوییم هرگاه فضای H تحت این ضرب داخلی یک فضای تام باشد، به عبارتی دیگر هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است که نرم آن توسط یک ضرب داخلی تعریف شده است.

مثال ۱۵.۱.۱. فضای برداری $L^2([a\,,b])$ را همراه با ضرب داخلی $<.\,,.>_{L^2}$ روی آن در نظر بگیرید. این ضرب داخلی یک نرم به صورت زیر روی این فضا تعریف می‌کند:

$$\|f\|_{L^2} = \int_a^b |f(x)|^2 dx,$$

این نرم القاء شده توسط ضرب داخلی را نرم L^2 نیز گویند و فضای $L^2([a\,,b])$ تحت این نرم یک فضای هیلبرت است [۳].

[۳] Essential bound