دانشگاه تفرش
دانشکده ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

گراف‌های سودار و مجموعه احاطه‌کننده

استاد راهنمای پایان‌نامه

پروفسور دوستعلی‌مژده

نگارش

حمید داوری

۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تفرش
دانشکده ریاضی

رساله پایان‌نامه کارشناسی ارشد حمید داوری

تحت عنوان

گراف‌های سودار و مجموعه احاطه‌کننده

استاد راهنما: پروفسور دوستعلی‌مژده امضاء:

استاد ممتحن داخلی: امضاء:

استاد ممتحن خارجی: امضاء:

تقدیم به

پدر بزرگوار

مادر مهربان

و

تمام کسانی که دوستشان دارم

تقدیر و تشکر ...

الهی !

تا آموختنی را آموختم و آموخته را جمله بسوختم، انداخته را برانداختم و اندوخته را بیندوختم، نیست را بفروختم تا هست را بیفروختم.

الهی !

تا یگانگی بشناختم در آرزوی شادی بگداختم، کی باشد که گویم پیمانه بینداختم و از علایق وا پرداختم و بود خویش جمله درباختم.

کی باشد کین قفس بپردازم   در باغ الهی آشیان سازم

پس از سپاس خالق هستی بر خود واجب می‌دانم که تقدیر و تشکر خود را از پدر و مادر عزیزم ابراز دارم، کسانی که در تمام طول زندگی همراه و یاری دهنده‌ای بی‌نظیر بوده‌اند و همچنین سپاس از اعضای خانواده‌ام و همه دوستان به ویژه دوست عزیزم سید مهدی حسینی که در این راه مرا یاری دادند.

از تمام اساتیدی که از محضرشان کسب علم کرده‌ام کمال تشکر را دارم، سپاس و تشکر ویژه و خسته نباشید به استاد عزیزم جناب پروفسور مژده که در این مدت دلسوزانه و با حوصله بنده را تحمل کردند و با کمک‌های بی‌دریغ خودشان مرا در این راه کمک کردند که بی‌شک اگر راهنمایی‌های خردمندانه ایشان نبود انجام این کار برایم بسی دشوار بود و با امید و دلگرمی که به من بخشیدن مرا در هرچه بهتر کردن این رساله یاری دادند.

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا مجموعه احاطه‌کننده و تعاریف دیگر مورد نیاز بیان می‌شوند. سپس الگوریتمی را برای یافتن مجموعه احاطه‌کننده در گراف‌های ساده بیان خواهیم کرد و در ادامه الگوریتم دیگری خواهیم داشت که مجموعه احاطه‌کننده مینیمال را در گراف‌های ساده بدست می‌آورد. در قسمت‌های بعد انواع احاطه‌کننده را در گراف‌های ساده بررسی خواهیم کرد و با ارائه دادن کران‌هایی برای عدد احاطه‌کننده، بحث در گراف‌های ساده را خاتمه می‌دهیم.

مجموعه احاطه‌کننده در گراف‌های سودار و بدست آوردن مجموعه احاطه‌کننده را در چند حالت بررسی می‌کنیم. احاطه در گراف‌های سودار معکوس و احاطه‌کننده توام را در قسمت‌های بعد بیان خواهیم کرد، در ادامه چند کران را برای عدد احاطه‌کننده در گراف‌های سودار مطرح خواهیم کرد.

در دو قسمت آخر، نتایج این پایان‌نامه را خواهیم آورد. قسمت اول شامل دو الگوریتم برای یافتن مجموعه احاطه‌کننده و مجموعه احاطه‌کننده مینیمال در گراف‌های سودار و کران برای عدد احاطه‌کننده در گراف‌های سودار می‌باشد و در قسمت دوم تغییرات مجموعه احاطه‌کننده مینیمال را هنگام حذف یک راس خواهیم دید.

کلمات کلیدی: *مجموعه احاطه‌کننده، گراف سودار، مینیمم عدد احاطه‌کننده، یال، راس، معکوس گراف و مجموعه احاطه‌کننده توام.*

فهرست مطالب

فهرست مطالب **الف**

۱ تاریخچه و تعاریف مقدماتی **۱**

۱.۱ تاریخچه ۱

۲.۱ تعاریف مقدماتی ۲

۲ مجموعه احاطه‌کننده در گراف‌های ساده **۸**

۱.۲ الگوریتمی برای یافتن مجموعه احاطه‌کننده ۸

۲.۲ مجموعه احاطه‌کننده ۱۴

۱.۲.۲ احاطه‌کننده ۱۴

۲.۲.۲ احاطه‌کننده همبند ۱۷

۳.۲.۲ احاطه‌کننده مستقل ۱۸

۴.۲.۲ احاطه‌کننده کلی ۲۱

۵.۲.۲ احاطه‌کننده موضعی ۲۲

۶.۲.۲ k–احاطه کننده و احاطه‌کننده رومی ۲۳

۷.۲.۲ انواع احاطه‌کننده دیگر ۲۷

۳.۲ کران برای عدد احاطه‌کننده ۲۸

۳ مجموعه احاطه‌کننده در گراف‌های سودار (جهت‌دار) **۳۳**

۱.۳ شروع احاطه در گراف‌های سودار ۳۳

۲.۳ بدست‌آوردن مجموعه احاطه‌کننده ۳۶

۱.۲.۳ احاطه‌کننده مینیمال پس از اضافه‌کردن یال ۳۶
۲.۲.۳ احاطه‌کننده مینیمال پس از حذف یال ۴۲
۳.۳ احاطه در گراف‌های سودار معکوس ۴۴
۴.۳ احاطه‌کننده توام و احاطه‌کننده توام $k-$ تایی ۴۹
۵.۳ کران برای عدد احاطه‌کننده ۶۲

۴ نتایج **۶۶**
۱.۴ احاطه‌کننده مینیمال و کران برای یک گراف دلخواه ۶۶
۲.۴ احاطه‌کننده مینیمال پس از حذف راس ۷۳

مراجع **۷۸**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۸۰**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۸۲**

پیش گفتار

پیشرفت‌های اخیر در ریاضیات، به ویژه در کاربردهای آن موجب گسترش چشمگیر نظریهٔ گراف شده است به‌گونه‌ای که هم‌اکنون نظریهٔ گراف ابزار بسیار مناسبی برای تحقیق در زمینه‌های گوناگونی مانند نظریهٔ کدگذاری، شبکه‌های الکتریکی، تحقیق‌درعملیات، برنامه‌نویسی کامپیوتری، شیمی، زیست شناسی، آمار، علوم اجتماعی و سایر زمینه‌ها گردیده است.

در واقع نظریهٔ گراف در ریاضیات شاخه‌ای از توپولوژی است، که با جبر و نظریهٔ ماتریس‌ها پیوند مستحکم و تنگاتنگی دارد. نظریهٔ گراف میدان خوشایندی برای کشف فنون اثبات در ریاضیات گسسته است، و نتایج آن دارای کاربردهای بسیاری در زمینه‌های محاسباتی، اجتماعی و علوم تجربی می‌باشد.

در این پایان‌نامه در فصل اول تاریخچه‌ای از گراف و همچنین تعاریف مقدماتی و اولیه که نیاز داریم، آورده شده است.

در فصل دوم بحث مجموعه‌های احاطه‌کننده در گراف‌های ساده را مطرح می‌کنیم که در بخش اول آن اشاره‌ای به بدست‌آوردن مجموعه احاطه‌کننده برای یک گراف خواهیم کرد و در بخش دوم به چند نوع از احاطه‌کننده‌ها مانند احاطه‌کننده همبند، مستقل، کلی، موضعی و $k-$احاطه‌کننده اشاره خواهیم کرد و در قسمت آخر بخش دوم مختصر اشاره‌ای در حد تعاریف به چند نوع دیگر احاطه‌کننده خواهیم کرد و درنهایت در بخش آخر فصل دوم بحث مهم کران برای عدد احاطه‌کننده را مطرح خواهیم کرد.

در فصل سوم مبحث اصلی این پایان‌نامه، احاطه‌کننده‌ها در گراف‌های سودار را بررسی خواهیم کرد، ابتدا در بخش اول شروع احاطه در گراف‌های سودار را آورده‌ایم، در بخش دوم

بدست‌آوردن مجموعه احاطه‌کننده برای گراف سودار را در حالت‌های اضافه کردن یال، حذف یال بررسی خواهیم کرد، در بخش سوم با تعریف معکوس یک گراف، احاطه در گراف‌های سودار معکوس و رابطه اعداد احاطه‌کننده آن‌ها را، با هم مطرح خواهیم کرد، در بخش چهارم احاطه‌کننده توام و احاطه‌کننده توام $k-$تایی را بررسی می‌کنیم و در بخش پنجم بر روی کران کار خواهیم کرد و در فصل چهارم، نتایج این رساله در دو بخش آمده است.

فصل ۱

تاریخچه و تعاریف مقدماتی

۱.۱ تاریخچه

چگونه می‌توان شبکه‌ای کابلی را با حداقل هزینه نصب کرد و هر تلفن هم در دسترس باشد؟ سریعترین راه از پایتخت به مرکز هر ایالت کدام است؟ چگونه n شغل را n نفر می‌توانند اشغال کنند در صورتی که مطلوبیت کل حداکثر باشد؟ شارش ماکسیمم در واحد زمان از منبع برای ورود به یک شبکه از لوله‌ها چقدر است؟ یک تراشهٔ کامپیوتر به چند لایه نیاز دارد بری اینکه سیم‌ها در یک لایه یکدیگر را قطع نکنند؟ چگونه می‌توان فصل یک لیگ ورزشی را برای حداقل تعداد هفته برنامه‌ریزی کرد؟ یک فروشندهٔ دوره گرد به چه ترتیب باید از شهرها دیدن کند تا زمان سفر حداقل گردد؟ آیا می‌توان ناحیه‌های یک نقشه را با چهار رنگ به گونه‌ای رنگ‌آمیزی کرد که ناحیه‌های همسایه رنگ‌های متفاوت داشته باشند؟

این مسائل و بسیاری دیگر از مسائل عملی سبب شد تا شاهد پیدایش نظریهٔ گراف باشیم.

نظریهٔ گراف شاخه‌ای از ریاضیات است که درباره گراف‌ها بحث می‌کند، به صورت شهودی، گراف نموداری است شامل تعدادی راس، که با یال‌هایی به هم وصل شده‌اند.

آغاز نظریهٔ گراف به سده هجدهم برمی‌گردد که اولر ریاضیدان بزرگ مفهوم گراف را برای حل مسئله‌ی پل‌های کونیگسبرگ ابداع کرد اما رشد و پویایی این نظریه مربوط به نیم‌سده اخیر بوده است.

شروع مطالعه در مورد احاطه‌کننده‌ها حدوداً به سال ۱۹۶۰ برمی‌گردد، البته ریشه‌های آن به سال ۱۸۶۲ برمی‌گردد که ($De.\ Jaenisch$) در مورد مسأله صفحه‌ی شطرنج مطالعه کرد. در سال ۱۹۵۸ ($Claude\ Berge$) کتابی در مورد نظریهٔ گراف نوشت که برای اوّلین بار عدد احاطه‌کننده را البته با نام ضریب پایداری بیرونی تعریف کرد، در سال ۱۹۶۲ ($Oystein\ Ore$) کتابی منتشر کرد که برای اوّلین بار از نام مجموعه احاطه‌کننده و عدد احاطه‌کننده استفاده کرد که عدد احاطه‌کننده را با $d(G)$ نشان داد.

در سال ۱۹۷۷ ($Cockayne$) و ($Hedetniemi$)، $\gamma(G)$ را برای عدد احاطه‌کننده استفاده کردند. در سال‌های بعد تحقیقات روی احاطه‌کننده‌ها ادامه یافت و انواع احاطه‌کننده مانند: احاطه‌کننده کلی، احاطه‌کننده همبند، احاطه‌کننده موضعی، احاطه‌کننده مستقل، احاطه‌کننده محلی، احاطه‌کننده قوی، احاطه‌کننده چندگانه و ... تعریف شد.

شاید بتوان گفت که مهمترین تعریف و مهمترین هدف در احاطه‌کننده‌ها، تعریف عدد احاطه‌کننده و بدست آوردن عدد احاطه‌کننده و یا بهترین کران برای عدد احاطه‌کننده در انواع گراف‌ها می‌باشد که این تحقیقات در همه‌ی انواع احاطه‌کننده و انواع گراف‌ها انجام شده و هنوز ادامه دارد که منجر به کسب نتایج مناسبی در زمینه‌ی کران برای عدد احاطه‌کننده شده است.

حدوداً تا سال ۱۹۹۸ نزدیک به ۱۲۰۰ مقاله در مورد احاطه‌کننده‌ها منتشر شد که تقریباً ۱۰ درصد از آنها در مورد گراف‌های سودار (جهت‌دار) بود [۱۵, ۱۷].

۲.۱ تعاریف مقدماتی

گراف: در حالت کلی مجموعه‌ای از اشیاء و روابط روی آنها را گراف گوییم و معمولاً گراف را به صورت $G=(V,E)$ نشان می‌دهیم که V مجموعه‌ای از اشیاء (رئوس) و E مجموعه‌ای از زوج‌های V (یال) می‌باشد، که در آن هر یال، یک جفت نامرتب از راس‌ها می‌باشد.

مجاور: یک یال بین دو راس u و v را با $\{u,v\}$ یا uv نشان می‌دهیم، که در این حالت u و v را مجاور (همسایه) نامند.

همسایگی: مجموعه همه رئوسی را که با راس v مجاورند، همسایگی باز راس v می‌نامیم و با $N(v)$ نشان می‌دهیم، همسایگی بسته راس v را تعریف می‌کنیم: $N[v] = N(v) \cup \{v\}$

راه: عبارت است از مجموعه‌ای از رئوس و یال‌های متوالی $x_1e_1x_2e_2 \ldots x_ne_nx_{n+1}$ که در آن x_iها رئوس و e_iها یال هستند، که x_iها لزوماً متمایز نیستند و همچنین e_iها نیز لزوماً متمایز نیستند.

مسیر و دور: راهی را که در آن تکرار راس نداشته باشیم، مسیر گویند، مسیر بسته را دور گویند.

دور همیلتونی: دوری در گراف را که از هر راس گراف عبور کند، دور همیلتونی می‌گویند.

گراف همبند: گراف G را همبند گویند، هرگاه بین هر دو راس گراف حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

درجه: تعداد یال‌های گذرنده از یک راس را درجه آن راس گویند و با deg نشان می‌دهند. کمترین درجه گراف را با $\delta(G)$ و بیشترین درجه را با $\Delta(G)$ نشان می‌دهند.

درخت: یک گراف همبند بدون دور را درخت می‌نامند.

گراف تهی: گراف G را که هیچ یالی نداشته باشد، گراف تهی گویند.

گراف کامل: گراف G را گراف کامل گویند، هرگاه هر جفت راس آن مجاور باشند، یعنی از هر راس به کلیه راس‌های دیگر یالی وجود داشته باشد. گراف کامل با n راس را با K_n نشان می‌دهند.

مکمل گراف: مکمل گراف $G = (V, E)$ را با $\overline{G} = (V, E')$ نشان داده که رئوس مکمل گراف همان رئوس گراف می‌باشند و یال e متعلق به E است اگر و تنها اگر متعلق به E' نباشد.

مولفه: مولفه‌های یک گراف G زیرگراف‌های همبند ماکسیمال (ماکسیمال یعنی هیچ بزرگتری شامل این نیست) آن هستند. یک مولفه (یا گراف) نابدیهی است اگر شامل یک یال باشد.

انقباض: انقباض یال $e=(u,v)$ در گراف یعنی حذف رئوس u و v و قرار دادن یک راس به جای آن‌ها، بطوریکه تمام یال‌هایی که به رئوس u و v وارد می‌شوند، به راس جدید وصل شوند.

مجموعه احاطه‌کننده: مجموعه $S \subseteq V(G)$ را یک مجموعه احاطه‌کننده گوییم، اگر هر راسی که در S نباشد، حداقل با یک راس در S مجاور باشد.

مجموعه احاطه‌کننده مینیمال: مجموعه احاطه‌کننده‌ای که زیر مجموعه احاطه‌کننده ندارد.

مجموعه احاطه‌کننده مینیمم: مجموعه احاطه‌کننده‌ای با مینیمم اندازه می‌باشد.

عدد احاطه‌کننده: اندازه مجموعه احاطه‌کننده مینیمم را عدد احاطه‌کننده گویند و با $\gamma(G)$ نشان می‌دهند.

همسایه خصوصی: اگر S یک مجموعه احاطه‌کننده برای گراف G باشد و $v \in S$، آنگاه راس v' از گراف G را یک همسایه خصوصی راس v گویند، هرگاه راس v' با هیچ راسی از $S-\{v\}$ احاطه نشود.

راس اضافی: اگر u راسی از مجموعه احاطه کننده S باشد راس u را اضافی گوییم اگر $S_{-u}=S-\{u\}$ همچنان مجموعه احاطه‌کننده باشد.

گراف سودار (جهت‌دار): اگر یال‌های یک گراف به صورت زوج‌های مرتب رئوس باشند آنگاه گراف را گراف جهت‌دار یا سودار گوییم و معمولاً با $D=(V,E)$ نشان می‌دهیم که V مجموعه‌ی رئوس و E زوج‌های مرتب از رئوس V هستند.

مجاور به (از): یک یال از راس u به راس v را معمولاً با (u,v) نشان می‌دهیم، در این حالت راس u را مجاور به راس v و راس v را مجاور از راس u گوییم.

همسایگی خارجی: در گراف سودار D، همسایگی خارجی راس v را با $N^+(v)$ نشان داده و شامل همه رئوسی مانند w است که (v,w) یک یال در D باشد و

$N^+[v] = N^+(v) \cup \{v\}$

همسایگی داخلی: در گراف سودار D، همسایگی داخلی راس v را با $N^-(v)$ نشان داده و شامل همه رئوسی مانند u است که (u,v) یک یال در D باشد و

$N^-[v] = N^-(v) \cup \{v\}$

احاطه کردن: رأس u احاطه می‌کند راس v را یا راس v توسط راس u احاطه می‌شود هرگاه یال (u,v) در گراف D باشد.

درجه ورودی: درجه ورودی راس v را برابر با تعداد یال‌هایی که وارد راس v می‌شوند تعریف کرده و با $d_D^-(v)$ یا $id(v)$ نشان می‌دهیم:

$d_D^-(v) = id(v) = |\{(u,v) : (u,v) \in D\}|$

درجه خروجی: درجه خروجی راس u را برابر با تعداد یال‌هایی که از u خارج می‌شوند تعریف می‌کنیم و با $d_D^+(u)$ یا $od(u)$ نشان می‌دهیم:

$d_D^+(u) = od(u) = |\{(u,v) : (u,v) \in D\}|$

مجموعه احاطه‌کننده (در گراف جهت‌دار): در گراف جهت‌دار $D = (V,E)$ اگر S مجموعه‌ای از رئوس باشد که $S \subseteq V$ آنگاه S یک مجموعه احاطه‌کننده است اگر هر راس مانند v که $v \in V - S$ با حداقل یک راس از S احاطه شود.

راس v در گراف سودار D رئوس $N^+(v) \cup \{v\}$ را احاطه خارجی می‌کند و رئوس $N^-(v) \cup \{v\}$ را احاطه داخلی می‌کند.

احاطه‌کننده خارجی: مجموعه S از رئوس D را احاطه‌کننده خارجی گویند هرگاه هر راس از D با حداقل یک راس از S احاطه خارجی شود و مینیمم اندازه یک مجموعه احاطه‌کننده خارجی را عدد احاطه‌کننده خارجی گویند و با $\gamma^+(D)$ نشان می‌دهند.
معمولاً عدد احاطه‌کننده خارجی را همان عدد احاطه‌کننده گویند.

احاطه‌کننده داخلی: مجموعه S از رئوس D را احاطه‌کننده داخلی گویند هرگاه هر راس از D با حداقل یک راس از S احاطه داخلی شود و مینیمم اندازه یک مجموعه احاطه‌کننده داخلی را عدد احاطه‌کننده داخلی گویند و با $\gamma^-(D)$ نشان می‌دهند.

همسایه خارجی خصوصی: اگر S یک مجموعه احاطه‌کننده خارجی برای گراف D باشد و $v \in S$، آنگاه راس v' از گراف D را یک همسایه خارجی خصوصی راس v گویند، هرگاه راس v' با هیچ راسی از $S - \{v\}$ احاطه خارجی نشود.

همسایه داخلی خصوصی: اگر S یک مجموعه احاطه‌کننده داخلی برای گراف D باشد و $v \in S$، آنگاه راس v' از گراف D را یک همسایه داخلی خصوصی راس v گویند، هرگاه راس v' با هیچ راسی از $S - \{v\}$ احاطه داخلی نشود.

گراف سودار همبند: گراف سوداری را که گراف زمینه آن (یعنی گراف ساده‌ای که بدون در نظرگرفتن جهت یال‌ها از گراف موردنظر بدست می‌آید) همبند باشد، همبند ضعیف گویند.
یک گراف سودار، همبند است اگر همبند ضعیف باشد.

گراف سودار قویاً همبند: گراف سودار D را قویاً همبند یا هبند قوی گویند، هرگاه برای هر زوج از رئوس گراف D مانند x و y یک مسیر سودار از x به y و همچنین مسیر سوداری از y به x موجود باشد.

گراف سودار دوبخشی: گراف سوداری است که بتوان مجموعه رئوس آن را به دو مجموعه U و V چنان افراز نمود که راس ابتدایی هر یال آن در U و راس انتهایی آن در V باشد.

گراف سودار دوبخشی کامل: گراف سودار دوبخشی که هر راس در U مجاور به همه رئوس در V باشد. گراف دوبخشی کامل که $|U| = m$ و $|V| = n$ باشد را با $\overrightarrow{k_{m,n}}$ نشان می‌دهند.

مولفه‌های قوی گراف سودار D: زیرگراف‌های قویاً همبند ماکسیمال D هستند.

همسانریخت: دو گراف G و H را همسانریخت گویند هرگاه یک تابع یک به یک مانند ψ داشته باشیم:

$\psi : V(G) \longrightarrow V(H)$

بطوریکه $(u, v) \in E(G)$ اگر و تنها اگر $(\psi(u), \psi(v)) \in E(H)$.

* اگر $A, B \subseteq V(D)$، آنگاه مجموعه همه یال‌هایی که رئوس A را به رئوس B وصل می‌کنند با $(A, B)_D$ نشان می‌دهند، که تعداد این یال‌ها را با $q(A, B)$ نشان می‌دهند.

* هنگامی که یال جدید e را که $e \in V \times V - E$ به گراف D اضافه کنیم گراف جدید را با $D_{+e} = (V, E \cup \{e\})$ نشان می‌دهیم.

* هنگامی که یال f را که $f \in E$ از گراف D حذف کنیم، گراف جدید را با $D_{-f} = (V, E - \{f\})$ نشان می‌دهیم.

* اگر راس v را که $v \in V(D)$ از رئوس گراف D حذف کنیم، گراف جدید را با $D_{-v} = (V - \{v\}, E')$ که $E' \subseteq E$ نشان می‌دهیم.

تعاریف، گرفته شده از مراجع [۷, ۱۴, ۱۵, ۱۷].

فصل ۲
مجموعه احاطه‌کننده در گراف‌های ساده

۱.۲ الگوریتمی برای یافتن مجموعه احاطه‌کننده

بدست آوردن یک مجموعه احاطه‌کننده برای یک گراف همبند می‌تواند به عنوان اولین قدم در بحث احاطه‌کننده‌ها باشد، شاید بدست آوردن خود مجموعه احاطه‌کننده زیاد مهم و سخت نباشد ولی می‌تواند شروع خوبی برای یافتن یک مجموعه احاطه‌کننده مینیمال برای گراف باشد.

اگر همه رئوس یک گراف را در یک مجموعه قرار دهیم واضح است که مجموعه بدست‌آمده یک مجموعه احاطه‌کننده برای گراف ذکر شده خواهد بود ولی در واقع بدترین مجموعه احاطه‌کننده خواهد بود، چون بیشترین تعداد راس ممکنه را دارد، بنابراین همیشه در پی یافتن مجموعه احاطه‌کننده‌ای با تعداد راس کمتر هستیم و هرچه تعداد رئوس یک مجموعه احاطه‌کننده کمتر باشد نتیجه بهتر خواهد بود، درواقع هدف اصلی یافتن یک مجموعه احاطه‌کننده مینیمال و بهتر از آن یافتن یک مجموعه احاطه‌کننده مینیمم خواهد بود.

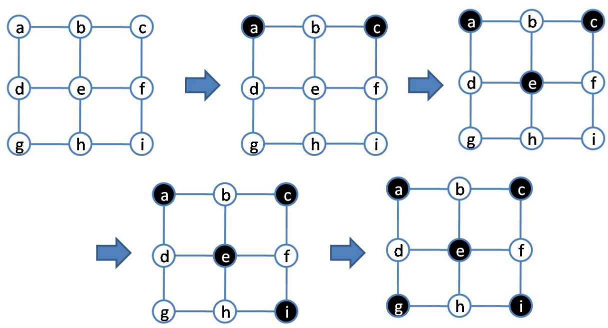
حال در ادامه یک روش ساده را توضیح می‌دهیم که یک مجموعه احاطه‌کننده را برای گراف ذکر شده به ما خواهد داد، باید به این نکته دقت کرد که برای یک گراف با همین روش می‌توان چندین مجموعه احاطه‌کننده یافت و قطعاً مجموعه احاطه‌کننده‌ای که تعداد رئوس آن کمتر باشد، مجموعه احاطه‌کننده بهتری خواهد بود.

ابتدا به همه رئوس گراف عدد صفر یا یک را نسبت می‌دهیم، سپس الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم.

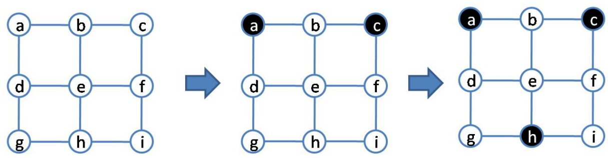
$ALGORITHM1:$
$R1: if\ x(i)=0 \bigwedge (\forall j \in N(i))\ (x(j)=0)$
$then\ \ x(i)=1;$
$R2: if\ x(i)=1 \bigwedge (\forall j \in N(i))\ (x(j)=1)$
$then\ \ x(i)=0;$

به فرض اینکه به همه رئوس گراف عدد صفر نسبت دهیم، از یک راس دلخواه شروع می‌کنیم بند $R1$ از الگوریتم را اجرا می‌کنیم، چون همه رئوس در ابتدا عدد صفر دارند، طبق $R1$ به راس اول عدد یک را نسبت می‌دهیم.
حال راس دومی انتخاب می‌کنیم که اگر عدد آن صفر باشد و همه همسایه‌های آن عدد صفر را گرفته باشند، آنگاه به آن راس یعنی راس دوم هم عدد یک نسبت می‌دهیم ولی اگر حداقل همسایه‌ای داشته باشد که به آن عدد یک نسبت داده شده باشد آنگاه راس دوم همچنان عدد صفر را حفظ می‌کند و به‌همین ترتیب روند را ادامه می‌دهیم.
در نهایت دو مجموعه رئوس خواهیم داشت، که رئوس یک مجموعه عدد یک و رئوس مجموعه دیگر عدد صفر داده شده است. اگر گراف مورد نظر بدون راس تنها باشد آنگاه هر کدام از این دو مجموعه را می‌توان به عنوان یک مجموعه احاطه‌کننده برای گراف ذکر شده در نظر گرفت.

مثال ۲.۱.۱. در دو شکل زیر دو نوع اجرای متفاوت از این الگوریتم را خواهیم دید:
در هر دو شکل درواقع در هر دو اجرا ابتدا به همه رئوس عدد صفر (رنگ سفید) را نسبت داده‌ایم، حال با شروع از راس a چون عدد آن و همه همسایه‌های آن صفر است آنگاه عدد یک (رنگ سیاه) را به راس a نسبت می‌دهیم.
راس دوم یعنی راس b چون دارای همسایه‌ای با عدد یک است، همچنان عدد صفر را نگه خواهد داشت.



شکل ۱.۲: اجرای ۱ .



شکل ۲.۲: اجرای ۲ .

راس سوم یعنی c چون دارای عدد صفر می‌باشد و همه همسایه‌های آن عدد صفر را دارند، عدد یک را می‌پذیرد، نتیجه در هر دو اجرا تا این مرحله یکسان می‌باشد.

حال اگر راس‌ها را به‌ترتیب الفبا همچنان انتخاب کنیم، اجرای ۱ را خواهیم داشت امّا اگر راس h را به عنوان راس چهارم انتخاب کنیم، و راس‌های دیگر را با هر ترتیبی انتخاب کنیم اجرای ۲ را خواهیم داشت که مجموعه احاطه‌کننده بهتری به ما می‌دهد.

پس از پایان اجرای ۱ دو مجموعه $\{a, c, e, g, i\}$ و $\{b, d, f, h\}$ بدست می‌آیند که هرکدام از این دو مجموعه را می‌توان به عنوان یک مجموعه احاطه‌کننده در نظر گرفت، به همین ترتیب پس از اجرای ۲ دو مجموعه $\{a, c, h\}$ و $\{b, d, e, f, g, i\}$ بدست می‌آیند که هرکدام از این دو مجموعه را می‌توان به عنوان یک مجموعه احاطه‌کننده در نظر گرفت.

همانطور که قبلاً گفته شد مجموعه احاطه‌کننده با کمترین تعداد رئوس بهترین مجموعه احاطه‌کننده می‌باشد، بنابراین در بین ۴ مجموعه بالا مجموعه $\{a, c, h\}$ را می‌توان به عنوان بهترین مجموعه احاطه‌کننده انتخاب کرد.

واضح است که اگر انتخاب‌های دیگری برگزینیم، مجموعه احاطه‌کننده‌های متفاوت و متنوعی را می‌توان برای گراف پیدا کرد.