فهرست

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱-۱ : فضاهای برداری و فضاهای توپولوژیک

تعریف ۱-۱-۱ :

مجموعه X را یک فضای خطی (برداری) روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم هرگاه عمل دوتایی (+) که آن را جمع می‌نامیم از $X \times X$ به X و عمل دوتایی (.) که آن را ضرب اسکالر می‌نامیم از $\mathbb{F} \times X$ به X، موجود باشند به قسمی که به ازای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha , \beta \in \mathbb{F}$ داشته باشیم :

الف) $x + y = y + x$،

ب) $(x + y) + z = x + (y + z)$،

ج) عنصر $\circ \in X$ موجود باشد به قسمی که $x + \circ = x$، عضو ۰ را عضو خنثی جمعی می‌نامیم ،

د) به ازای هر $x \in X$، عنصر $-x \in X$ موجود باشد به قسمی که $x + (-x) = \circ$،

ه) $\alpha . (x + y) = \alpha . x + \alpha . y$،

و) $\alpha . (\beta . x) = (\alpha\beta) . x$،

ز) $۱ . x = x$.

عنصر $(-۱) . x$ را با $-x$ نشان داده و آن را قرینه x می‌نامیم .

اگر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ، X را فضای خطی حقیقی و اگر $\mathbb{F}$ میدان اعداد مختلط باشد ، X را فضای خطی مختلط می‌نامیم . $Y \subseteq X$ را یک زیرفضای خطی X می‌نامیم ، هرگاه Y با همان جمع و ضرب اسکالر یک فضای خطی باشد . به آسانی دیده می‌شود که Y زیرفضای خطی X است اگروفقط اگر

$$\forall \alpha, \beta \in K , \forall y_۱, y_۲ \in Y \qquad \alpha y_۱ + \beta y_۲ \in Y$$

تعریف ۱-۱-۲ :

فرض کنید X یک مجموعه و τ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد یعنی $\tau \subseteq P(X)$ ($P(X)$ را مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های X معرفی می‌کنیم) . τ را یک **توپولوژی**[۱] در X می‌خوانیم در صورتی که در شرایط زیر صدق کند :

۱) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$ ،

۲) اگر $A, B \in \tau$ ، آنگاه $A \cap B \in \tau$ (یعنی نسبت به اشتراک متناهی بسته باشد) ،

۳) به ازای هر زیرخانواده $\mathcal{A}$ از τ داشته باشیم : $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \in \tau$ (یعنی نسبت به اجتماع دلخواه بسته باشد) .

اعضای τ را مجموعه‌های باز می‌نامیم ، در این حالت (X,τ) را یک فضای توپولوژیک می‌نامیم . و A را مجموعه‌ای بسته می‌نامیم هرگاه: $A \notin \tau$.

تعریف ۱-۱-۳ :

زیرمجموعه A از یک فضای توپولوژیک (X,τ) فشرده است هرگاه برای هر پوشش باز از A ، زیرپوششی متناهی از آن وجود داشته باشد که A را بپوشاند .

تعریف ۱-۱-٤ :

فضای توپولوژیک X **موضعاً فشرده**[۲] است هرگاه هرنقطه در X ، همسایگی فشرده داشته باشد .

به عبارت دیگر هرگاه برای هر $x \in X$ عنصر $U \in \tau$ و زیرمجوعه فشرده V از X موجود باشند به طوریکه $x \in U \subset V$.

تعریف ۱-۱-۵ :

فضای توپولوژیک X ، فضای **هاسدورف**[۳] یا T_2 است هرگاه برای هر $x, y \in X$ ، مجموعه‌های باز U, V باشند که $x \in U$ و $y \in V$ و $U \cap V = \emptyset$.

---

[۱] *Topology*

[۲] *Locally compact*

[۳] *Hausdorff*

تعریف ۱-۱-۶ :

فضای توپولوژیک X ، **منظم**[1] گفته می‌شود هرگاه برای هر زیرمجموعه بسته F از X و برای هر نقطه $x \in X$ که $x \notin F$ ، زیرمجموعه‌های باز U, V وجود داشته باشند که : $F \subset U$ و $x \in V$ و $U \cap V = \emptyset$.

تعریف ۱-۱-۷ :

فرض کنید X فضایی برداری باشد ، زیرمجموعه $K \subseteq X$ **محدب**[2] گفته می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in K$ و $0 \leq t \leq 1$ ، آنگاه $tx + (1-t)y \in K$.

تعریف ۱-۱-۸ :

فرض کنید X یک فضای برداری و $A \subseteq X$ باشد کوچکترین مجموعه محدب شامل A را **غلاف محدب**[3] A می‌نامیم و با نماد $Co(A)$ نشان می‌دهیم . به عبارت دقیق تر

$$Co(A) = \cap \left\{ K : \ A \subseteq K \, , \, K \text{ محدب است} \right\}.$$

قضیه ۱-۱-۹ [۱] :

فرض کنید X فضایی برداری و $A \subseteq X$ باشد ، در این صورت

$$Co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_i \in A \, , \lambda_i \geq 0 \, , \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

تعریف ۱-۱-۱۰ [۱] :

فرض کنید $V = \{v_i\}_{i \in I}$ و $W = \{w_j\}_{j \in J}$ دو پوشش از یک مجموعه باشند گوییم که W تظریفی از V است هرگاه برای هر $j \in J$ وجود داشته باشد $i \in I$ چنانکه $w_j \subseteq v_i$.

تعریف ۱-۱-۱۱ [۱] :

گردایه $\{v_j\}_{j \in J}$ از زیرمجموعه‌های یک فضای توپولوژیک X ، **موضعاً متناهی**[4] نامیده می‌شود هرگاه برای هر نقطه $x \in X$ ، یک همسایگی از آن موجود باشد که تعداد متناهی از اعضای گردایه را قطع کند .

---

[1] ***Regular***

[2] ***Convex***

[3] ***Convex hull***

[4] ***Locally finite***

تعریف ۱-۱-۱۲ [۱] :

فضای توپولوژیک هاسدورف X ، **پارافشرده** [۱]نامیده می‌شود هرگاه برای هر پوشش باز از فضا ، یک پوشش باز موضعاً متناهی موجود باشد که تظریف آن باشد .

تعریف ۱-۱-۱۳ [۱] :

یک **افراز واحد**[۲] بر یک مجموعه X ، *خانواده* توابع $\{f_i : f_i : X \to [0,1]\}_{i\in I}$ می‌باشد چنانکه برای هر $x \in X$ فقط تعداد متناهی از این توابع در x غیرصفر باشند و $\sum_{i\in I} f_i(x) = 1$.

که در این حالت ما قرارداد می‌کنیم که جمع گردایه‌ای از ۰ ها ، ۰ است .

توجه داریم که یک افراز واحد ، پیرو (مادون) پوشش باز $\mathcal{U}$ از X است هرگاه برای هر تابع f از افراز واحد تعداد متناهی $u_\alpha \in \mathcal{U}$ باشد که خارج از این u_α ها ، f صفر باشد .

برای فضای توپولوژیک X ، یک افراز واحد ، پیوسته نامیده می‌شود هرگاه هر تابع از افراز پیوسته باشد .

و موضعاً متناهی است هرگاه هر نقطه $x \in X$ یک همسایگی داشته باشد که همه‌ی توابع عناصر افراز به جز تعداد متناهی ، روی آن صفر باشند .

قضیه ۱-۱-۱۴ [۱] :

فضای توپولوژیک هاسدورف X ، پارافشرده نامیده است اگر و فقط اگر هر پوشش باز از X ، یک افراز واحد موضعاً متناهی پیوسته ، پیرو آن پوشش داشته باشد .

گزاره ۱-۱-۱۵ [۱] :

فرض کنید $\mathcal{U}$ یک پوشش باز از فضای توپولوژیک فشرده X باشد ، در این صورت خانواده موضعاً متناهی $\{f_u\}_{u\in\mathcal{U}}$ از توابع حقیقی وجود دارد که در خواص زیر صدق می‌کنند :

الف) برای هر $u \in \mathcal{U}$ $f_u : X \to [0,1]$ پیوسته است ،

ب) برای هر $u \in \mathcal{U}$ ، $f_u = 0$ بر u^c ،

ج) برای هر $x \in X$ ، $\sum_{u\in\mathcal{U}} f_u(x) = 1$.

---

[۱] *Paracompact*

[۲] *Partition of unity*

یعنی $\{f_u\}_{u\in\mathcal{U}}$ یک افراز واحد موضعاً متناهی پیوسته ، پیرو پوشش $\mathcal{U}$ است .

نتیجه بعد نشان می‌دهد که فضاهای توپولوژیک هاسدورف و فشرده ، پارافشرده هستند .

نتیجه ۱-۱-۱۶ [۱] :

هر فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده ، پارافشرده است.

تعریف ۱-۱-۱۷ :

فرض کنید X فضایی برداری روی میدان $\mathbb{F} = (\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R})$ باشد . فضای توپولوژیک (X,τ) را یک **فضای برداری توپولوژیک**[۱] نامیم هرگاه :

۱) نگاشت $(x,y) \to x+y$ از $X\times X$ به X، پیوسته باشد ،

۲) نگاشت $(t,x) \to tx$ از $\mathbb{F}\times X$ به X، پیوسته باشد .

یک فضای برداری توپولوژیک را به اختصار با TVS نشان می‌دهیم .

قضیه ۱-۱-۱۸ [۱] :

فرض کنید (X,τ) یک TVS باشد در این صورت :

الف) اگر $\mathcal{U}$ یک پایه همسایگی (باز) از ۰ در X باشد آنگاه $x_\circ + \mathcal{U} = \{x_\circ + u : u \in \mathcal{U}\}$ یک پایه همسایگی از $x_\circ$ است .

ب) اگر u باز باشد آنگاه برای هر $t\in F$ و $t \neq \circ$، tu باز است .

پ) اگر $\mathcal{U}$ یک پایه همسایگی (باز) از ۰ باشد و $u\in\mathcal{U}$ آنگاه وجود دارد $v\in\mathcal{U}$ به طوریکه

$$v + v \subseteq u \,.$$

تعریف ۱-۱-۱۹ :

فرض کنید (X,τ) یک TVS باشد ، زیرمجموعه $S\subseteq X$ را **متقارن**[۲] گوییم هرگاه برای $x\in S$ ، نتیجه بگیریم $-x\in S$ (یعنی $S = -S$)

---

[۱] *Topological vector space*

[۲] *Symmetric*

توجه داریم که هر همسایگی u از ۰ در یک TVS شامل یک همسایگی متقارن از ۰ است . (کافی است قرار دهیم $(u \cap (-u))$) .

تعریف ۱-۱-۲۰ :

فضای برداری توپولوژیک (X, τ) را **فضای موضعاً محدب**[۱] یا τ را توپولوژی موضعاً محدب گوییم هرگاه τ یک پایه همسایگی از ۰ شامل مجموعه‌های محدب داشته باشد . به اختصار این فضا را با LCS نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۲۱ :

گوییم خانواده $\{F_i\}_{i \in I}$ از مجموعه‌ها دارای خاصیت مقطع متناهی می‌باشد هرگاه اشتراک هر تعداد متناهی از اعضای این خانواده غیرتهی باشد .

تعریف ۱-۱-۲۲ :

فرض کنید E یک فضای برداری باشد . مجموعه محدب P در E را یک **لبه**[۲] می‌نامیم هرگاه برای هر عدد حقیقی $\lambda \geq ۰$ ، $\lambda P \subseteq P$.

و P را یک **مخروط**[۳] می‌نامیم هرگاه P یک لبه در E باشد به طوریکه اگر $x \in P$ و $x \neq ۰$ ، آنگاه $-x \notin P$.

تعریف ۱-۱-۲۳ :

برای هر زیرمجموعه غیرتهی و محدب X از فضای خطی E، تابع $\varphi: X \to \mathbb{R}$ را

الف) محدب گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $۰ \leq \alpha \leq ۱$ داشته باشیم :

$$\varphi(\alpha x + (۱ - \alpha) y) \leq \alpha \varphi(x) + (۱ - \alpha) \varphi(y) .$$

ب) **مقعر**[۴] گوییم هرگاه φ- تابعی محدب باشد .

ج) **شبه‌محدب**[۱] گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $۰ \leq \alpha \leq ۱$ داشته باشیم :

---

[۱] *Locally convex space*

[۲] *Wedge*

[۳] *Cone*

[۴] *Concave*

$$\varphi(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq max\,\{\varphi(x), \varphi(y)\}\,.$$

د) **شبه‌مقعر**[2] گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $0 \leq \alpha \leq 1$ داشته باشیم :

$$\varphi(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq min\,\{\varphi(x), \varphi(y)\}\,.$$

حال به ارتباط بین این تعاریف می‌پردازیم .

گزاره ۱-۱-۲۴ [۱] :

هر تابع محدب (مقعر) ، تابعی شبه‌محدب (شبه‌مقعر) می‌باشد .

گزاره ۱-۱-۲۵ [۱] :

فرض کنید E یک فضای برداری و X زیرمجموعه‌ای غیرتهی از آن باشد . برای تابع $\varphi: X \to \mathbb{R}$ گزاره‌های زیر معادل‌اند :

الف) φ تابعی شبه‌مقعر است .

ب) برای هر $c \in \mathbb{R}$ ، مجموعه $\{x \in X: f(x) > c\}$ (در صورت غیرتهی بودن) محدب است .

ج) برای هر $c \in \mathbb{R}$ ، مجموعه $\{x \in X: f(x) \geq c\}$ (در صورت غیرتهی بودن) محدب است .

---

[1] *Quasi convex*

[2] *Quasi concave*

۲-۱ : نگاشت‌های مجموعه‌مقدار [1]

تعریف ۱-۲-۱ :

فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند ، نگاشت T از X به مجموعه توانی Y را نگاشت مجموعه‌مقدار (چند مقداری) نامیم . توجه داریم که به ازای هر $x \in X$ ، زیرمجموعه‌ای از Y همچون $T(x)$ اختصاص می‌یابد .

این نگاشت را با نمادهای $T: X \to 2^Y$ ، $T: X \rightrightarrows 2^Y$ ، $T: X \mapsto\!\!\!\rightarrow Y$ یا $T: X \multimap Y$ نمایش می‌دهند . در این پایان‌نامه از نماد $T: X \to 2^Y$ برای نگاشت‌های مجموعه‌مقدار استفاده خواهیم کرد .

اگر A زیرمجموعه‌ای غیرتهی از X و T یک نگاشت مجموعه‌مقدار باشد . تصویر A تحت T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$T(A) = \cup_{x \in A} T(x) .$$

تعریف ۱-۲-۲ :

گراف [2] یک نگاشت مجموعه‌مقدار به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$Gr\, T = \{(x, y) \in X \times Y : y \in T(x)\} .$$

مثال ۱-۲-۳ :

فرض کنید $X = Y = \mathbb{R}$ و $T: X \to 2^Y$ به صورت $T(x) = [0, 1]$ تعریف شده باشد در این صورت داریم:

$$Gr\, T = \mathbb{R} \times [0, 1] .$$

تعریف ۱-۲-٤ :

معکوس بالایی [3] نگاشت مجموعه‌مقدار $T: X \to 2^Y$ برای $A \subset Y$ را با $T^u(A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$T^u(A) = \{x \in X : T(x) \subset A\} .$$

به همین ترتیب **معکوس پایینی** [1] را با $T^l(A)$ نشان داده و داریم :

---

[1] *Set valued*
[2] *Graph*
[3] *Upper inverse*

$$T^l(A) = \{x \in X : T(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

و نیز یک **لایه**[۲] برای نگاشت مجموعه‌مقدار مذکور به صورت زیر تعریف می‌شود .

$$T^-(y) = \{x \in X : y \in T(x)\} = T^l(\{y\}).$$

برای عبارت T^- از نماد T^{-1} نیز استفاده می‌شود که در سراسر این پایان‌نامه از نماد T^- استفاده می کنیم .

به وضوح اگر T تک‌مقداری باشد معکوس‌های بالایی وپایینی مساوی می‌شوند یعنی

$$T^l(\{y\}) = T^u(\{y\}) = T^-(y) .$$

روابط زیر بین معکوس‌های بالایی و پایینی برقرارند :

$$T^u(A) = X \setminus T^l(Y \setminus A) = [T^l(A^C)]^C .$$

$$T^l(A) = X \setminus T^u(Y \setminus A) = [T^u(A^C)]^C .$$

$$T^l\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} T^l(A_i) .$$

$$T^u\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} T^u(A_i) .$$

مثال ۱-۲-۵ :

فرض کنید $X = \mathbb{R}$ و $Y = [۰, \infty)$ و $T: X \to ۲^Y$

$$T(x) = [۰, |x|]$$

اکنون برای مجموعه‌ای چون $A = [۰,۳] \subseteq Y$ داریم :

$$T^u(A) = \{x \in X : [۰, |x|] \subseteq [۰,۳]\} = [-۳,۳].$$

$$T^l(A) = \{x \in X : [۰, |x|] \cap [۰,۳] \neq \emptyset\} = \mathbb{R} .$$

وبرای مجموعه‌ای چون $B = (۲,۵) \subseteq Y$ داریم :

$$T^u(B) = \{x \in X : [۰, |x|] \subset (۲,۵)\} = \emptyset.$$

$$T^l(B) = \{x \in X : [۰, |x|] \cap (۲,۵) \neq \emptyset\} = (-\infty, -۲) \cup (۲, \infty).$$

---

[۱] ***Lower inverse***

[۲] ***Fiber***

یادآور می‌شویم که یک همسایگی از مجموعه A ، مجموعه‌ای چون B است هرگاه مجموعه باز V موجود باشد که $A \subset V \subset B$. و هر مجموعه باز V که $A \subset V$ ، یک همسایگی باز A نامیده می‌شود .

تعریف ۱-۲-۶ :

نگاشت مجموعه‌مقدار $T: X \to 2^Y$ در نقطه $x_0 \in X$ ، **نیم‌پیوسته بالایی**[1] گفته می‌شود هرگاه برای هر همسایگی باز U از $T(x_0)$ ، $T^u(U)$ همسایگی‌ای از x_0 در X باشد . این نگاشت را بر X نیم‌پیوسته بالایی $(u.s.c)$ نامیم هرگاه در هر نقطه $x \in X$ ، $u.s.c$ باشد و نگاشت T در نقطه $x_0 \in X$ ، **نیم‌پیوسته پایینی**[2] گفته می‌شود هرگاه برای هر مجموعه باز Uکه $T(x_0)$ را قطع می‌کند (یعنی $T(x_0) \cap U \neq \emptyset$) ، $T^l(U)$ همسایگی‌ای از x_0 در X باشد ، این نگاشت را بر X نیم‌پیوسته پایینی $(l.s.c)$ نامیم هرگاه در هر نقطه $x \in X$ ، $l.s.c$ باشد . و این نگاشت را در نقطه x_0 پیوسته گوییم هرگاه در این نقطه ، نیم‌پیوسته بالایی و نیم‌پیوسته بالایی باشد و پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه $x \in X$ پیوسته باشد .

مثال ۱-۲-۷ [۱] :

فرض کنید $X = Y = [0,1]$ و $T_1, T_2, T_3: X \to 2^Y$ تعریف می کنیم

$$T_1(x) = \begin{cases} \{0\} & 0 \leq x < 1 \\ [0,1] & x = 1 \end{cases}.$$

این نگاشت در هر نقطه از دامنه‌اش نیم‌پیوسته بالایی است اما در $x = 1$ نیم‌پیوسته پایینی نیست . و

$$T_2(x) = \begin{cases} [0,1] & 0 \leq x < 1 \\ \{0\} & x = 1 \end{cases}$$

در هر نقطه از دامنه‌اش نیم‌پیوسته پایینی است اما در $x = 1$ نیم‌پیوسته بالایی نیست . و نیز

$$T_3(x) = [0, x]$$

در هر نقطه از دامنه‌اش نیم‌پیوسته بالایی و نیم‌پیوسته پایینی است یعنی پیوسته است .

اکنون نتایج زیر را برای توابع نیم‌پیوسته بالایی ونیم‌پیوسته پایینی داریم .

گزاره ۱-۲-۸ [۱] :

برای نگاشت مجموعه‌مقدار $T: X \to 2^Y$ گزاره‌های زیر معادل‌اند :

---

[1] *Upper semi continuos*

[2] *Lower semi continuos*

۱) T نیم‌پیوسته بالایی است .

۲) برای هر زیرمجموعه باز V از Y ، $T^u(V)$ باز است

۳) برای هر زیرمجموعه بسته F از Y ، $T^l(F)$ بسته است .

گزاره ۱-۲-۹ [۱] :

برای نگاشت مجموعه‌مقدار $T: X \to 2^Y$ گزاره‌های زیر معادل‌اند :

۱) T نیم‌پیوسته پایینی است .

۲) برای هر زیرمجموعه باز V از Y ، $T^l(V)$ باز است .

۳) برای هر زیرمجموعه بسته F از Y ، $T^u(F)$ بسته است .

تعریف ۱-۲-۱۰ :

نگاشت $T: X \to 2^Y$ را با **مقدار بسته**[1] گوییم هرگاه برای هر نقطه $x \in X$ ، $T(x)$ زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از Y باشد . به همین ترتیب نگاشت با **مقدار باز**[2] و نگاشت با **مقدار فشرده**[3] تعریف می‌شوند .

تعریف ۱-۲-۱۱ :

نگاشت مجموعه‌مقدار $T: X \to 2^Y$ رابسته گوییم اگر گراف آن زیرمجموعه‌ای بسته از $X \times Y$ باشد .

گزاره ۱-۲-۱۲ [۱] :

هر نگاشت مجموعه‌مقدار بسته ، مقادیر بسته دارد .

اما عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست . که در مثال زیر این را خواهیم دید .

مثال ۱-۲-۱۳ :

فرض کنید $X = Y = [0,1]$ نگاشت $T: X \to 2^Y$ با ضابطه :

$$T(x) = \begin{cases} \{0\} & x > 0 \\ \{1\} & x = 0 \end{cases}$$

---

[1] *Closed valued*
[2] *Open valued*
[3] *Compact valued*

دارای مقادیر بسته است اما بسته نیست زیرا گراف آن یعنی مجموعه

$$Gr(T) = \{(x,0) \ : \ 0< x \leq 1\} \cup \{(0,1)\}$$

در $X \times Y$ بسته نیست .

تعریف ۱-۲-۱۴ :

نگاشت مجموعه‌مقدار $T: X \to 2^Y$ را فشرده گوییم هرگاه $\overline{T(X)}$ زیرمجموعه‌ی فشرده‌ای از Y باشد که در آن $\overline{T(X)}$ بستار $T(X) = \cup_{x\in X} T(x)$ را نشان می‌دهد .

در ادامه خواهیم دید که تحت شرایط خاص عکس گزاره قبل برقرار است .

گزاره ۱-۲-۱۵ [۱] :

فرض کنید Y و X فضاهای توپولوژیک باشند نگاشت نیم‌پیوسته بالایی $T: X \to 2^Y$، بسته است هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد :

۱) T با مقادیر بسته و Y فضایی منظم باشد .

۲) T با مقادیر فشرد ه و Y فضایی هاسدورف باشد .

گزاره ۱-۲-۱۶ [۱] :

فرض کنید Y و X فضاهای توپولوژیک باشند و $T: X \to 2^Y$ نگاشتی مجموعه‌مقدار باشد در این صورت داریم:

الف) اگر Y فشرده و T بسته باشد آنگاه T، نیم‌پیوسته بالایی است .

ب) اگر X فشرده و T نیم‌پیوسته بالایی با مقادیر فشرده باشد ، آنگاه $T(X)$ فشرده است .

پ) T نیم‌پیوسته پایینی در $x \in X$ است اگر و فقط اگر برای هر $y \in T(x)$ و هر تور $\{x_\alpha\}$ همگرا به x وجود داشته باشد تور $\{y_\alpha\}$ همگرا به y چنانکه برای هر α، $y_\alpha \in T(x_\alpha)$.

گزاره ۱-۲-۱۷ [۵٦] :

فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک باشند و $T: X \to 2^Y$ نیم‌پیوسته بالایی با مقادیر فشرده و $S: X \to 2^Y$ بسته باشد . در این صورت $T \cap S: X \to 2^Y$ تعریف شده به صورت $(T \cap S)(x) = T(x) \cap S(x)$ نیم- پیوسته بالایی است . در حالت خاص اگر S فشرده وبسته باشد آنگاه S نیم‌پیوسته بالایی است .

قضیه ۱-۲-۱۸ [۱] : (قضیه گراف بسته[1])

یک نگاشت مجموعه‌مقدار با مقادیر بسته و فضای برد فشرده و هاسدورف ، بسته است اگر و فقط اگر نیم-پیوسته بالایی باشد .

در مثال زیر می‌بینیم که شرط فشردگی فضای برد برای قضیه گراف بسته الزامی است .

مثال ۱-۲-۱۹ :

فرض کنید $X = Y = \mathbb{R}$ و $T: X \to ۲^Y$ به صورت زیر تعریف شده باشد .

$$T(x) = \begin{cases} \left\{\frac{۱}{x}\right\} & x \neq ۰ \\ \{۰\} & x = ۰ \end{cases}$$

این نگاشت گراف بسته دارد و حتی با مقادیر فشرده است . اما در $x = ۰$ نیم‌پیوسته بالایی نیست .

فرض کنید $T: X \to ۲^Y$ و $F: Y \to ۲^Z$ دو نگاشت مجموعه‌مقدار باشند . ترکیب آنها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$FoT: X \to ۲^Z$$

$$FoT(x) = \bigcup_{y \in T(x)} F(y)$$

به سادگی می‌توان دید که :

$$(FoT)^u(A) = T^u\big(F^u(A)\big) \qquad و \qquad (FoT)^l(A) = T^l\Big(F^l(A)\Big).$$

قضیه ۱-۲-۲۰ [۱] :

ترکیب نگاشت‌های مجموعه‌مقدار نیم‌پیوسته بالایی (نیم‌پیوسته پایینی) ، نیم‌پیوسته بالایی (نیم‌پیوسته پایینی) است .

[1] ***Closed Graph Theorem***

۱-۳ : نگاشت‌های مجموعه‌مقدار KKM[1]

فرض کنید X مجموعه‌ای غیرتهی باشد . $< X >$ نشانگر مجموعه همه زیرمجموعه‌های غیرتهی و متناهی X است .

تعریف ۱-۳-۱ :

برای هر عدد صحیح $n \geq ۰$ ، **n – سیمپلکس استاندارد**[2] Δ_n از $\mathbb{R}^{n+۱}$ به صورت زیر است :

$$\Delta_n = \left\{\alpha = (\alpha_۰, \alpha_۱, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+۱} : \alpha_i \geq ۰ \quad \forall i = ۰, \dots n \ , \sum_{i=۰}^{n} \alpha_i = ۱\right\}$$

و فرض کنید $\{e_۰, e_۱, \dots, e_n\}$ مجموعه رئوس Δ_n باشد که در آن $e_۰ = (۱,۰, \dots ,۰)$ و $e_۱ = (۰ ,۱, \dots ,۰)$ و به همین ترتیب $e_n = (۰,۰, \dots ,۰ ,۱)$. در واقع می‌توان نوشت : $\Delta_n = Co\{e_۰, e_۱, \dots, e_n\}$.

تعریف ۱-۳-۲ :

نگاشت مجموعه‌مقدار $T: K \to ۲^X$ $(K \subseteq X)$ را یک نگاشت KKM گوییم هرگاه

$$Co(A) \subseteq \bigcup_{x \in A} T(x) \quad \forall A \in < K > .$$

توجه داریم که اگر نگاشت تک‌مقداری $T: K \to X$ ، KKM باشد آنگاه T باید ثابت باشد .

مثال ۱-۳-۳ :

نگاشت $T: [۰ ,۱] \to ۲^{\mathbb{R}}$ با ضابطه $T(x) = [۰, x]$ نگاشتی KKM می‌باشد . زیرا اگر فرض کنیم $\{x_۱, \dots, x_n\}$ زیرمجموعه متناهی از $[۰ ,۱]$ باشد و $x_j = max\{x_۱, \dots, x_n\}$ و $x_i = min\{x_۱, \dots, x_n\}$ داریم

$$Co\{x_۱, \dots, x_n\} = [x_i, x_j] \subseteq T(x_j) \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} T(x_i) .$$

[1] ***Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz***

[2] ***Standard n_simplex***

قضیه ۱-۳-۴ [۴۷] : (قضیه اصلی KKM)

فرض کنید D مجموعه همه بردارهای $\{e_j : j = 0, \dots, n\}$ در Δ_n باشد و $F : D \to 2^{\Delta_n}$ نگاشتی KKM با مقادیر بسته (باز) باشد . آنگاه $\bigcap_{x \in D} F(x) \neq \emptyset$.

گزاره ۱-۳-۵ [۴۷] : (KKM)

فرض کنید $F_0, F_1, \dots, F_n$ زیرمجموعه‌های بسته‌ای از $n-$ سیمپلکس استاندارد Δ_n در $\mathbb{R}^{n+1}$ باشند . در این صورت برای هر زیرمجموعه غیرتهی I از $\{0, 1, \dots, n\}$ ، $Co\{e_i : i \in I\} \subseteq \bigcup_{i \in I} F_i$ ، آنگاه $\bigcap_{i=0}^{n} F_i \neq \emptyset$.

تعریف ۱-۳-۶ [۴۷] :

فرض کنید X مجموعه‌ای غیرتهی و Y زیرمجموعه‌ای محدب از یک فضای برداری باشد ، نگاشت $T : X \to 2^Y$ یک نگاشت KKM **تعمیم یافته**[1] گفته می‌شود ، هرگاه برای هر زیرمجموعه متناهی $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ از X ، زیرمجموعه متناهی $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ از Y موجود باشد که

$Co\{y_i : i \in I\} \subseteq \bigcup_{i \in I} T(x_i)$ برای هر زیرمجموعه متناهی I از $\{1, \dots, n\}$.

توجه داریم که هر نگاشت KKM ، KKM تعمیم یافته نیز می‌باشد زیرا کافی است برای هر زیرمجموعه متناهی $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ قرار دهیم : $y_i = x_i$ برای هر $i = 1, \dots, n$.

اما عکس این مطلب درحالت کلی برقرار نیست .

مثال ۱-۳-۷ [۲۵] :

فرض کنید $X = [-2,2]$ و $Y = \mathbb{R}$ و $T : X \to 2^Y$

$$x \in X \qquad T(x) = \left[-\left(1 + \frac{x^2}{5}\right), 1 + \frac{x^2}{5}\right].$$

به وضوح $\bigcup_{x \in X} T(x) = \left[-\frac{9}{5}, \frac{9}{5}\right]$ و برای هر $x \in \left[-2, -\frac{9}{5}\right[\cup \left]\frac{9}{5}, 2\right]$ ، $x \notin T(x)$. یعنی T نگاشتی KKM نیست . در ادامه نشان می‌دهیم T نگاشتی KKM تعمیم یافته می‌باشد . برای هر زیرمجموعه متناهی $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$ ،انتخاب می کنیم $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ را از $[-1,1]$. یعنی $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subseteq [-1,1]$

آنگاه برای هر زیرمجموعه متناهی $\{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}\} \subseteq \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ داریم :

---

[1] *Generalized KKM*

$$.Co\{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}\} \subset [-1,1] = \bigcap_{x\in X} T(x) \subset \bigcup_{j=1}^{k} T\left(x_{i_j}\right)$$

یعنی T نگاشتی KKM تعمیم یافته می‌باشد .

لم ۱-۳-۸ :

فرض کنید X مجموعه‌ای غیرتهی از فضای برداری توپولوژیک E باشد . اگر $T: X \to 2^E$ نگاشت مجموعه‌مقدار KKM تعمیم یافته باشد آنگاه خانواده $\left\{\overline{T(x)} : x \in X\right\}$ دارای خاصیت مقطع متناهی می‌باشد .

اثبات : فرض کنید $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in < X >$. از این که T نگاشت KKM تعمیم یافته می‌باشد $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \in < E >$ موجود است چنانکه $Co\{y_i : i \in I\} \subseteq \bigcup_{i\in I} T(x_i)$ برای هر زیرمجموعه متناهی I از $\{1, \dots, n\}$.

قرار می‌دهیم $Co\{y_i : i = 1, \dots, n\} = B$ و تعریف می‌کنیم $G_i = \overline{T(x_i)} \cap B$ برای هر $i = 1, \dots, n$.

به وضوح هر G_i زیرمجموعه‌ای بسته از B می‌باشد . تابع φ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\varphi: \Delta_n \to B$$

$$\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$$

که به وضوح پیوسته است (زیرا در فضای برداری توپولوژیک ، جمع وضرب اسکالر پیوسته است)

$$if : a \in \varphi(Co\{e_i : i \in I\}) \Rightarrow a = \varphi(t) ; t = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \quad , \sum_{i\in I} \lambda_i = 1$$

آنگاه $t = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ، که برای $j = 0, \dots, n$ ، $\lambda_j = \begin{cases} \lambda_i & j = i \in I \\ 0 & j \notin I \end{cases}$.

$$a = \varphi(t) = \varphi\left(\left(\lambda_j\right)_{j=0}^{n}\right) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j y_j = \sum_{i\in I} \lambda_i y_i \in Co\{y_i : i \in I\}$$

در نتیجه : $\varphi(Co\{e_V : i \in I\}) \subseteq Co\{y_i : i \in I\}$.

از طرفی $Co\left\{y_i : i \in I\right\} \subseteq \bigcup_{i\in I} T(x_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{T(x_i)} \cap B = \bigcup_{i\in I} G_i$.

پس برای هر زیرمجموعه متناهی I از $\{0, 1, \dots, n\}$ داریم :

$$\varphi(Co\{e_i : i \in I\}) \subseteq Co\{y_i : i \in I\} \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i \,.$$

از این که G_i بسته و φ پیوسته است ، برای هر $i = ۱, \dots, n$ ، $\varphi^{-۱}(G_i)$ بسته است و

$$\varphi(Co\{e_i : i \in I\}) \subseteq \bigcup_{i\in I} \varphi^{-۱}(G_i) \,.$$

بنابراین از گزاره (۱-۳-۵) داریم $\bigcap_{i=\circ}^{n} \varphi^{-۱}(G_i) \neq \emptyset$ ، لذا $\emptyset \neq \bigcap_{i=\circ}^{n} \varphi^{-۱}(G_i) \subseteq \bigcap_{i=\circ}^{n} \varphi^{-۱}\left(\overline{T(x_i)}\right)$ پس برای هر $z \in \bigcap_{i=\circ}^{n} \varphi^{-۱}\left(\overline{T(x_i)}\right)$ نتیجه می‌شود $\varphi(z) = \bigcap_{i=\circ}^{n}\left(\overline{T(x_i)}\right)$ که این اثبات را تمام می‌کند .

گزاره ۱-۳-۹ :

فرض کنید X مجموعه‌ای غیرتهی از فضای برداری توپولوژیک E باشد . در این صورت اگر $T : X \to ۲^E$ نگاشت مجموعه‌مقدار KKM باشد آنگاه خانواده $\{\overline{T(x)} : x \in X\}$ دارای خاصیت مقطع متناهی می‌باشد .

این گزاره نتیجه مستقیم لم قبل است .

در مثال بعد نشان می‌دهیم نگاشت‌های مجموعه‌مقداری موجودند که KKM نیستند اما دارای خاصیت مقطع متناهی می‌باشند .

مثال ۱-۳-۱۰ [۴۷] :

فرض کنید $E = \mathbb{R}^۲$ و $X = ([-۱,۱] \times \{\circ\}) \cup \{(\circ,۱)\}$ تعریف می‌کنیم :

$$T : X \to ۲^E$$
$$T(a,b) = \{(z,\circ) : z \in a + [-۱,۱]\} \,.$$

آنگاه F خاصیت مقطع متناهی دارد اگرچه نگاشت KKM نیست . زیرا $(\circ,۱) \notin T(\circ,۱) = [-۱,۱] \times \{\circ\}$ یعنی نگاشت T ، KKM نیست . اکنون برای هر $\{x_۱, x_۲, \dots, x_n\} \in < X >$ قرار می‌دهیم :

$$\begin{cases} y_i = x_i & x_i \in [-۱,۱] \times \{\circ\} \\ y_i = (\circ,۱) & x_i \in (\circ,۱) \end{cases}$$

در این صورت می‌بینیم که $Co\{y_i : i \in I\} \subseteq [-۱,۱] \times \{\circ\} \subseteq X$. بنابراین $Co\{y_i : i \in I\} \subseteq \bigcup_{i\in I} T(x_i)$ برای هر زیرمجموعه متناهی I از $\{۱, \dots, n\}$. که نشان می‌دهد T نگاشتی KKM تعمیم یافته می‌باشد . از لم (۱-۳-۸) می‌توان نتیجه گرفت که T دارای خاصیت مقطع متناهی است درواقع $\forall x = (a,b) \in X$ ، $(\circ,\circ) \in T(a,b)$.

قضیه ۱-۳-۱۱ :

فرض کنید X مجموعه‌ای غیرتهی از فضای برداری توپولوژیک E باشد . اگر $T: X \to 2^X$ نگاشتی مجموعه‌مقدار بامقادیر بسته باشد و نیز وجود داشته باشد $x_0 \in X$ چنانکه $T(x_0)$ فشرده باشد ، در این صورت : T نگاشت KKM تعمیم یافته است $\Leftrightarrow$ $\cap_{x \in X} T(x) \neq \emptyset$.

اثبات : فرض کنید $\cap_{x \in X} T(x) \neq \emptyset$ ، آنگاه $\{T(x): x \in X\}$ خاصیت مقطع متناهی دارد . بنابراین برای هر $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in < X >$ وجود دارد $y \in X$ چنانکه $y \in \bigcap_{i=1}^{n} T(x_i)$. قرار می‌دهیم $y = y_i$ برای هر $i = 1, \dots, n$. لذا داریم :

$$Co\{y_i: i \in I\} = \{y\} \subseteq \bigcup_{i \in I} T(x_i)$$

برای هر زیرمجموعه متناهی I از $\{1, \dots, n\}$. یعنی T نگاشت KKM تعمیم یافته است .

برای اثبات عکس قضیه قرار می‌دهیم $F(x) = T(x) \cap T(x_0)$ که چون مقادیر T بسته و $T(x_0)$ فشرده است . لذا برای هر x ، $F(x)$ فشرده است و از آنجا که T نگاشت KKM تعمیم یافته است . طبق گزاره (۱-۳-۹) خانواده $\{F(x)\}_{x \in X}$ از مجموعه‌های فشرده دارای خاصیت مقطع متناهی می‌باشند .لذا :

$$\bigcap_{x \in X} T(x) = \bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset .$$

تعریف ۱-۳-۱۲ :

فرض کنید X و Y دو زیرمجموعه غیرتهی از فضای برداری E باشند و $T, F: X \to 2^Y$ دو نگاشت مجموعه‌مقدار باشند . گوییم F نگاشت KKM تعمیم یافته نسبت به T است هر گاه برای هر زیرمجموعه متناهی $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in < X >$ وجود داشته باشد $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \in < X >$ چنانکه :

۱) $Co(B) \subseteq X$ ،

۲) $T(Co\{y_i: i \in I\}) \subseteq \bigcup_{i \in I} F(x_i)$ برای هر زیرمجموعه متناهی I از $\{1, \dots, n\}$.

مثال ۱-۳-۱۳ [۴۷] :

فرض کنید $X = [-2, -1] \cup [1,2]$. تعریف می‌کنیم $g: X \to X$ با ضابطه $g(x) = -x$ و $F: X \to 2^{\mathbb{R}}$ به صورت $F(x) = \begin{cases} -x + [-1,1] & x \in [1,2] \\ x + [-1,1] & x \in [-2, -1] \end{cases}$.

برای هر زیرمجموعه متناهی $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in < X >$ قرار می‌دهیم: