بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

متروید‌های (L, M)-فازی

ابراهیم فیض‌الهی عنصرودی

مرکز آموزش‌های نیمه حضوری

گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر حبیب اذانچیلر

شهریور ۱۳۸۹

پایان نامه آقای : ابراهیم فیض الهی عنصرودی به تاریخ : ۱۳۸۹/۶/۱۷ شماره : ۲۷۹-۳

مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۹ (به حروف نوزده تمام)

قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر حبیب اذانچیلر

۲- داور خارجی: دکتر قدرت اله آزادی

۳- داور داخلی: دکتر علی عبادیان

۴- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر علی اصغر ثیاب قدسی

با سپاس و احترام تقدیم به:

پدر فداکارم

مادر مهربانم

خواهر عزیزم

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی‌شمارش بر لحظه لحظه‌ی زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گسترده‌ی دانش اساتیدم بویژه استاد راهنمای گرامیم جناب آقای دکتر اذانچیلر را نصیب و روزی‌ام گردانید. در نهایت از پدر و مادر عزیزم سپاس‌گزاری می‌کنم که با به وجود آوردن شرایط مناسب مرا یاری نمودند.

ابراهیم فیض‌الهی عنصرودی
تابستان ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان‌نامه انواع روش‌های بسط ماترویدها با استفاده از ریاضیات فازی و نظریه‌ی مشبکه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. ماترویدهای فازی، ماترویدهای L-فازی شده، L- ماترویدها و ماترویدهای (L, M)- فازی در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفته‌اند. ماترویدهای (L, M)-فازی جدیدترین و جامع‌ترین روش بسط ماترویدها محسوب می‌شود و تمام مطالب موجود برای این نوع از ماترویدهای فازی در این پژوهش آورده شده‌اند.

پیشگفتار

مفهوم ماترویدهای فازی اولین بار در سال ۱۹۸۸ توسط گاتشچل[۱] روسی و واکسمن[۲] آمریکایی که در حیطه‌ی ریاضیات کاربردی فعالیت داشتند، معرفی شدند.
چون نظریه ماتروید[۳] به عنوان توسیعی مجرد از ماتریس و گراف در برخی مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی مورد استفاده قرار می‌گرفت ([۱])، این دو ریاضیدان سعی کردند بسطی برای ماترویدها ارائه کنند تا امکان استفاده از ویژگی‌های فازی در مسائل بهینه‌سازی پایه ماترویدی وجود داشته باشد. لذا اکثر مفاهیمی که در سالهای نخستین در حوزه‌ی ماترویدهای فازی مطرح بودند، در تعریف ماتروید فازی و توابع رتبه‌ی فازی ماترویدهای فازی خلاصه می‌شدند. ایده‌ی اصلی تعریف ماترویدهای فازی استفاده از مجموعه‌های فازی به جای مجموعه‌های معمولی بود ([۳]).

در طی سالهای بعد از ۱۹۸۸ افراد دیگری با استفاده از مفاهیم سیستم‌های فازی[۴] روش‌های جایگزینی برای تعریف ماترویدهای فازی معرفی کردند ([۷]). فضاهای مستقل فازی [۵] پایه‌ی روش‌های جدید را تشکیل می‌داد. به علت برخی پیچیدگی‌ها این روش‌ها با

---

[۱] R.Goestschel

[۲] W.Voxman

[۳] Matroid theory

[۴] Fuzzy systems

[۵] Fuzzy independence space

استقبال زیادی رو به رو نشدند، این رده‌های جدید pre–ماترویدهای فازی[6] نام گرفتند. در منابع [۱۲]، [۱۳] و [۱۴] ویژگی‌های این نوع ماترویدها در بستر سیستم‌های فازی بررسی شده‌اند.

پرفسور «فو.جی.شی[7]» در سال ۲۰۰۹ بر پایه‌ی توپولوژی و جبر فازی، رده‌ای جدید از ماترویدهای فازی را معرفی کرد. وی استفاده از نگاشت را به جای خانواده‌ای از مجموعه‌های معمولی در تعریف ماتروید معمولی، پایه‌ی کارهایش قرارداد ([۱۹]). هدف وی از این کار وارد کردن گراف‌های فازی به حوزه‌ی ماترویدهای فازی بود، زیرا امکان استفاده از گراف‌های فازی در مسائل بهینه‌سازی و جبر فازی وجود داشت. ماترویدهای L–فازی شده[8] حاصل اولین کوشش‌های وی در بسط ماترویدها بود. پرفسور «فو.جی.شی» در سال ۲۰۰۹ با ارائه‌ی مقاله‌ی

(L, M)-fuzzy matroids, fuzzy sets and systems 160 (2009), 2387-2400

جدیدترین و کلی‌ترین روش بسط ماترویدها را با معرفی $L-$ ماترویدها و ماترویدهای (L, M)–فازی ارائه کرد. این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ی فوق تنظیم شده است.

برای ماترویدهای فازی، کاربردهایی در مسائل بهینه‌سازی پایه ماترویدی[9] که اغلب بر الگوریتم گریدی[10] استوارند، در منابع [۵] و [۹] بیان شده است. ولی تاکنون برای ماترویدهای (L, M)–فازی کاربردی در بهینه‌سازی تعریف نشده است. علت آن هم جدید بودن مطالب است.

در این قسمت خلاصه‌ای از فعالیت‌های صورت گرفته در پایان‌نامه را بیان می‌کنیم. در فصل یک پایان‌نامه، گستره‌ی متنوعی از مقدمات مورد نیاز از مفاهیم و تعاریف که برای

---

[6] Fuzzy pre- matroid

[7] F. G. Shi

[8] $L-$ fuzzifying matroids

[9] Matroid-based optimization

[10] Greedy algorithm

درک مطالب در فصول بعد ضروری می‌باشند، بیان شده‌اند. در فصل دو متروید‌های فازی گاتشچل و واکسمن را بررسی کرده‌ایم. این نوع از متروید‌ها بستر مناسبی را برای فازی‌سازی مطالب نظریه‌ی متروید‌های معمولی ایجاد کرده است. در فصل سه مفهوم متروید‌های L-فازی شده و L-متروید‌ها را تشریح خواهیم کرد. در فصل چهار با ترکیب متروید‌های معرفی شده در فصل سه، متروید‌های (L, M)-فازی را بررسی خواهیم کرد. در فصل پنج برای اولین بار در متروید‌های فازی، متروید فازی ترانسورسال به عنوان نتیجه‌ای از پژوهش‌های صورت گرفته به اختصار معرفی می‌گردد.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل مروری بر مفاهیم بنیادی نظریه‌ی متروید، نظریه‌ی مشبکه و نظریه‌ی مجموعه‌های فازی خواهیم داشت. به علت تنوع زیاد مطالب در فصل اول، سعی کرده‌ایم ضروری‌ترین مطالب را گردآوری کنیم. در فصول ۳ و ۴ از نظریه‌ی مشبکه و در فصول ۲ و ۳ و ۴ از نظریه‌ی مجموعه‌های فازی استفاده خواهیم کرد. مطالب این فصل برگرفته از مراجع [۲]، [۸]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۵]، [۱۷]، [۱۸]، [۲۰] و [۲۱] می‌باشند.

۱.۱ تعاریف بنیادی نظریه‌ی متروید

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید E مجموعه‌ای متناهی و $\mathcal{I}$ گردایه‌ای ناتهی از زیر مجموعه‌های E باشد که در شرایط زیر صدق می کند:

(I۱) $\phi \in \mathcal{I}$؛

(I۲) اگر $A \in \mathcal{I}$ و $B \subseteq A$، آنگاه $B \in \mathcal{I}$؛

(I۳) اگر $A, B \in \mathcal{I}$ و $|A| < |B|$، آنگاه عضوی مانند $e \in B - A$ وجود دارد به طوری که $A \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

در این صورت جفت $M = (E, \mathcal{I})$ یک مترویدِ[1] نامیده می‌شود. E را مجموعه‌ی زمینه‌ی مترویدِ M و $\mathcal{I}$ را خانواده‌ی مجموعه‌های مستقل مترویدِ M می‌نامیم.

زیر مجموعه‌هایی از E را که در $\mathcal{I}$ نیستند، مجموعه‌های وابسته‌ی مترویدِ M می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ هر زیر مجموعه‌ی وابسته مینیمال مترویدِ M را یک دور[2] گوییم و مجموعه‌ی تمامی دورهای مترویدِ M را با $\mathcal{C}(M)$ یا $\mathcal{C}$ نشان می‌دهیم.

خواص زیر در مورد $\mathcal{C}(M)$ برقرار است:

(C۱) $\phi \notin \mathcal{C}$؛

(C۲) اگر $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ و $c_2 \subseteq c_1$، آنگاه $c_1 = c_2$؛

(C۳) اگر c_1 و c_2 دو عضو متمایز $\mathcal{C}$ باشند و $e \in c_1 \cap c_2$، آنگاه عضوی مثل c_3 از $\mathcal{C}$ وجود دارد به طوری که $c_3 \subseteq (c_1 \cup c_2) - \{e\}$.

تعریف ۳.۱.۱ هر مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال مترویدِ M را یک پایه‌ی[3] M گوییم.

---

[1] Matroid
[2] Circuit
[3] Base

لم ۴.۱.۱ فرض کنید $B_۱$ و $B_۲$ دو پایه از مترویـد M باشند، در این صورت $|B_۱| = |B_۲|$.

برهان : [[۱۵]، لم (۱.۲.۱)]. ■

تعریف ۵.۱.۱ گردایه‌ی تمامی پایه‌های متروید M را با β یا $\beta(M)$ نمایش می‌دهیم که خواص زیر برای آن برقرار است:

(B۱) $\beta \neq \phi$؛

(B۲) فرض کنید $B_۱, B_۲ \in \beta$ و $x \in B_۱ - B_۲$، در این صورت عضو $y \in B_۲ - B_۱$ وجود دارد که $(B_۱ - x) \cup y \in \beta$.

گزاره ۶.۱.۱ فرض کنید E مجموعه یال‌های گراف G و C گردایه‌ی تمام دورهای G باشد. در این صورت C گردایه‌ی دورهای یک متروید روی مجموعه‌ی E است. این متروید را متروید دوری[۴] گراف G گوییم و آن را با $M(G)$ نمایش می‌دهیم.

برهان : [[۱۵]، لم (۷.۱.۱)]. ■

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید $M = (E, \mathcal{I})$ یک متروید و $X \subseteq E$ باشد. فرض کنید:

$$\mathcal{I}\Big|_X = \{I \subseteq X | I \in \mathcal{I}\}$$

[۴] Cycle matroid

می‌توان دید که $(X, \mathcal{I}|_X)$ یک متروید است. این متروید را متروید تحدید[۵] M به X یا حذف $E - X$ از M گوییم و به ترتیب با نماد $M|_X$ یا $M \backslash E - X$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱ چون $M|_X$ یک متروید است، پس پایه‌های آن دارای تعداد مساوی عضو هستند. رتبه‌ی[۶] X در M را تعداد اعضای پایه‌ی $M|_X$ تعریف می‌کنیم. در حقیقت $r(X)$ در M تعداد اعضای زیر مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال X است:

$$r(X) = \max\{|Y|; Y \subseteq X, \quad Y \in \mathcal{I}(M)\}$$

در حقیقت r تابعی است که به هر عضو 2^E یک عدد صحیح نامنفی نسبت می‌دهد، $r : 2^E \to Z^+ \cup \{0\}$. رتبه‌ی متروید M عبارت است از $r(E(M))$ که با $r(M)$ نمایش می‌دهیم. بدیهی است که برای هر مجموعه‌ی مستقل $X \subseteq E$، داریم: $r(X) = |X|$.

تعریف ۹.۱.۱ تابع رتبه‌ی متروید $M = (E, \mathcal{I})$ دارای خواص زیر است:

(R۱) اگر $X \subseteq E$، آنگاه $0 \leq r(X) \leq |X|$؛

(R۲) اگر $X \subseteq Y \subseteq E$، آنگاه $r(X) \leq r(Y)$؛

(R۳) تابع رتبه‌ی یک متروید، تابعی زیر مدولار است. این خاصیت به صورت یک لم بیان می‌شود:

---

[۵] Restriction

[۶] Rank

لم ۱۰.۱.۱ اگر X و Y دو زیر مجموعه‌ی E باشند، آنگاه

$$r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$$

برهان : [[۱۵]، قضیه (۱.۳.۱)]. ■

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید M یک متروید روی مجموعه‌ی زمینه‌ی $E(M)$ با تابع رتبه‌ی r باشد. تابع $cl : ۲^E \to ۲^E$ را برای هر $X \subseteq E$ با ضابطه‌ی $cl(X) = \{x \in E;\ \ r(X \cup x) = r(X)\}$ تعریف می‌کنیم. این تابع را عملگر بستار[۷] M گوییم.

لم ۱۲.۱.۱ عملگر بستار متروید M روی E دارای خواص زیر است:

(CL۱) اگر $X \subseteq E$، آنگاه $X \subseteq cl(X)$؛

(CL۲) اگر $X \subseteq Y \subseteq E$، آنگاه $cl(X) \subseteq cl(Y)$؛

(CL۳) اگر $X \subseteq E$، آنگاه $cl(cl(X)) = cl(X)$؛

(CL۴) اگر $X \subseteq E$ و $x \in E$ و $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$، آنگاه $x \in cl(X \cup Y)$.

برهان : [[۱۵]، قضیه (۲.۴.۱)]. ■

تعاریف معادل برای مترویدهای معمولی وجود دارد که ساده‌ترین آنها در تعریف زیر آورده شده است.

---

[۷] Closur Operator

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید E مجموعه‌ای متناهی باشد و $\mathcal{I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیر مجموعه‌های E باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(I۱) اگر $A \in \mathcal{I}$ و $B \subseteq A$، آنگاه $B \in \mathcal{I}$ (ویژگی موروثی[۸])؛

(I۲) اگر $A, B \in \mathcal{I}$ و $|A| < |B|$، آنگاه عضوی مانند $C \in \mathcal{I}$ وجود دارد به طوری که $A \subsetneq C \subseteq A \cup B$ (ویژگی تعویض[۹]).

در این صورت جفت $M = (E, \mathcal{I})$ یک ماترویید معمولی نامیده می‌شود.

توجه ۱۴.۱.۱ بررسی معادل بودن تعاریف (۱.۱.۱) و (۱۳.۱.۱) در مرجع [۳] بیان شده است.

۲.۱ مروری بر نظریه‌ی مشبکه

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید $A \times B$ حاصلضرب دکارتی دو مجموعه‌ی A و B باشد. یعنی

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$$

[۸] Hereditary property
[۹] Exchange property

هر زیر مجموعه R از $A \times B$، یک رابطه[۱۰] بین A و B تعریف می‌کند و اصطلاحاً گوییم رابطه‌ی دو بعدی R بر $A \times B$ تعریف شده است.

تعریف ۲.۲.۱ رابطه‌ی R تعریف شده بر $A \times A$ را یک رابطه‌ی هم‌ارزی[۱۱] گوییم هرگاه به ازای هر a و b و c از A داشته باشیم:

۱) $(a, a) \in R$ (ویژگی بازتابی)؛

۲) اگر $(a, b) \in R$، آنگاه $(b, a) \in R$ (ویژگی تقارن)؛

۳) اگر $(a, b), (b, c) \in R$، آنگاه $(a, c) \in R$ (ویژگی تعدی).

تعریف ۳.۲.۱ رابطه‌ی R تعریف شده بر $A \times A$ را یک رابطه‌ی ترتیب جزئی[۱۲] گوییم هرگاه به ازای هر a و b و c از A داشته باشیم:

۱) $(a, a) \in R$ (ویژگی بازتابی)؛

۲) اگر $(b, a), (a, b) \in R$، آنگاه $a = b$ (ویژگی پادتقارن)؛

۳) اگر $(a, b), (b, c) \in R$، آنگاه $(a, c) \in R$ (ویژگی تعدی).

تعریف ۴.۲.۱ مجموعه‌ای که ترتیبی جزئی بر آن تعریف شده باشد را مجموعه‌ی جزئاً مرتب[۱۳] گوییم. در این بخش در بیشتر موارد رابطه را $\leq$ در نظر خواهیم گرفت.

[۱۰] Relation
[۱۱] Equivalence relation
[۱۲] Partial order relation
[۱۳] Poset

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید مجموعه‌ی L با رابطه‌ی ترتیب جزئی $\leq$ مرتب شده باشد. گوییم a کران پایین[۱۴] مجموعه‌ی $X \subseteq L$ است در صورتی که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم: $a \leq x$.

همچنین گوییم b کران بالای[۱۵] مجموعه‌ی $X \subseteq L$ است در صورتی که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم: $x \leq b$. بزرگترین کران پایین X عنصری است مانند $d_\circ$ از X به طوری که به ازای هر کران پایین دیگر d از X داشته باشیم: $d \leq d_\circ$. بزرگترین کران پایین X را با $\wedge X$ یا $\inf X$ نشان می‌دهیم.

کوچکترین کران بالای X عنصری است مانند $t_\circ$ از X به طوری که به ازای هر کران بالای دیگر t از X داشته باشیم: $t_\circ \leq t$. کوچکترین کران بالای X را با $\vee X$ یا $\sup X$ نشان می‌دهیم.

اغلب برای جفتی از اعضای X می‌نویسیم: $x \vee y = \sup\{x, y\}$ و $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

عملگر $x \vee y$ را اتصال[۱۶] و عملگر $x \wedge y$ را تماس[۱۷] می‌نامیم.

تعریف ۶.۲.۱ $(L, \leq)$ را یک مشبکه[۱۸] گوییم هر گاه به ازای هر $a, b \in L$، مجموعه‌ی $\{a, b\}$ بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالا داشته باشد. به عبارت دیگر، هر

[۱۴] Lower bound
[۱۵] Upper bound
[۱۶] join
[۱۷] meet
[۱۸] Lattice

مجموعه‌ی جزئاً مرتبی که در آن هر جفتی از عناصر هم بزرگترین کران پایین و هم کوچکترین کران بالا داشته باشد، یک مشبکه نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۲.۱ مشبکه‌ی $(L, \leq)$ را تام[۱۹] (کامل) گوییم در صورتی که هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از L، کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین داشته باشد. به عبارت دیگر، مشبکه‌ی تام یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است که در آن هر زیر مجموعه‌ای سوپریمم و اینفیمم دارد.

تعریف ۸.۲.۱ فرض کنید L مشبکه‌ای تام باشد. L یک مشبکه‌ی کاملاً توزیع‌پذیر[۲۰] نامیده می‌شود، هرگاه شرایط زیر برای L برقرار باشد:

$$\bigwedge_{i\in I}\Big(\bigvee_{j\in J_i} a_{i,j}\Big) = \bigvee_{f\in\prod J_i}\Big(\bigwedge_{i\in I} a_{i,f(i)}\Big) \qquad (\text{CD}۱)$$

$$\bigvee_{i\in I}\Big(\bigwedge_{j\in J_i} a_{i,j}\Big) = \bigwedge_{f\in\prod J_i}\Big(\bigvee_{i\in I} a_{i,f(i)}\Big) \qquad (\text{CD}۲)$$

که به ازای $i \in I$ و به ازای $j \in J_i$، $a_{i,j} \in L$ و $f \in \prod J_i$ یعنی این که $f : I \to \cup J_i$ نگاشتی است، به طوری که به ازای هر $i \in I$، $f(i) \in J_i$.

به عبارت دیگر، مشبکه‌ی تام L، مشبکه‌ی کاملاً توزیع‌پذیر نامیده می‌شود در صورتی که «بزرگترین کران پایین» از یک قانون توزیع‌پذیری نسبت به «کوچکترین کران بالا» تبعیت کند و به عکس.

[۱۹] Complete Lattice

[۲۰] Completely distributive lattice