بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی
(گرایش محض)

عنوان:

دوگان ماتلیس و پهنای یک مدول

از:

منیژه باقری

استاد راهنما:

دکتر فرهاد درستکار

مرداد 1389

تشکر و قدردانی

سپاس خداوند متعال را که توان آموختن علم را به بشر آموخت و دست یاری خود را بی دریغ به ما بخشید. در به ثمر رسیدن این تلاش علمی، دلهای مهربان و دستهای گرمی صمیمانه به یاریم شتافتند. لذا بر خود واجب می دانم از استاد راهنمای بزرگوار و ارجمندم، جناب آقای دکتر درستکار، که در طول تحصیل دوره کارشناسی ارشد و سپس در مراحل انجام این پایان نامه با زحمات و راهنمایی های ارزشمند خود، مرا همراهی نمودند کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

همچنین از اساتید بزرگوار، آقایان دکترابراهیمی و دکترهاشمی که به عنوان داور، زحمت باز خوانی این پایان نامه را برعهده داشته و نظرات ارزنده ای در جهت هر چه بهتر شدن آن ارائه نموده اند، سپاسگزاری می نمایم. از کلیه اساتید بزرگوار گروه ریاضی که در مدت تحصیل دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد، زحمات فراوانی برای اینجانب کشیده اند نیز سپاسگزارم.

از پدر و مادر مهربانم که در تمامی مدت تحصیل، زحمات زیادی را متحمل شدند و دعای خیر شان همواره بدرقه راهم است، همیشه قدردانم.

تقدیم

تقدیم به پدر و مادر بزرگوارم و خواهر مهربانم.

مقدمه

فرض کنید M یک R – مدول باشد. مفهوم دوگان ماتلیس برای R – مدول M در حالتی که R یک حلقهٔ نوتری و موضعی باشد، بررسی شده است. در این پایان نامه در ابتدا ما به بررسی تعمیم دوگان ماتلیس در حالتی که حلقه نوتری و نیم موضعی است، می پردازیم. سپس تعمیم مفهوم مجموعهٔ ایده ال های اول ضمیمه که بـرای اولـین بـار توسـط Macdonald مطـرح گردید، را بررسی می نماییم و در این ارتباط نیز قضایایی را بیان خواهیم نمود. از جمله این قضایا می تـوان بـه ارتبـاط بـین مجموعهٔ ایده ال های اول ضمیمهٔ دوگان ماتلیس یک R – مدول و مجموعهٔ ایده ال های اول وابستهٔ آن اشاره نمود.

در ادامهٔ این پایان نامه نیز به بررسی مفاهیم دنباله های M – هم منظم و پهنای یک مدول و قضایایی در ارتباط با این تعاریف خواهیم پرداخت.

این پایان نامه با توجه به مقاله های [14] و [18] تدوین شده است.

چکیده فارسی

دوگان ماتلیس و پهنای یک مدول

منیژه باقری

در این پایان نامه، ابتدا دوگان ماتلیس و مطالب مربوطه به آن را برای یک حلقهٔ نوتری نیم موضعی مطالعه می کنیم. سپس مفاهیم دنباله های هم منظم، پهنای مدول و هم درجه مدول را بیان می نماییم. در انتها رابطهٔ بین هم درجه و درجه را با توجه به دوگان ماتلیس بررسی می کنیم.

کلید واژه: دوگان ماتلیس، پهنای یک مدول، حلقهٔ نیم موضعی نوتری

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

مقدمات و مطالب پیشنیاز

در سراسر این فصل R یک حلقهٔ جابجایی و یکدار است.

1 – 1: مطالبی از جبرجابجایی

تعریف 1-1-1 (ر. ک. [7]): هر رسته رده ای است مانند z از اشیاء (که با A, B, C, … نشان داده می شوند.) به انضمام

1) یک رده از مجموعه های از هم جدا، که با $\hom(A,B)$ نشان داده می شود، برای هر جفت از اشیاء در z

(عنصر f از $\hom(A,B)$ یک مورفیسم از A به B نامیده و با $f : A \longrightarrow B$ نشان داده می شود.)

2) به ازای هر سه تایی (A, B, C) از اشیاء در z، تابعی مانند

$$\hom(B,C)\times\hom(A,B)\longrightarrow\hom(A,C)$$

(برای مورفیسم های $g : B \longrightarrow C$ و $f : A \longrightarrow B$، این تابع به صورت gof $(g,f) \longrightarrow$ نوشته و $gof : A \longrightarrow C$ ترکیب f و g خوانده می شود.) که در دو اصل موضوع زیر صدق می کنند:

i) شرکت پذیری: هرگاه $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ و $h : C \longrightarrow D$ مورفیسم هایی از z باشند، آنگاه

$$ho(gof) = (hog)of .$$

ii) وجود مورفیسم همانی: به ازای هر شیء B از z، مورفیسمی مانند $1_B : B \longrightarrow B$ وجود دارد بطوریکه به ازای هر $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$،

$$go1_B = g \quad , \quad 1_B of = f .$$

تعریف1-1-2: فرض کنید z , z' دو رسته باشند یک تابع مانند $F : z \to z'$ را که

1) به هر شیٔ از z مانند A یک شیٔ $F(A)$ از z' را نسبت می دهد.

2) به هر مورفیسم از z مانند $f : A \to B$، مورفیسمی از z' مانند $F(f) : F(A) \to F(B)$ را نسبت می دهد بطوریکه:

i) به ازای هر شیٔ از z مانند A، $F(id_A) = id_{F(A)}$.

ii) به ازای هر دو مورفیسم از z مانند $f : A \to B$ و $g : B \to C$ نتیجه می گیریم، $F(gf) = F(g)F(f)$ ($F(gf) = F(f)F(g)$) یک تابگون همورد (پادورد) گوییم.

تعریف 1-1-3: اگر R یک حلقهٔ نوتری و تنها دارای یک ایده ال ماکسیمال باشد آنگاه R را یک حلقهٔ شبه موضعی گوییم، چنانچه R دارای تعداد متناهی ایده ال ماکسیمال باشد R را یک حلقهٔ شبه نیم موضعی گوییم. حلقهٔ نوتری شبه موضعی یا شبه نیم موضعی را بترتیب، موضعی و نیم موضعی گوییم.

تعریف 1-1-4: فرض کنید M یک R- مدول باشد. در این صورت R- مدول E را یک توسیع انژکتیو مینیمال می نامیم هرگاه اولا E یک توسیع انژکتیو M باشد ثانیا" اگر E' یک زیر مدول سرهٔ E باشد که شامل M باشد آنگاه E' انژکتیو نباشد.

تعریف 1-1-5 (ر. ک. [19, 2-4]): فرض کنید M یک R - مدول باشد و B یک زیر مدول از M باشد در این صورت R - مدول M را یک توسیع اساسی از B می نامیم هرگاه برای هر زیر مدول ناصفر از M مانند C داشته باشیم $B \cap C \neq 0$. این تعریف معادل است با این شرط که برای هر عنصر ناصفر $a \in M$، عضوی چون $r \in R$ وجود داشته باشد به طوریکه ra یک عضو ناصفر B باشد.

قضیه 1-1-6: فرض کنید M یک R - مدول باشد و E یک توسیع انژکتیو M باشد، در این صورت گزاره های زیر معادلند:

1) E یک توسیع اساسی انژکتیو M است.

2) E یک توسیع انژکتیو مینیمال M است.

اثبات: ر. ک. [19, 2-21].

تعریف 1-1-7 (ر. ک. [19]): فرض کنید E یک R – مدول باشد، در این صورت E را پوشش انژکتیو M می نامیم هرگاه E در یکی از شرایط معادل قضیه 1-1-6 صدق کند. پوشش انژکتیو R – مدول M را با نماد $E(M)$ نشان می دهیم.

لم 1-1-8: فرض کنید R یک حلقهٔ نوتری (آرتینی) باشد. در این صورت هر R - مدول با تولید متناهی چون M نیز نوتری (آرتینی) است.

اثبات: ر. ک. [17].

قضیه 1-1-9: فرض کنید m یک ایده ال ماکسیمال حلقهٔ R باشد. در این صورت R - مدول انژکتیو $E(R/m)$ آرتینی است.

اثبات: ر. ک. [4, 10-2-5].

قضیه 1-1-10: فرض کنید $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ یک دنبالهٔ دقیق کوتاه باشد. M نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر N و L نوتری (آرتینی) باشد.

اثبات: ر. ک. [17].

تعریف و تبصره 1-1-11 (ر. ک. [19]): فرض کنید R یک حلقهٔ جابجایی باشد. یک زنجیر نزولی از ایده الهای R مانند

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$$

را یک فیلتر از R می گوییم.

با استفاده از فیلتر فوق زیر مجموعهٔ U از R را باز گوییم هرگاه به ازای هر $r \in U$، عدد طبیعی n چنان موجود باشد بطوریکه $r + I_n \subseteq U$. بدیهی است تهی و R مجموعه های باز می باشند. همچنین اجتماع دلخواه مجموعهٔ باز، باز بوده و اشتراک تعداد متناهی از مجموعهٔ باز، باز می باشد. بنابراین با استفاده از فیلتر فوق می توان بر R یک توپولوژی تعریف کرد.

لم 1-1-12: فرض کنید $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ یک فیلتر از حلقهٔ R باشد. R با توپولوژی القاء شده توسط این فیلتر یک فضای هاسدورف است اگر و تنها اگر $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = 0$.

تعریف 1-1-13 (ر. ک. [19]): فرض کنید $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ یک فیلتر از حلقهٔ R باشد. دنبالهٔ $\{r_n\}$ را به r همگرا گوییم هرگاه اعداد طبیعی N و k چنان موجود باشند، بطوریکه به ازای هر $n \geq N$ داشته باشیم:

$$r_n - r \in I_k \,.$$

تعریف 1-1-14 (ر. ک. [19]): با مفروضات تعریف قبل دنبالهٔ $\{r_n\}$ را یک دنبالهٔ کوشی گوییم هرگاه به ازای هر عدد طبیعی k عدد طبیعی N چنان موجود باشد بطوریکه به ازای هر $n, m \geq N$ داشته باشیم:

$$r_m - r_n \in I_k \,.$$

تعریف 1-1-15 (ر. ک. [19]): با مفروضات تعریف 1-1-11، حلقهٔ R را کامل گوییم اگر هر دنبالهٔ کوشی در آن همگرا باشد و به علاوه R یک فضای هاسدورف باشد.

تبصره 1-1-16 (ر. ک. [19]): فرض کنید (R, m) یک حلقهٔ موضعی باشد. برای فیلتر

$$m \supseteq m^2 \supseteq m^3 \supseteq \ldots$$

از R، توپولوژی القاء شده را توپولوژی طبیعی از حلقه های موضعی می گوییم. بدیهی است از آنجا که $\bigcap_{n=1}^{\infty} m^n = 0$ ، R به همراه این توپولوژی یک فضای هاسدورف است. در مورد این توپولوژی می توان دید که هر حلقهٔ موضعی نسبت به توپولوژی طبیعی اش یک حلقهٔ کامل است.

تعریف 1-1-17 (ر. ک. [19]): فرض کنید X یک زیر مجموعه از حلقهٔ R باشد، بستار X که با $\overline{X}$ نشان می دهیم شامل همهٔ عضو هایی از R است که حد دنباله هایی از عضو های X است. اگر $\overline{X} = R$ در این صورت X در R چگال است.

تعریف 1-1-18 (ر. ک. [19]): فرض کنید $R, \hat{R}$ دو حلقه با فیلترهای زیر باشد:

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \quad , \qquad \hat{I}_1 \supseteq \hat{I}_2 \supseteq \hat{I}_3 \supseteq \ldots$$

این دو دنباله به حلقه های $R, \hat{R}$، ساختار توپولوژیک می دهند و بعلاوه فرض کنید $j : R \to \hat{R}$ یک همریختی حلقه ای باشد. جفت $(\hat{R}, j)$، کامل شده ی R گفته می شود هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

1) $\hat{R}$ کامل باشد.

2) $\ker j = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

3) $j(R)$ در $\hat{R}$ چگال باشد.

4) به ازای هر n، $j(I_n) = j(R) \cap \hat{I}_n$.

مثال 1-1-19: فرض کنید R یک حلقهٔ دلخواه و $R = S[x_1, \ldots, x_n]$. فرض کنید $I = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. در این صورت حلقهٔ کامل شده R نسبت به ایده ال I به صورت

$$\hat{R} = S[[x_1, \ldots, x_n]]$$

است. که در آن $S[[x_1, \ldots x_n]]$ همان حلقهٔ سریهای توانی صوری از $x_1, \ldots, x_n$ با ضریبهای متعلق به S است.

قضیه 1-1-20: فرض کنید R یک حلقهٔ نیم موضعی و $m_1, m_2, \ldots, m_r$ ایده الهای ماکسیمال حلقهٔ R باشد. اگر $I = rad(R)$، آنگاه برای $\hat{R}$ یعنی کامل شدهٔ R نسبت به I داریم:

$$\hat{R} \cong \hat{R}_{m_i} \times \hat{R}_{m_2} \times \ldots \times \hat{R}_{m_r} .$$

اثبات: ر. ک. [5, 2-5-20].

قضیه 1-1-21: فرض کنید A, B دو R- مدول باشند در این صورت

i) $Hom_R(-,B)$ یک فانکتور پادورد دقیق چپ است یعنی اگر $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ یک دنبالۀ دقیق کوتاه از R - مدولها و R - همریختی ها باشد آنگاه:

$$0 \to Hom_R(N,B) \to Hom_R(M,B) \to Hom_R(L,B)$$

یک دنبالۀ دقیق از R- مدولها و R- همریختی ها می باشد.

ii) $A \otimes_R -$ یک فانکتور دقیق راست است یعنی اگر $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ یک دنبالۀ دقیق کوتاه از R - مدولها و R - همریختی ها باشد آنگاه:

$$A \otimes_R L \to A \otimes_R M \to A \otimes_R N \to 0$$

یک دنبالۀ دقیق از R- مدولها و R- همریختی ها می باشد.

اثبات: ر. ک. [7].

قضیه 1-1-22: فرض کنید R یک حلقۀ نوتری باشد و P_1, P_2 دو ایده ال اول R باشند. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

1) $P_2 \subseteq P_1$.

2) $Hom_R(E(R/P_2), E(R/P_1)) \neq 0$.

اثبات: ر. ک. [19, 4-22].

قضیه 1-1-23: فرض کنید P یک ایده ال اول از حلقۀ R باشد دراین صورت $E(R/P)$ دارای ساختار یک R_P - مدول است و بعلاوه یکریختی

$$E(R/P) \cong E(R_P / P R_P)$$

از R_P - مدول ها برقرار است.

اثبات: ر. ک. [19, 5 – 6].

نتیجه 1-1-24: فرض کنید R یک حلقۀ موضعی با ایده ال ماکسیمال m باشد. گزاره های زیر معادلند:

1) R در توپولوژی طبیعی خودش کامل است.

2) هر خودسانی از $E(R/m)$، یعنی هر عضو از $Hom(E(R/m), E(R/m))$ را می توان یک همریختی تعریف شده بوسیله ی ضرب در یک عضو از Rدر نظر گرفت.

اثبات: ر. ک. [19].

تعریف 1-1-25 (ر. ک. [1]): فرض کنید C یک R – مدول باشد. C را یک هم مولد در کاتاگوری R – مدولها گوییم اگر بتوان هر R – مدول M را در یک حاصلضرب خارجی نسخه هایی از C نشاند. بنابر [1,18-16]، $\bigoplus_{m\in Max(R)} E(R/m)$ یک هم مولد در کاتاگوری R – مدولها و با توجه به [1,18-19]، $E(\bigoplus_{m\in Max(R)} R/m)$ یک هم مولد انژکتیو در کاتاگوری R – مدولها می باشند.

قضیه 1-1-26: برای یک R – مدول C گزاره های زیر معادلند:

1) C یک هم مولد در کاتاگوری R – مدولها است.

2) برای هر همریختی f در کاتاگوری R – مدولها اگر $Hom_R(f, c) = 0$ آنگاه $f = 0$.

اثبات: ر. ک. [1, 18-14].

تبصره 1-1-27: فرض کنید E یک هم مولد انژکتیو باشد. همچنین فرض کنید A یک R – مدول غیر صفر و $0 \neq a \in A$ باشد. در این صورت یک R – همریختی $j : A \longrightarrow E$ چنان موجود است که $j(a) \neq 0$.

اثبات: فرض کنید $0 \neq a \in A$ و $f : Ra \longrightarrow A$ همان نگاشت شمول باشد. چون $f \neq 0$. پس

$$Hom(f, c): Hom(Ra, E) \longrightarrow Hom(A, E)$$

غیر صفر است. حال اگر $Hom(Ra, E) = 0$. بدیهی است که $Hom(f, c) = 0$. پس $Hom(Ra, E) \neq 0$. این نتیجه می دهد که یک R – همریختی $q : Ra \longrightarrow E$ وجود دارد که $q(a) \neq 0$. اکنون از اینکه E انژکتیو است با توجه به دیاگرام جابه جایی

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & Ra & \xrightarrow{\subseteq} & A \\ & & 0 \neq q \downarrow & & [\ j \neq 0 \\ & & E & & \end{array}$$

نتیجه می گیریم که $j: A \longrightarrow E$ چنان موجود است که $j(a) \neq 0$. ■

تبصره 1-1-28 (ر. ک. [17, 33-7]): فرض کنید M یک R – مدول باشد. مقصود از زنجیرهٔ اکید از زیر مدولهای M زنجیره ای متناهی و اکیداً صعودی چون

$$M_0 \subset M_1 \subset \mathbf{L} \subset M_{n-1} \subset M_n$$

از زیر مدولهای M است که $M_0 = 0$ و $M_n = M$. طول این زنجیرهٔ اکید تعداد علامت های $\subset$ در این زنجیره، یعنی یکی کمتر از تعداد جمله های آن است. (لذا طول زنجیرهٔ اکید فوق برابر n است.)

هر زنجیرهٔ اکید از زیر مدولهای M چون

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \mathbf{L} \subset M_{n-1} \subset M_n = M$$

را سری ترکیبی M می گوییم اگر به ازای هر $i = 1, \mathbf{K}, n$، M_i / M_{i-1} یک R – مدول ساده باشد. R – مدول M را از طول متناهی گوییم اگر دارای سری ترکیبی باشد.

قضیه 1-1-29: اگر M دارای یک سری ترکیبی از طول n باشد. در این صورت هر سری ترکیبی M از طول n است.

اثبات: ر. ک. [17].

قضیه 1-1-30: فرض کنید M یک R - مدول باشد. در این صورت M با طول متناهی است اگر و تنها اگر R - مدول M هم نوتری و آرتینی باشد.

اثبات: ر. ک. [17, 36 – 7].

قضیه 1-1-31: فرض کنید R حلقهٔ نوتری باشد و z رستهٔ R - مدولهای با طول متناهی و D نیز یک فانکتور پادورد دقیق چپ R - خطی از z به خودش باشد و $E = \bigoplus_{m \in Max(R)} E\left(R/m\right)$ یک هم مولد انژکتیو R باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

i) برای هر $M \in z$، $DD(M) \cong M$.

ii) فانکتور D دقیق است و برای هر اید ه ال ماکسیمال m از حلقهٔ R،

$$D(R/m) \cong R/m.$$

iii) برای هر $M \in z$، $D(M) \cong Hom_R(M, E)$.

اثبات: ر. ک. [6].

لم 1-1-32: فرض کنید N, E' و M، R- مدول باشند. همچنین فرض کنید M با تولید متناهی و E' انژکتیو باشد در این صورت:

$$M \otimes_R Hom_R(N, E') \cong Hom_R(Hom_R(M, N), E').$$

اثبات: ر. ک. [$2-2$,16].

تعریف 1-1-33: فرض کنید R یک حلقهٔ نوتری و M یک R - مدول باشد. همچنین فرض کنید $E = \bigoplus_{m \in Max(R)} E(R/m)$. در این صورت مدول $D(M) = Hom_R(M, E)$ را دوگان ماتلیس M می نا میم.

نتیجه 1-1-34: فرض کنیدR یک حلقهٔ نوتری باشد و M, N، R - مدول باشند. همچنین فرض کنید M یک R - مدول با تولید متناهی باشد در این صورت:

$$M \otimes_R D(N) \cong D(Hom_R(M, N)).$$

تعریف 1-1-35 (ر. ک. [17]): فرض کنید I و J ایده الهای حلقهٔ R باشد. $(I : J)$ به صورت

$$(I : J) = \{a \in R : aJ \subseteq I\}.$$

تعریف می شود. روشن است که $(I : J)$ ایده ال R است و $I \subseteq (I : J)$. در حالت خاص $I = 0$،

$$(0 : J) = \{a \in R : aJ = 0\} = \{a \in R : ab = 0 \ , \ \forall b \in J\}.$$

پوچساز J نامیده می شود و با $Ann_R J$ نمایش داده می شود.

قضیه 1-1-36: فرض کنید I و J ایده الهایی از حلقهٔ R و $(I_l)_{l \in \Lambda}$ خانواده ای از ایده الهای R باشد، در این صورت:

$$(J : \sum_{l \in \Lambda} I_l) = \bigcap_{l \in \Lambda} (J : I_l).$$

اثبات: ر. ک. [17].

لم 1-1-37: فرض کنید M یک R - مدول نوتری باشد. در این صورت حلقهٔ $R/Ann_R(M)$ یک حلقهٔ نوتری است.

اثبات: ر. ک. [17].

تعریف 1-1-38 (ر. ک. [17]): فرض کنید M یک R - مدول باشد، ایده ال اولP از حلقهٔ R را یک ایده ال اول وابسته به M گویند هرگاه عضو غیر صفری از R - مدول M مانند x چنان موجود باشد بطوریکه $P = Ann_R(x)$.

همچنین ایده ال اول P را یک ایده ال وابسته ضعیف R – مدول M گوییم اگر عضو غیر صفری از M مانند x چنان موجود باشد که P عضو مینیمال از $V(Ann_R(x))$ باشد. مجموعهٔ تمام ایده الهای اول وابستهٔ M را با $Ass_R(M)$ و مجموعهٔ تمام ایده الهای اول وابستهٔ ضعیف از M را با $A\tilde{s}s_R(M)$ نشان می دهیم.

قضیه 1-1-39: فرض کنید R یک حلقهٔ نوتری و M یک R- مدول باشد. در این صورت $M \neq 0$ اگر و تنها اگر $Ass_R(M) \neq \emptyset$.

اثبات: ر. ک. [17, 35 – 9].

تعریف 1-1-40 (ر. ک. [17]): فرض کنید که M یک R – مدول باشد. زیر مدول N از M دارای یک تجزیهٔ اولیه در M است اگر N برابر اشتراک تعداد متناهی از زیر مدول های اولیه M باشد. فرض کنید

$$N = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n.$$

یک تجزیهٔ اولیه N باشد که در آن به ازای هر $1 \le i \le n$، Q_i یک زیر مدول P_i - اولیه M است. این تجزیه یک تجزیهٔ اولیهٔ کمین N است اگر:

1) $P_1, P_2, \dots, P_n$ دو به دو متمایز باشند و

2) $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i \not\subset Q_j$ بطوریکه $i \neq j$ و به ازای هر $i = 1, 2..., n$.

قضیه 1-1-41: فرض کنید M یک R- مدول باشد. اگر R یک حلقهٔ نوتری یا M یک R – مدول نوتری باشد آنگاه $A\tilde{s}s_R(M) = Ass_R(M)$.

اثبات: ر. ک. [20, 1-1(b), 1-2].

لم 1-1-42: اگر زیر مدول صفر از R – مدول M دارای یک تجزیهٔ اولیه باشد در این صورت $A\tilde{s}s_R(M)$ یک مجموعهٔ متناهی است بخصوص اگر M یک R – مدول نوتری باشد در این صورت $A\tilde{s}s_R(M)$ متناهی است.

اثبات: ر. ک. [20, 1-4].

لم 1-1-43: فرض کنید R یک حلقهٔ جابه جایی نوتری و دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

یک دنبالهٔ دقیق کوتاه از R - مدولها و R - همریختها باشد. در این صورت :

$$Ass_R(L) \subseteq Ass_R(M) \subseteq Ass_R(L) \cup Ass_R(N).$$

اثبات: ر. ک. [17, 42 – 9].

تعریف 1-1-44: فرض کنید M یک R – مدول باشد. در این صورت تکیه گاه M را با $Supp_R(M)$ نشان داده و آن را به صورت

$$Supp_R(M) = \{P \in Spec(R) : M_p \neq 0\}.$$

تعریف می کنیم.

قضیه 1-1-45: فرض کنید R یک حلقه و M یک R – مدول با تولید متناهی باشد، برای هر ایده ال اول $p \in Supp_R(M)$ یک R – همومورفیسم منحصر به فرد $W : M \to R/P$ وجود دارد.

اثبات: ر. ک. [3, chap2, section4.4, prop2].

لم 1-1-46: فرض کنید M یک R – مدول با تولید متناهی باشد در این صورت:

$$Supp_R(M) = \{P \in spec(R) : P \supseteq (0 :_R M)\} = V(Ann_R(M)).$$

تعریف 1-1-47: فرض کنید P یک ایده ال اول R باشد. در این صورت ارتفاع P روی حلقهٔ R را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$ht_R(P) = \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n = P\}.$$

که sup روی طول تمام زنجیر ایده الهای اول R که به P ختم می شوند گرفته می شود مشروط بر اینکه مجموعهٔ فوق کوچکترین کران بالا داشته باشد در غیر این صورت $ht_R(P)$ را برابر ∞ تعریف می کنیم.

تعریف 1-1-48: فرض کنید R یک حلقهٔ جا به جایی و یکدار باشد. در این صورت بعد R را با نماد $\dim(R)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\dim(R) = \sup\{ht_R(P) : P \in spec(R)\}.$$

تبصره 1-1-49: فرض کنید R یک حلقهٔ نوتری نیم موضعی با ایده الهای ماکسیمال $m_1, \ldots, m_n$ باشد. همچنین فرض کنید $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E(R/m_i)$ که در آن

$$E^n = E \oplus E \ldots \oplus E \qquad (\text{n بار})$$

همچنین فرض کنید M یک R – مدول باشد. در این صورت R – مدول M آرتینی است، اگر و تنها اگر عدد طبیعی $n \geq 1$ موجود باشد بطوریکه،

$$M \subset E^n$$

(منظور این است که M را می توانیم در E^n بنشانیم .)

اثبات: فرض کنیم $M \subset E^n$، بنابر قضیهٔ 1-1-9، E آرتینی است لذا E^n آرتینی است. از این رو M آرتینی است. برعکس، فرض کنیم M آرتینی و ناصفر باشد. طبق تعریف 1-1-25، E یک هم مولد انژکتیو است. لذا طبق تبصرهٔ 1-1-27 مجموعهٔ همریختی های غیر صفر از M به E مخالف تهی است. ما اکنون مجموعهٔ همه نگاشتهای ممکن $f : M \longrightarrow E^n$ بطوریکه $n \geq 1$ را در نظر می گیریم. چون M آرتینی است، بنابراین مجموعهٔ هسته های این نگاشتها، دارای عضو مینیمال است. لذا می توانیم $f : M \longrightarrow E^n$، را با هستهٔ مینیمال پیدا کنیم. ادعا می کنیم که f یک به یک است. فرض کنید f یک به یک نباشد. لذا برای $x \in \ker f$ و $x \neq 0$، با در نظر گرفتن تبصرهٔ 1-1-27 نگاشت $g : M \longrightarrow E$ موجود است که $g(x) \neq 0$. قرار می دهیم،

$$h = (f, g) : M \longrightarrow E^n \oplus E.$$

در این صورت چون $x \in \ker f$ و $x \notin \ker g$، بنابراین $\ker h \subset \ker f$ و این با مینیمال بودن $\ker f$ در تناقض است. لذا f یک به یک است و M را می توان در E^n می توان نشاند.■

تعریف 1-1-50 (ر. ک. [4,1-2-7]): R – مدول M را ثانویه گویند هرگاه $M \neq 0$ و برای هر $r \in R$، همریختی $j_r : M \to M$ با تعریف $j_r(m) = rm$ پوشا یا پوچ توان باشد. یعنی $rM = M$ یا n ای در N وجود داشته باشد بطوریکه $r^n M = 0$. اگر M یک مدول ثانویه باشد آنگاه $\sqrt{Ann_R(M)} = P$ یک ایده ال اول R است در این صورت M را یک R – مدول P – ثانویه گوییم.

تعریف 1-1-51 (ر. ک. [4,2-2-7]): اگر R – مدول M برابر جمع تعداد متناهی R – مدول ثانویه مانند $M = \sum_{i=1}^{k} N_i$ باشد آنگاه گوییم M دارای یک نمایش ثانویه است. فرض کنید در $M = \sum_{i=1}^{k} N_i$ به ازای هر $1 \leq i \leq k$، N_i یک مدول P_i - ثانویه باشد در این صورت $M = \sum_{i=1}^{k} N_i$ را یک نمایش ثانویهٔ مینیمال برای M گوییم هر گاه: