دانشکده‌ی ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

رساله دکتری ریاضی کاربردی / آنالیز عددی

عنوان:

تقلیل اندیس و حل معادلات دیفرانسیل - جبری با اندیس بالا

استاد راهنما:

دکتر سید محمد مهدی حسینی

اساتید مشاور:

دکتر فرید (محمد) مالک - دکتر سید ابوالفضل شاهزاده‌فاضلی

پژوهش‌گر:

مهدی قوتمند جزی

تیر ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

عزیزان

همسر و نور چشمی ها

سپاس‌گزاری

سپاس خدایی را که مرا به راه دانش رهنمون شد و هم اوست که فرصت شاگردی اساتید گرامی را بر من ارزانی داشت تا چراغی بر تاریکی جهلم باشند.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم از کلیه کسانی که من را در انجام این رساله یاری و همراهی کرده‌اند، تشکر نمایم و خوشحالم که از آن‌ها یاد گرفتم و با آن‌ها کار کردم.

در ابتدا از استادان گرامی:

جناب آقای دکتر سید محمد مهدی حسینی به عنوان استاد راهنما که با قبول راهنمایی این رساله و در نهایت دلسوزی و همیاری، با کمک‌ها و پیشنهادات ارزشمندشان در طول این چند سال افتخار بزرگی را نصیب اینجانب کردند و دقت نظر ایشان که باعث شد در مسیر درست گام بردارم.

جناب آقایان دکتر فرید (محمد) مالک و دکتر سید ابوالفضل شاهزاده فاضلی به عنوان اساتید مشاور، به خاطر راهنمایی و زحماتی که برای اینجانب کشیدند.

داوران محترم آقایان دکتر سید مهدی کرباسی، دکتر اسماعیل بابلیان، دکتر محمد رضا هوشمند اصل و دکتر قاسم برید لقمانی به خاطر پذیرش مسئولیت داوری این پایان نامه از سوی ایشان و توفیق بزرگی که نصیب اینجانب نموده‌اند. هم‌چنین از تمام معلمان و استادان بزرگم که باعث پیشرفت اینجانب شده‌اند.

جناب آقای دکتر مصطفی جعفری به عنوان همکار و همکلاسی که در این راه کمک شایانی به اینجانب نموده‌اند.

سرکار خانم عابدینی و خانم عباسی‌زاده به خاطر دلسوزی‌ها و زحمات بی دریغشان.

همچنین از همراهی و همقدمی همسرم و فرزندانم که این دوران را تحمل نموده و همواره مشوق اینجانب بوده‌اند، به‌خصوص پسرم علی که زحمت تایپ بخشی از این رساله را به عهده داشتند.

در پایان از مادرم که پشتیبان همیشگی و پدرم که بزرگ‌ترین مشوق من در راه فراگیری دانش بوده‌اند و توفیق جبران هر قطره از دریای بی‌کران مهر این عزیزان را غنیمت می‌شمارم.

چکیده

معادلات دیفرانسیل - جبری عادی و جزیی - جبری در مدل‌بندی بسیاری از مسائل فیزیکی ظاهر می‌شوند و دارای کاربردهای وسیعی در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی هستند. در سال‌های اخیر یافتن روش‌های مناسب برای حل این معادلات مورد توجه بسیاری از پژوهشگران بوده است. در این رساله، روش‌های نیمه‌تحلیلی شامل روش شبه‌طیفی، تکرار وردشی، اختلال هموتوپی برای حل معادلات دیفرانسیل - جبری عادی و جزیی و جبری خطی و غیرخطی به کار برده می‌شوند. بدین منظور ابتدا از روش کاهش اندیس برای معادلات به شکل نیمه صریح هسنبرگ استفاده می‌شود، سپس دستگاه بدست آمده به طور مناسبی بااستفاده از این روش‌ها حل می‌شود. این روش‌ها مجموع یک سری نامتناهی و همگرا به جواب مسئله را تولید می‌کند که می‌توان جملات آن را به‌راحتی محاسبه نمود. نتایج عددی حاصل از حل مثال‌های مختلف معادلات دیفرانسیل - جبری با اندیس بالا با استفاده از روش‌های نیمه‌تحلیلی، توانایی و مناسب بودن این روش‌ها را نشان می‌دهند. لذا روش‌های پیشنهادی می‌توانند به عنوان ابزارهای قوی برای حل معادلات دیفرانسیل - جبری و معادلات دیفرانسیل جزیی - جبری بکار گرفته شوند. هم‌چنین هر دو مدل خطی و غیرخطی این معادلات می‌توانند به طور موفقیت آمیزی با این روش‌ها حل شوند.

فهرست مطالب

۱ مفاهیم مقدماتی **۷**

۱.۱ مقدمه ۸

۲.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی ۸

۳.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی ۱۱

۴.۱ معادلات دیفرانسیل - جبری و ساختارهای آن ۱۴

۱.۴.۱ مقدمه ۱۴

۲.۴.۱ معادلات دیفرانسیل - جبری ۱۶

۳.۴.۱ معادلات دیفرانسیل - جبری خطی ۱۸

۴.۴.۱ معادلات دیفرانسیل - جبری خطی با ضرایب ثابت ۱۹

۵.۱ معادلات دیفرانسیل جزیی - جبری ۲۹

۲ تقلیل اندیس و کاربرد آن در حل معادلات دیفرانسیل - جبری **۳۵**

۱.۲ مقدمه ۳۶

۲.۲ تقلیل اندیس معادلات دیفرانسیل − جبری خطی از اندیس $m+1$ به m ۳۷

۳.۲ تقلیل اندیس معادلات دیفرانسیل- جبری خطی از اندیس m به اندیس ۱ . . . . . ۴۰

۴.۲ حل معادلات دیفرانسیل - جبری با تقلیل اندیس به روش شبه طیفی ۴۵

۵.۲ نتیجه گیری ۵۴

۳ روش های نیمه تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل - جبری **۵۷**

۱.۳ مقدمه ۵۸
۲.۳ روش تکراری استاندارد ۵۹
۳.۳ روش تکراری اصلاح شده ۶۰
۴.۳ حل معادلات دیفرانسیل - جبری با روش تکراری اصلاح شده ۶۳
۵.۳ روش تکرار وردشی ۶۸
۶.۳ حل معادلات دیفرانسیل - جبری با روش تکرار وردشی و چند جمله‌ای‌های چبیشف . ۷۰
۷.۳ نتیجه گیری ۷۵

۴ روش های نیمه تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل جزیی - جبری ۷۷

۱.۴ مقدمه ۷۸
۲.۴ اندیس‌ها و شرایط مرزی - اولیه سازگار ۷۹
۱.۲.۴ اندیس های PDAE ۸۰
۲.۲.۴ نمایش سازگاری جواب ۹۰
۳.۲.۴ شرایط مرزی و اولیه برای مدادهای ماتریسی نامنفرد ۹۵
۳.۴ تحلیل عددی معادلات دیفرانسیل جزیی - خطی ۱۰۰
۱.۳.۴ گسسته سازی مکانی و همگرایی ۱۰۲
۲.۳.۴ گسسته سازی زمان و همگرایی گسسته سازی کامل ۱۰۶
۳.۳.۴ نتایج عددی ۱۱۷
۴.۴ حل معادلات دیفرانسیل جزیی - جبری با روش تکرار وردشی ۱۲۴
۵.۴ حل معادلات دیفرانسیل جزیی- جبری با روش اختلال هموتوپی اصلاح شده ۱۳۳
۶.۴ نتیجه گیری ۱۴۴

مراجع ۱۴۴

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۵۹

لیست تصاویر

۱.۲ خطای مطلق بدون تقلیل اندیس برای مثال ۱.۴.۲ ($x_۱ - -$ ، $x_۲ - -$) ۵۱

۲.۲ خطای مطلق بدون تقلیل اندیس برای مثال ۱.۴.۲ (y) ۵۱

۳.۲ خطای مطلق با تقلیل اندیس برای مثال ۱.۴.۲ ($x_۱ - -$ ، $x_۲ - -$) ۵۲

۴.۲ خطای مطلق با تقلیل اندیس برای مثال ۱.۴.۲ (y) ۵۲

۱.۳ قدرمطلق خطاها با استفاده از چندجمله‌ای‌های تیلور برای مثال۱.۶.۳ ($x_۱ - -$ ، $x_۲ - -$) ۷۲

۲.۳ قدرمطلق خطاها با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف برای مثال۱.۶.۳ ($x_۱ - -$ ، $x_۲ - -$) ۷۳

۱.۴ شرط مرزی سازگار $\tau = ۰/۰۱, h = \frac{۱}{۱۵}$ برای مثال۳۰.۳.۴ . . . . . ۱۲۱

۲.۴ شرط مرزی ناسازگار $\tau = ۰/۰۱, h = \frac{۱}{۱۵}$ برای مثال ۳۰.۳.۴ . . . . . ۱۲۲

۳.۴ محاسبه $|w_{num}(t,x) - w(t,x)|$، $\tau = ۰/۰۵, h = ۰/, ۰/۰۵, ۰/۲۵$ برای مثال ۳۰.۳.۴ . . . . . ۱۲۳

۴.۴ محاسبه$|u_۱ - u_{۱,۱۰}|$ برای مثال۱.۴.۴ . . . . . ۱۲۶

۵.۴ محاسبه $|u_۲ - u_{۲,۱۰}|$ برای مثال۱.۴.۴ . . . . . ۱۲۶

۶.۴ محاسبه $|u_۳ - u_{۳,۱۰}|$ برای مثال۱.۴.۴ . . . . . ۱۲۷

۷.۴ محاسبه$|u_۱ - u_{۱,۱۰}|$ برای مثال۲.۴.۴ . . . . . ۱۲۹

۸.۴ محاسبه $|u_۲ - u_{۲,۱۰}|$ برای مثال۲.۴.۴ . . . . . ۱۲۹

۹.۴ محاسبه $|u_۳ - u_{۳,۱۰}|$ برای مثال۲.۴.۴ . . . . . ۱۳۰

۱۰.۴ محاسبه $|u(x,t)-\chi_{۲۰}|$ در روش اختلال هموتوپی استاندارد برای مثال۲.۵.۴ . . . ۱۳۹
۱۱.۴ محاسبه $|u(x,t)-\chi_{۲۰}|$ در روش اختلال هموتوپی اصلاح شده برای مثال۲.۵.۴ . . ۱۳۹
۱۲.۴ محاسبه $|v(x,t)-\phi_{۲۰}|$ در روش اختلال هموتوپی استاندارد برای مثال۲.۵.۴ . . . ۱۴۰
۱۳.۴ محاسبه $|v(x,t)-\phi_{۲۰}|$ در روش اختلال هموتوپی اصلاح شده برای مثال۲.۵.۴ . . ۱۴۰

لیست جداول

۱.۲ ماکسیمم قدرمطلق خطا برای مثال۱.۴.۲ . . . . . ۵۰

۲.۲ ماکسیمم قدرمطلق خطا برای مثال۲.۴.۲ . . . . . ۵۴

۱.۳ ماکسیمم قدرمطلق خطا در روش تکراری استاندارد برای مثال ۱.۴.۳ . . . . . ۶۶

۲.۳ ماکسیمم قدرمطلق خطا در روش تکراری اصلاح شده برای مثال ۱.۴.۳ . . . . . ۶۶

۳.۳ ماکسیمم قدرمطلق خطا برای مثال ۱.۶.۳ . . . . . ۷۶

۱.۴ مرتبه همگرایی عددی برای مثال ۲۵.۳.۴ . . . . . ۱۱۹

۲.۴ مرتبه همگرایی عددی برای مثال ۲۵.۳.۴ . . . . . ۱۱۹

۳.۴ مرتبه همگرایی عددی برای مثال ۲۶.۳.۴ . . . . . ۱۲۰

۴.۴ مرتبه همگرایی عددی برای مثال ۲۶.۳.۴ . . . . . ۱۲۰

۵.۴ سرعت همگرایی و زمان محاسبه در روش اختلال هموتوپی استاندارد برای مثال ۱.۵.۴ ۱۴۱

۶.۴ سرعت همگرایی و زمان محاسبه در روش اختلال هموتوپی اصلاح شده برای مثال ۱.۵.۴ . . . . . ۱۴۱

۷.۴ سرعت همگرایی و زمان محاسبه در روش اختلال هموتوپی استاندارد برای مثال ۲.۵.۴ ۱۴۲

۸.۴ سرعت همگرایی و زمان محاسبه در روش اختلال هموتوپی اصلاح شده برای مثال ۲.۵.۴ . . . . . ۱۴۲

۹.۴ سرعت همگرایی و زمان محاسبه برای مثال ۳.۵.۴ . . . . . ۱۴۳

پیش‌گفتار

در این رساله سعی کرده‌ایم تا با ارایه یک روش تقلیل اندیس، با استفاده از روش‌های نیمه تحلیلی جدید به حل معادلات دیفرانسیل- جبری با اندیس بالا بپردازیم. در ادامه معادلات دیفرانسیل جزیی - جبری را با روش‌های نیمه تحلیلی از قبیل روش تکرار وردشی و روش اختلال هموتوپی مورد بررسی قرار داده و با ایجاد تغییراتی در این روش‌ها با استفاده از روش تکراری پیشنهاد داده شده توسط گژی[۱] و جعفری اصلاحات جدیدی روی این روش‌ها ارایه کرده‌ایم. ابتدا تاریخچه مختصری از آن‌ها را مرور می‌کنیم.

روش تکرار وردشی که از آن به عنوان یک روش نیمه تحلیلی یاد می‌شود، برای اولین بار در سال ۱۹۹۸ توسط یک محقق چینی به نام خی[۲] معرفی شد. این روش در واقع تعمیمی از روش ضربگر عمومی لاگرانژ[۳] است که در سال ۱۹۷۸ توسط اینکوتی[۴] ارایه شده است.

مقالاتی در حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات لین - امدن توسط خی و حل معادلات برگر توسط ابدو[۵] و سلیمان[۶] منتشر شده است. در سال‌های اخیر نیز مقالات فراوانی در مورد این روش و همگرایی آن به چاپ رسیده است و افراد زیادی روی این موضوع کار کرده‌اند که از جمله این افراد می‌توان به مهدی دهقان و همکاران وی اشاره کرد. مهدی دهقان علاوه بر حل مسایل کشی، معادلات کلاین - گوردون و ... یک اثبات همگرایی برای روش تکرار وردشی ارایه کرده است.

---

[۱] gejji

[۲] He

[۳] Lagrange

[۴] Inokuti

[۵] Abdou

[۶] Soliman

روش اختلال هموتوپی نیز به عنوان یک روش نیمه تحلیلی برای اولین بار در سال ۱۹۹۷ توسط یک ریاضیدان چینی به نام خی با ترکیب روش‌های اختلال و مفهوم هموتوپی در توپولوژی ارایه گردید. این روش بدون اتکا به وجود پارامتر اختلال با تبدیل مساله‌ی غیر خطی به یک فرم ساده‌ی خطی، جواب این گونه مسایل را در قالب یک سری همگرا محاسبه می‌کند.

از جمله مقالاتی که در این مورد به چاپ رسیدند می‌توان به مقالاتی در باب نحوه انجام روش توسط خی چاپ شدند اشاره کرد. هم‌چنین در این سال‌ها روشی جدید به نام روش آنالیز هموتوپی توسط لیائو[۷] ارایه شد و مبتکرین این طرح‌ها در مقالات مجزایی به توصیف روش خود و مقایسه با روش‌های دیگری پرداختند .

این روش‌ها در اوایل پیدایش در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۵ خیلی مورد استقبال قرار نگرفت. شاید یکی از دلایل اصلی این ناکامی عدم شناخت کافی از این ابزارهای قوی در حل معادلات دیفرانسیل و هم‌چنین توجه بیش از حد محققین به روش آدومیان[۸] در این سال‌ها بوده است.

سال‌های ۲۰۰۶ و ۲۰۰۷ شکوفایی روش تکرار وردشی و اختلال هموتوپی می‌باشد. در این سال‌ها مقالات بسیار زیادی در باب مقایسه روش اختلال هموتوپی و روش تکرار وردشی با روش آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیل به چاپ رسید. حل معادلاتی شامل معادلات انتگرال، ریکاتی، دیفرانسیل کسری، دیفرانسیل غیرخطی، دیفرانسیل تاخیری، دیفرانسیل جزیی، دیفرانسیل منفرد، مسایل حساب تغییرات، مسایل مقدار مرزی و ... از جمله معادلاتی بودند که در این سال‌ها با روش‌های تکرار وردشی و اختلال هموتوپی مورد بررسی قرار گرفتند. در دو سال اخیر این دو روش برای حل انواع گوناگونی از معادلات دیفرانسیل استفاده شده است.

روش تقلیل اندیس برای اولین بار در سال ۱۹۸۸ توسط گی‌یر[۹] برای دستگاه معادلات دیفرانسیل - جبری معرفی گردید. در این روش یک دستگاه معادلات دیفرانسیل - جبری با اندیس بالا را می‌توان با تکرار مشتق‌گیری از معادلات جبری به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل - جبری با اندیس ۱ یا به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کرد. اما اجرای این روش منجر به ناپایداری دستگاه معادلات

---

[۷] liao

[۸] Adomian

[۹] Gear

دیفرانسیل می‌شد.

در سال ۲۰۰۳، بابلیان و حسینی یک روش ساده و متمایز با روش قبل برای تقلیل اندیس معادلات دیفرانسیل - جبری با اندیس $m+1$ به اندیس m را معرفی کردند که مشکلات روش‌های قبل را ندارد.

اکنون مختصری از آن چه که در این رساله بدان پرداخته‌ایم را بیان می‌کنیم:

در فصل اول تعاریف اولیه و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز را برای معرفی انواع معادلات، شامل معادلات دیفرانسیل معمولی، دیفرانسیل با مشتقات جزیی، دیفرانسیل - جبری، دیفرانسیل با مشتقات جزیی - جبری و اندیس معادلات دیفرانسیل - جبری بیان شده است.

در فصل دوم ابتدا به معرفی روش بابلیان و حسینی برای تقلیل اندیس معادلات دیفرانسیل - جبری با اندیس $m+1$ به اندیس m می‌پردازیم. در ادامه یک روش تقلیل اندیس جدید برای معادلات دیفرانسیل - جبری با اندیس m به اندیس ۱ را ارایه می‌دهیم. سپس تقلیل اندیس را برای حل معادلات دیفرانسیل - جبری با اندیس بالا با روش شبه‌طیفی بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم ابتدا به بیان یک روش تکراری می‌پردازیم که ایده اصلی آن اولین بار توسط دفتردار - گژی و جعفری در سال ۲۰۰۶ برای معادلات تابعی غیرخطی ارایه شده است. سپس یک روش تکراری برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل - جبری ارایه می‌دهیم که با ترکیب روش مذکور و بسط تیلور، یک الگوریتم موثرتر به نام روش تکراری اصلاح شده ساخته می‌شود. در ادامه آنالیز همگرایی و چند مثال بررسی می‌شوند و نتایج نشان می‌دهند که روش جدید یک ابزار مطمئن و قوی برای حل معادلات دیفرانسیل - جبری است. در ادامه از چندجمله‌ای‌های چبیشف در روند روش تکرار وردشی برای حل معادلات دیفرانسیل - جبری با اندیس بالا، استفاده می‌کنیم. نتایج عددی نشان می‌دهد که استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف مفیدتر از چندجمله‌ای‌های تیلور بوده است.

در فصل چهارم ابتدا اندیس مشتق زمان و اندیس مشتق مکان برای معادلات دیفرانسیل جزیی - جبری معرفی می‌گردند. این اندیس‌ها به ترتیب با مفاهیم تبدیلات لاپلاس و فوریه توصیف می‌شوند. هم‌چنین زوج اندیس اختلال را معرفی کرده و ارتباط آن را با زوج اندیس مشتق زمان یکنواخت و اندیس مشتق مکان بیان شده است. هم‌چنین نمایش سازگاری جواب یک مسئله PDAE بررسی می‌گردد. سپس تحلیل عددی معادلات دیفرانسیل جزیی- جبری (PDAEs) خطی توسط روش خطوط، پسرو در زمان، متمرکز

در مکان (BTCS) و روش کرانک - نیکلسون بررسی شده است.

در ادامه روش‌های نیمه تحلیلی تکرار وردشی و اختلال هموتوپی را برای حل یک دسته وسیع از معادلات دیفرانسیل جزیی - جبری خطی و غیرخطی بکار می‌بریم که اجرای آن‌ها نسبتاً ساده بوده و همگرا به جواب واقعی مسئله هستند. نتایج عددی کارایی روش‌های مذکور را در مقایسه با روش‌های عددی نشان می‌دهند.

هم‌چنین مقالات مستخرج از رساله به شرح زیر می‌باشند:

1. M. Ghovatmand, M.M. Hosseini, M. Jafari, *Iterative-Taylor method for solving system of nonlinear differential-algebraic equations*, Wd. Appl. Sci. J., **11** (11) (2010) 1450-1457.

2. M. Ghovatmand, M.M. Hosseini, M. Jafari, *Reduced index, and pseudospectral method for high index differential-algebraic equations*, Journal of Advanced Research in Scientific Computing, **3** (2) (2011) 42-55.

3. M. Ghovatmand, M.M. Hosseini, M. Nili, *Application of Chebyshev approximation in the process of variational iteration method for solving differential-algebraic equations*, Mathematical and Computational Applications, **16** (4) (2011) 969-978.

4. M. Ghovatmand, M.M. Hosseini and M. Jafari, *Application of He's VIM for solving partial differential - algebraic equations*, Aust. J. Basic and Appl. Sci., Accepted.

5. M. Jafari, M. M. Hosseini, S. T. Mohyud-Din, M. Ghovatmand, *An efficient modification of the homotopy perturbation method for solving nonlinear system of DAEs*, Aust. J. Bas. Appl. Sci., Accepted.

6. M. Jafari, M. M. Hosseini, S. T. Mohyud-Din, M. Ghovatmand, *Modified homotopy perturbation method for solving nonlinear PDAEs and its application in nanoelectronics*, Int. J. Non-lin. Sci. Num. Simu., **11** (12) (2010) 1047-1058.

7. M. Jafari, M. M. Hosseini, M. Ghovatmand, *Solution of nonlinear PDAEs via variational iteration method for solving and its application in nanoelectronics*, Int. J. Non-lin. Sci. Num. Simu., **6** (6) (2011) 1535-1539.