دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض ، گرایش جبر

عنوان

مدول‌هایی که در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های با تعداد کران‌دار مولد صدق می‌کنند.

استاد راهنما

دکتر نسرین شیر علی

استاد مشاور

دکتر سید جمال هاشمی‌زاده دزفولی

پژوهشگر

فاطمه شکوهی فر

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: شکوهی‌فر نام: فاطمه

عنوان: مدول‌هایی که در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های با تعداد کران‌دار مولد صدق می‌کنند.

استاد راهنما: دکتر نسرین شیر علی
استاد مشاور: دکتر سید جمال هاشمی‌زاده دزفولی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: شهید چمران اهواز دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۰۴

واژگان کلیدی: شرایط زنجیری، دومدول، مدول نوتری، حاصل‌ضرب مستقیم، کاملاً کران‌دار شده، مدول تکین، nـ موروثی.

چکیده

در این پایان نامه نشان داده شده است که اگر R یک حلقه با بعد گلدی راست متناهی و n یک عدد صحیح مثبت و $M = \prod_{i\in I} M_i$ یک حاصل‌ضرب مستقیم از Rـ مدول‌های راستِ nـ موروثی باشد، آن‌گاه M در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های nـ مولد صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای هر $i \in I$، M_i در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های nـ مولد صدق کند. هم‌چنین ثابت می‌شود که اگر R یک حلقه‌ی گلدی راست باشد که در شرط زنجیر نزولی روی پوچ‌سازهای راست صدق کند و n یک عدد صحیح مثبت باشد به طوری که هر Rـ مدول راست آزاد متناهیاً تولید شده در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های nـ مولد صدق کند، آن‌گاه هر Rـ مدول راست آزاد نیز در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های nـ مولد صدق می‌کند. در آخر نشان داده می‌شود که اگر R یک حلقه‌ی نوتری راست و چپ باشد، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n، Rـ مدول راست R^I در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های nـ مولد صدق می‌کند.

دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض ، گرایش جبر

عنوان

مدول‌هایی که در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های با تعداد کران‌دار مولد صدق می‌کنند.

استاد راهنما

دکتر نسرین شیر علی

استاد مشاور

دکتر سید جمال هاشمی‌زاده دزفولی

پژوهشگر

فاطمه شکوهی فر

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: شکوهی‌فر   نام: فاطمه

عنوان: مدول‌هایی که در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های با تعداد کران‌دار مولد صدق می‌کنند.

استاد راهنما: دکتر نسرین شیر علی

استاد مشاور: دکتر سید جمال هاشمی‌زاده دزفولی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: جبر

دانشگاه: شهید چمران اهواز   دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲   تعداد صفحات: ۱۰۴

واژگان کلیدی: شرایط زنجیری، دومدول، مدول نوتری، حاصل‌ضرب مستقیم، کاملاً کران‌دار شده، مدول تکین، nـ موروثی.

چکیده

در این پایان نامه نشان داده شده است که اگر R یک حلقه با بعد گلدی راست متناهی و n یک عدد صحیح مثبت و $M = \prod_{i\in I} M_i$ یک حاصل‌ضرب مستقیم از Rـ مدول‌های راستِ nـ موروثی باشد، آنگاه M در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های nـ مولد صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای هر $i \in I$، M_i در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های nـ مولد صدق کند. هم‌چنین ثابت می‌شود که اگر R یک حلقه‌ی گلدی راست باشد که در شرط زنجیر نزولی روی پوچ‌سازهای راست صدق کند و n یک عدد صحیح مثبت باشد به طوری که هر Rـ مدول راست آزاد متناهیاً تولید شده در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های nـ مولد صدق کند، آن‌گاه هر Rـ مدول راست آزاد نیز در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های nـ مولد صدق می‌کند. در آخر نشان داده می‌شود که اگر R یک حلقه‌ی نوتری راست و چپ باشد، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n، Rـ مدول راست R^I در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های nـ مولد صدق می‌کند.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و

حسین و سمیه مهربانم

خدایا... [1]

ای آن که هر که رو به سوی تو کند، چشم به او می دوزی و هر که دلش هوای تو کند، دل می بندی و به سری که سودای تو داشته باشد، سر می کشی. ای آن که بر سر زندگانت دست محبت می کشی و بر چشم مردگانت، سرمه ی حیات و ملاطفت.

ای آن که به عاشقانت، دل مجالست می بخشی و به غافلانت، پای مراقبت و به گریزندگانت، روی مراجعت.

خدایا! مرا پایی ده که فقط به در خانه تو توانم آمد و دستی که فقط سحوری در خانه تو توانم کوفت.

خدایا! مرا چشمی ده که فقط گریان تو باشد و سینه ای که فقط سوزان تو.

خدایا! به من نگاهی ده که جز روی تو نتواند دید و گوشی که جز صدای تو نتواند شنید.

خدایا! مباد که چشمه ی محبت من به برکه های گل آلود دیگران بریزد.

خدایا! مباد که دل من، اسیر جز تو شود و پیشانی قلبم بر خاک محبت دیگری بساید.

خدایا! مباد که عندلیب دلم، غزل خوان بستانی دیگر گردد.

خدایا! مرغ دلم در دام توست، مباد که یاد آشیان کند.

تو که مرا به خانه راه داده ای، به صندق خانه ببر و از حقایق ناگفته و درهای ناسفته گوهری به من بنمایان.

[1] مناجاتی از امام سجاد علیه‌السلام.

سپاس گزاری...

به حرمت "من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق" بر خود فرض می‌دانم مراتب سپاس و حق شناسی را

از استاد بزرگوارم، سرکار خانم دکتر شیرعلی، به پاس زحمات، حسن خلق و سعه ی صدر شان

از استاد گرانقدر، آقای دکتر هاشمی، به پاس همراهی‌ها و زحمات بی دریغش و

اساتید محترم، آقای دکتر کوچک پور و آقای دکتر بدیع الزمان و آقای دکتر آذرنگ که افتخار شاگردی شان را داشته ام

از پدر و مادر عزیزم به پاس رنج‌ها، صبوری‌ها و به حرمت مقام آسمانی شان

از خاله مهربان و همیشه همراهم، فریده، به پاس محبت‌ها و حمایت‌های بی دریغش

تقدیم دارم.

فاطمه شکوهی فر

۱۳۹۲

فهرست مطالب

پیشگفتار

مبنای کار این پایان‌نامه مقاله‌ای تحت عنوان " مدول‌هایی که در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های با تعداد کران‌دار مولد صدق می‌کنند" که توسط اِسمیت [۲] در سال ۲۰۰۷ ارایه شده است.

برای یک عدد صحیح مثبت n، Rـ مدول راست M، $n - acc$ می‌نامیم، هرگاه در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های nـ مولدش صدق کند. به علاوه Rـ مدول راست M، $pan - acc$ است، هرگاه برای هر عدد صحیح مثبت n، $n - acc$ باشد. رینالت [۳] در [۱۶] ثابت کرد که اگر R یک حلقه‌ی نوتری راست و چپ باشد، آن‌گاه هر Rـ مدول راست آزاد، $pan - acc$ است. او هم‌چنین یک مثال از یک حلقه‌ی نوتری راست آورد که هر Rـ مدول راست آزادِ از رتبه‌ی نامتناهی $acc - ۱$ نیست. به علاوه فروهن [۴] در [۷] نشان داد که اگر R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر نوتری باشد، آن‌گاه برای هر مجموعه‌ی اندیس‌گذار I، Rـ مدول R^I، $pan - acc$ است. این پایان‌نامه مشتمل بر سه فصل است. در فصل اول به تعاریف، مثال‌ها و قضایای مقدماتی می‌پردازیم. در فصل دوم، نخست شرط $n - acc$ را در $\mathbb{Z}$ـ مدول‌ها بررسی می‌کنیم. در این فصل نشان می‌دهیم که $\mathbb{Z}$ـ مدول M، $pan - acc$ است اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. M کاهش یافته باشد؛

۲. تنها یک تعداد متناهی از اعداد اول $p \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که برای یک عنصر ناصفر a در M، $pa = ۰$؛

---

[۲] P. F. Smith
[۳] G. Renault
[۴] D. Frohn

۳. هر زیرمدول بی‌تاب شمارا تولید شده از M، آزاد باشد.

سپس ثابت می‌کنیم که اگر R یک حلقه با بعد گلدی متناهی باشد، آنگاه هر حاصل‌ضرب مستقیم R ـ مدول‌های راست نوتریِ ناتکین، $pan - acc$ است. هم‌چنین نشان می‌دهیم که اگر R یک حلقه با بعد گلدی راست متناهی و n یک عدد صحیح مثبت و $M = \prod_{i\in I} M_i$ یک حاصل‌ضرب مستقیم از R ـ مدول‌های راستِ n ـ موروثی باشد، آنگاه M، $n - acc$ است اگر و تنها اگر برای هر $i \in I$، M_i، $n - acc$ باشد. در فصل سوم، ثابت می‌کنیم که اگر حلقه‌ی تعویض‌پذیر R، $۱ - acc$ باشد، آنگاه هر R ـ مدول آزاد $۱ - acc$ است. هم‌چنین نشان می‌دهیم که اگر R یک حلقه‌ی گلدی راست باشد که در شرط زنجیر نزولی روی پوچ‌سازهای راست صدق کند و n یک عدد صحیح مثبت باشد به طوری که هر R ـ مدول راست آزاد متناهیاً تولید شده $n - acc$ باشد، آنگاه هر R ـ مدول راست آزاد $n - acc$ است. در آخر ثابت می‌کنیم که اگر R و S دو حلقه و دومدول ${}_SM_R$ به عنوان S ـ مدول چپ و R ـ مدول راست نوتری باشد، آنگاه برای هر مجموعه‌ی اندیس گذار I، R ـ مدول راست M^I، $pan - acc$ است. هم‌چنین در این فصل مثال‌های آوردیم که نشان می‌دهد اگر یک حلقه‌ی R، $pan - acc$ باشد، آنگاه لزوماً حلقه‌ی چندجمله‌ای و حلقه‌ی سری‌های توانیِ آن $pan - acc$ نیست.

فصل ۱
تعاریف و قضایای مقدماتی

همه‌ی حلقه‌ها یک‌دار و تعویض‌ناپذیر هستند مگر آن‌که خلاف آن ذکر شود.

۱.۱ ایدآل

تعریف ۱.۱.۱. ایدآل سره‌ی P از حلقه‌ی R اول می‌نامیم، هرگاه به ازای هر دو ایدآل I و J در R، اگر $IJ \subseteq P$، آن‌گاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$. یک حلقه‌ی اول حلقه‌ای ناصفر است که (0) یک ایدآل اول آن است.

گزاره ۲.۱.۱. *اگر P یک ایدآل سره در حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادلند:*

۱. *P یک ایدآل اول است؛*

۲. *$\frac{R}{P}$ حلقه‌ی اول است؛*

۳. *به ازای هر دو ایدآل راست I و J از R به طوری که $IJ \subseteq P$، آن‌گاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$؛*

۴. *به ازای هر دو ایدآل چپ I و J از R به طوری که $IJ \subseteq P$، آن‌گاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$؛*

۵. *هرگاه $x, y \in R$ به طوری که $xRy \subseteq P$، آن‌گاه $x \in P$ یا $y \in P$.*

برهان. ر. ک. [۱۲]، گزاره ۳.۱. □

نتیجه ۳.۱.۱. *از قسمت (۵) نتیجه می‌شود که در یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر R، ایدآل سره‌ی P اول است اگر و تنها اگر به ازای هر $x, y \in R$، اگر $xy \in P$، آن‌گاه $x \in P$ یا $x \in P$.*

مثال ۴.۱.۱. در هر حوزه‌ی صحیح، (0) یک ایدآل اول است.

گزاره ۵.۱.۱. *هر ایدآل ماکسیمال M در یک حلقه‌ی یک‌دار R، یک ایدآل اول است.*

برهان. ر. ک. [۱۲]، گزاره ۳.۲. □

قضیه ۶.۱.۱. *در حلقه‌ی تعویض‌پذیر و یک‌دار R و $1_R \neq 0$، ایدآل P اول است اگر و تنها اگر حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{R}{P}$ یک دامنه‌ی صحیح باشد.*

برهان. ر. ک. [۱]، فصل ۳، قضیه ۱۶.۲. □

تعریف ۷.۱.۱. هر ایدآل در یک حلقه‌ی R که اشتراکی از ایدآل‌های اول است، یک ایدآل نیم‌اول نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۱.۱. یک حلقه‌ی نیم‌اول حلقه‌ای ناصفر است که (0) یک ایدآل نیم‌اول آن است.

مثال ۹.۱.۱. در حلقه‌ی $\mathbb{Z}$، اشتراک یک خانواده نامتناهی از ایدآل‌های اول صفر است. اشتراک یک خانواده متناهی $p_1\mathbb{Z}, \ldots, p_k\mathbb{Z}$ از ایدآل های اول که $p_1, \ldots, p_k$ اعداد صحیح اول متمایزند، ایدآل $p_1p_2\ldots p_k\mathbb{Z}$ است.

نکته ۱۰.۱.۱. *یک ایدآل P در حلقه‌ی R نیم‌اول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{P}$ یک حلقه‌ی نیم‌اول باشد.*

نتیجه ۱۱.۱.۱. *هر حلقه‌ی اول، یک حلقه‌ی نیم‌اول است.*

نکته ۱۲.۱.۱. *اشتراک خانواده‌ای تهی از ایدآل‌های R، R می‌باشد. بنابراین R ایدآل نیم‌اول خودش است.*

قضیه ۱۳.۱.۱. *یک ایدآل I در حلقه‌ی R نیم‌اول است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in R$، $xRx \subseteq I$، آن‌گاه $x \in I$.*

برهان. ر. ک. [۱۲]، قضیه ۳.۷. □

نتیجه ۱۴.۱.۱. *برای یک ایدآل I در یک حلقه‌ی R، شرایط زیر معادلند:*

۱. *I یک ایدآل نیم اول است؛*

۲. *اگر J یک ایدآل از R باشد به طوری که $J^2 \leq I$، آن‌گاه $J \leq I$؛*

۳. *اگر J یک ایدآل راست از R باشد به طوری که $J^2 \leq I$، آن‌گاه $J \leq I$؛*

۴. *اگر J یک ایدآل چپ از R باشد به طوری که $J^2 \leq I$، آن‌گاه $J \leq I$.*

برهان. ($3 \Rightarrow 1$) برای هر $x \in J$، داریم $xRx \leq J^2 \leq I$. چون I نیم‌اول است، بنابر قضیه‌ی قبل، $x \in I$ در نتیجه $J \leq I$.

($2 \Rightarrow 3$) واضح است.

($1 \Rightarrow 2$) فرض کنیم $x \in R$ به طوری که $xRx \leq I$، داریم $(RxR)^2 = RxRxR \leq I$ و بنابراین $xRx \leq I$، پس $x \in I$ لذا با استفاده از قضیه قبل I نیم‌اول است.

($4 \Leftrightarrow 1$) به صورت مشابه بدست می‌آید. □

نتیجه ۱۵.۱.۱. *هر ایدآل اول، نیم‌اول است.*

نتیجه ۱۶.۱.۱. *اگر I یک ایدآل نیم‌اول در حلقه‌ی R و J یک ایدآل راست (یا چپ) از R باشد به طوری که برای یک عدد صحیح مثبت n، $J^n \leq I$، آن‌گاه $J \leq I$.*

برهان. اگر $n = 1$ حکم برقرار است. فرض کنیم $n > 1$ و نتیجه برای کمتر از n برقرار است. چون $n \geq 2$، داریم $2n - 2 \geq n$، از آن‌جا که $(J^{n-1})^2 = J^{2n-2} \leq J^n \leq I$. پس $J^{n-1} \leq I$ (با استفاده از نتیجه قبل). بنابراین با استفاده از فرض استقرا $J \leq I$. □

تعریف ۱۷.۱.۱. ایدآل راست I در یک حلقه‌ی R را پوچ می‌نامیم، هرگاه برای هر $a \in I$، یک $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $a^n = 0$.

تعریف ۱۸.۱.۱. ایدآل راست I را یک ایدآل پوچ‌توان می‌نامیم، هرگاه یک عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که $I^n = 0$.

نکته ۱.۱.۱۹. *اگر R یک حلقه‌ی نیم‌اول باشد، آن‌گاه R ایدآل راست پوچ‌توان ناصفر ندارد. زیرا اگر I یک ایدآل راست پوچ‌توان ناصفر از R باشد، آن‌گاه $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $I^n = (0)$. بنابر فرض، (0) یک ایدآل نیم‌اول از R است. از این‌رو بنابر نتیجه‌ی ۱.۱.۱۶، $I = (0)$.*

۱.۲ مدول

تعریف ۱.۲.۱. اگر R یک حلقه و $(M,+)$ یک گروه آبلی و $M \times R \longrightarrow M$ یک تابع باشد (تصویر (m,r) را با mr نشان می‌دهیم)، آن‌گاه M را یک Rــ مدول راست می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $\forall\, r_1, r_2 \in R\ ,\forall\, m \in M,\ m(r_1 +\ r_2) = mr_1 +\ mr_2$

۲. $\forall\, r_1, r_2 \in R, \forall\, m \in M\ ,\ m(r_1 r_2) = (mr_1)r_2$

۳. $\forall\, r \in R, \forall\, m_1, m_2 \in M\ ,\ (m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r$

اگر برای هر $m \in M$، $m1 = m$ در این صورت Rــ مدول M، یکانی می‌نامیم.

قرارداد ۱.۲.۲. *در این پایان‌نامه منظور از Rــ مدول، Rــ مدول راست یکانی است، مگر آن‌که خلاف آن ذکر شود.*

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنیم M یک Rــ مدول راست باشد. زیرگروه N از $(M,+)$ یک زیر مدول M نامیده می‌شود، هرگاه N تحت ضرب اسکالر تعریف شده برای مدول بسته باشد، یعنی؛

$$\forall\, r \in R\ ,\ \forall\, n \in N\ ,\ nr \in N.$$

مثال ۱.۲.۴. ۱. هرگروه آبلی G، یک $\mathbb{Z}$ــ مدول یکانی است.

۲. اگر R یک حلقه و S زیرحلقه‌ی آن باشد، آن‌گاه R یک Sــ مدول است.

۳. هر ایدآل چپ حلقه R یک Rــ مدول چپ و هر ایدآل راست آن یک Rــ مدول راست می باشد. به‌خصوص (0) و R، Rــ مدول هستند. به علاوه چون ایدآل راست I یک زیرگروه جمعی R است،

پس $\frac{R}{I}$ یک گروه (آبلی) است. حال $\frac{R}{I}$ با ضرب زیر به یک Rـ مدول راست تبدیل می‌شود.

$$\forall r \in R, x \in R \;:\; (x+I)r = \; xr + I.$$

لم ۵.۲.۱. *(قانون مدولی) اگر N و K و L زیرمدول‌هایی از Rـ مدول راست M باشند و $N \subseteq L$، آن‌گاه $N + (L \cap K) = (N + L) \cap (N + K)$.*

برهان. چون $K \cap L \subseteq K$ و $K \cap L \subseteq L$، پس $N + (L \cap K) \subseteq N + L, N + K$. در نتیجه $N + (L \cap K) \subseteq (N + L) \cap (N + K)$. برعکس؛ اگر $x \in (N + L) \cap (N + K)$، آن‌گاه $b \in L$ و $a \in K$ و $n, n' \in N$ موجودند به طوری که $x = n + a = n' + b$. از طرف دیگر

$$N \subseteq L \Rightarrow n' + b \in L, n \in N \Rightarrow a = n' + b - n \in L \Rightarrow a \in L \Rightarrow a \in L \cap K$$

ولی $x = n + a$، پس $x \in N + (L \cap K)$.

تعریف ۶.۲.۱. اگر M یک Rـ مدول راست باشد و $X \subseteq M$، آن‌گاه اشتراک همه‌ی زیرمدول‌های M که شامل X هستند را زیرمدول تولید شده توسط X می‌نامیم و آن را با $< X >$ نمایش می‌دهیم. اگر یک زیرمجموعه‌ی متناهی از M مانند X وجود داشته باشد که M را تولید نماید، آن‌گاه M را متناهیاً تولید شده می‌نامیم.

مثال ۷.۲.۱. هر مدول متناهی، یک مدول متناهیاً تولید شده هستند.

تعریف ۸.۲.۱. Rـ مدول راست M را دوری می‌نامیم، هرگاه برای یک $a \in M$،

$$M =< a > .$$

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و X یک زیرمجموعه‌ی Rـ مدول راست M باشد. مجموعه‌ی X یک پایه برای M است، هرگاه هر عضو $m \in M$ را بتوان به‌طور یکتا به صورت یک حاصل‌جمع متناهی مانند $m = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i r_i$ که در آن برای هر i، $r_i \in R$ و $x_i \in X$ نوشت.

تعریف ۱۰.۲.۱. Rـ مدول راست M را آزاد می‌نامیم، هرگاه دارای یک پایه باشد.

مثال ۱.۲.۱۱. ۱. اگر R یک حلقه باشد، آن‌گاه Rـ مدول راست R آزاد است و پایه‌ی آن $X=\{1\}$ می‌باشد.

۲. $\mathbb{Z}_6$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـ مدول آزاد نیست، زیرا برای هر $x\in\mathbb{Z}_6$ داریم $6x=0$.

۳. $\mathbb{Z}_6$ به عنوان $\mathbb{Z}_6$ـ مدول آزاد است و پایه‌ی آن $X=\{1\}$ است.

نکته ۱.۲.۱۲. *اگر M یک Rـ مدول راست آزاد با پایه‌ی $X=\{x_i\}_{i\in I}$ باشد، آن‌گاه*

$$M\cong\bigoplus_{i\in I}R \quad (\text{به عنوان } R\text{ـ مدول}).$$

زیرا به وضوح نگاشت $\varphi:\bigoplus_{i\in I}R\longrightarrow M$ برای هر $r_i\in R$ $(i\in I)$، با ضابطه‌ی $\varphi((r_i)_{i\in I})=\sum_{i\in I}x_ir_i$، یک‌ریختی است. به علاوه اگر برای یک عدد طبیعی n، $|X|=n$، آن‌گاه $M\cong R^n$.

لم ۱.۲.۱۳. *اگر R یک دامنه‌ی ایدآل اصلی و M یک Rـ مدول راست باشد که توسط n عضو تولید شود، آن‌گاه هر زیرمدول M را می‌توان با $m\leq n$ عضو تولید کرد.*

برهان. ر. ک. [۱]، صفحه‌ی ۳۴۲. □

قضیه ۱.۲.۱۴. *یک گروه آبلی M متناهیاً تولید شده است اگر و تنها اگر M جمع‌مستقیم یک تعداد متناهی از گروه‌های دوری باشد.*

برهان. ر. ک. [۸]، قضیه ۱۵.۵. □

قضیه ۱.۲.۱۵. *اگر R یک دامنه‌ی ایدآل اصلی باشد، آن‌گاه هر زیرمدول از یک Rـ مدول آزاد، آزاد است.*

برهان. ر. ک. [۱]، فصل ۴، قضیه ۶.۱. □

قضیه ۱.۲.۱۶. *فرض کنیم M یک $\mathbb{Z}$ـ مدول و $N\leq M$. اگر $\frac{M}{N}$ آزاد باشد، آن‌گاه N یک جمع‌وند مستقیم از M است.*

برهان. ر. ک. [۸]، قضیه ۱۴.۴. □

۳.۱ شرایط زنجیری روی مدول‌ها

تعریف ۱.۳.۱. Rـ مدول راست M در شرط زنجیر صعودی (acc) روی زیرمدول‌ها صدق می‌کند (یا نوتری است)، اگر به ازای هر زنجیر $N_1 \leq N_2 \leq N_3 \leq \dots$ از زیرمدول‌های M، عددی صحیح مانند k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i \geq k$، $N_i = N_k$.

مثال ۲.۳.۱. $\mathbb{Z}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـ مدول نوتری است.

تعریف ۳.۳.۱. Rـ مدول راست M در شرط زنجیر نزولی (dcc) روی زیرمدول‌ها صدق می‌کند (یا آرتینی است)، اگر به ازای هر زنجیر $N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq \dots$ از زیرمدول‌های M، عددی صحیح مانند k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i \geq k$، $N_i = N_k$.

مثال ۴.۳.۱. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـ مدول، آرتینی است.

گزاره ۵.۳.۱. *شرایط زیر برای Rـ مدول راست M معادلند:*

۱. *M نوتری است؛*

۲. *هر خانواده ناتهی از زیرمدول‌های M دارای عضو ماکسیمال است؛*

۳. *هر زیرمدول M، متناهیاً تولید شده است.*

برهان. (۲ $\Leftarrow$ ۱) اگر (فرض خلف) $\mathcal{A}$ یک خانواده‌ی ناتهی از زیرمدول‌های M باشد به طوری که دارای عنصر ماکسیمال نیست، آنگاه $N_1 \in \mathcal{A}$ و N_1 ماکسیمال نیست پس $N_2 \in \mathcal{A}$ی وجود دارد به طوری که $N_1 \leq N_2$. با ادامه‌ی این روند یک زنجیر اکیداً صعودیِ نامتناهی $N_1 \lneq N_2 \lneq \dots$ از زیرمدول‌های M ساخته می‌شود که این متناقض با نوتری بودن M است.

(۳ $\Leftarrow$ ۲) فرض کنیم $N \leq M$ و $\mathcal{A}$ خانواده تمام زیرمدول‌های متناهیاً تولید شده‌ی N باشد. $0 \in \mathcal{A}$، بنابراین $\mathcal{A} \neq \emptyset$. بنابر (۲)، $\mathcal{A}$ دارای یک عنصر ماکسیمال، مانند K، است. فرض (خلف) کنیم $K \neq N$. پس $x \in N \setminus K$ی وجود دارد. قرار می‌دهیم $K' =< K, x >$. بنابراین $K' \in \mathcal{A}$ و $K \subsetneq K'$. امّا این متناقض با ماکسیمال بودن K است، پس $K = N$.

(۱ $\Rightarrow$ ۳) فرض کنیم $N_1 \leq N_2 \leq \ldots$ یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M باشد. قرار می‌دهیم $N = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i$. بنابر (۳)، یک زیرمجموعه‌ی متناهی X از N وجود دارد به طوری که $N =< X >$. چون X متناهی است، یک عدد صحیح مثبت t وجود دارد به طوری که $X \subseteq N_t$. در نتیجه $N_t = N$. بنابراین $N_t = N_{t+1} = \ldots$، یعنی؛ M نوتری است. □

گزاره ۶.۳.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول و $N \leq M$. در این صورت M نوتری است، اگر و تنها اگر N و $\frac{M}{N}$ نوتری باشند.*

برهان. ر. ک. [۱۲]، گزاره ۱.۲. □

با استقرا به راحتی می‌توان به نتیجه زیر رسید.

نتیجه ۷.۳.۱. *هر حاصل‌ضرب مستقیم متناهی از مدول های نوتری، نوتری است.*

مثال ۸.۳.۱. $\mathbb{Z}$ـ مدول $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ آرتینی و نوتری نیست.

نتیجه ۹.۳.۱. *اگر R یک حلقه‌ی نوتری راست باشد، آن‌گاه هر Rـ مدول راست متناهیاً تولید شده، نوتری است.*

برهان. M متناهیاً تولید شده است، بنابراین عدد صحیح مثبتی مانند n وجود دارد به طوری که $M \cong \frac{R^n}{K}$ و $K \leq M$. بنابر نتیجه‌ی ۷.۳.۱، R^n نوتری است. در نتیجه بنابر گزاره‌ی ۶.۳.۱، M نوتری است. □

قضیه ۱۰.۳.۱. *فرض کنیم R و S دو حلقه و ${}_SM_R$ و $K = \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & R \end{bmatrix}$. در این صورت حلقه‌ی K نوتری راست (چپ) است اگر و تنها اگر R و S حلقه‌های نوتری راست و M_R $({}_SM)$، متناهیاً تولید شده باشد.*

برهان. ر. ک. [۱۹]. □

مثال ۱۱.۳.۱. حلقه‌ی $K = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$ نوتری راست است امّا نوتری چپ نیست.