بررسی دوپایایی نوری در سیستم‌های کوانتومی چهار ترازی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

آذر وفافرد

اساتید راهنما:

دکتر محمّد محمودی

دکتر مصطفی صحرایی

مهر ۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده

در این پایان نامه تلاش شده است تا رفتار پدیده دوپایایی نوری[1] (OB) در سیستم‌های کوانتومی مختلف بررسی شود. در ابتدا این پدیده در یک سیستم مولکول نقطه کوانتومی[2] (QD) سه ترازی مطالعه گردیده و از پارامترهای مختلف سیستم برای بررسی رفتار دوپایایی استفاده شده است. طبق نتایج بدست آمده، تغییر در پارامترهای تونل‌زنی، میدان دمشی، نامیزانی میدان کاوشگر و نامیزانی ایجاد شده بین ترازهای دو نقطه‌ی کوانتومی، موجب تغییرات عمده در خروجی سیستم می‌شود. تغییرات فاز نیز در سیستم مورد مطالعه قرار گرفته و مشخص شده است که تغییرات ناشی از فاز در اثر مخلوط شدن پاسخ میدان دمشی به محیط با پاسخ میدان کاوشگر به محیط است. همچنین پدیده‌ی دوپایایی در یک سیستم اتمی چهار ترازی مورد مطالعه قرار گرفته است. مشخصات این سیستم به عنوان ابزار کنترلی در نظر گرفته شده و نتایج حاصل از بررسی تغییرات این پارامترها بر روی سیستم بیان گردیده است.

[1] *Optical bistability*

[2] *quantum dot*

فهرست

چکیده . . . . . سه

مقدمه . . . . . شش

۱ دوپایایی نوری

۱.۱ برهم‌کنش نور با ماده ۲

۱.۱.۱ معادلات ماکسول ۳

۱.۱.۲ معادله‌ی موج ۴

۱.۱.۳ جذب و پاشندگی ۴

۱.۱.۴ پاسخ حالت تشدید ٦

۱.۲ نظریه نیمه‌کلاسیک برهم‌کنش اتم با میدان الکترومغناطیسی ۸

۱.۳ عملگر ماتریس چگالی ۱۱

۱.۴ اپتیک غیرخطی ۱۳

۱.۴.۱ تداخل سنج فابری ـ پرو ۱۵

۵.۱ بررسی دوپایایی نوری با توجه به نظریه‌ی کلاسیکی برهم‌کنش ۱۷
۶.۱ بررسی دوپایایی نوری با توجه به نظریه نیمه‌کلاسیکی برهم‌کنش ۲۳
۷.۱ مواد غیرخطی برای مطالعات دو پایایی نوری ۲۶
۸.۱ چیدمان استاندارد برای مطالعات آزمایشگاهی دوپایایی نوری ۲۷
۹.۱ ابزار دوپایایی نوری هیبریدی ۲۸

۲ کنترل دوپایایی نوری در یک مولکول نقطه کوانتومی

۱.۲ مدل سیستم اتمی و معادلات اتمی حاکم بر آن ۳۲
۲.۲ بررسی سیستم در حالت تشدید دوفوتونی ۳۶
۳.۲ بررسی سیستم در حالت فراتر از تشدید دوفوتونی ۴۳
۴.۲ نتیجه گیری ۴۶

۳ بررسی رفتار دوپایایی نوری در یک سیستم اتمی چهار ترازی

۱.۳ مدل سیستم اتمی و معادلات حاکم بر آن ۴۹
۲.۳ بررسی رفتار دو پایایی نوری و تحلیل نتایج ۵۳
۳.۳ نتیجه گیری ۶۰
مراجع ۶۱

مقدمه

تکنولوژی اپتیکی در $CD-ROM$ ها،چاپگرهای لیزری، دستگاه‌های فتوکپی و اسکنرها مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر چه هیچکدام از این ابزار کاملاً اپتیکی نیستند. امروزه این تکنولوژی به صورت عمده در مورد شبکه‌های ارتباطات مورد توجّه قرار گرفته است. اپراتورهای مربوط به شبکه‌ها شامل گره‌هایی هستند که به وسیله‌ی یک سری ازاتصالهای‌های فیبر اپتیکی بهم متصل شده‌اند. لینکهای فیبر اپتیکی برای انتقال اطلاعات استفاده می‌شوند و گره‌ها نیز مسیر انتقال اطلاعات را مشخص می‌کنند. در این میان اتصالهای‌های فیبر اپتیکی اطلاعات را با نور حمل می‌کنند در حالیکه گره‌ها هنوز دارای مکانیسم الکترونی هستند. آنچه مشخص است، کلیدزنی الکترونیکی سرعت شبکه‌ها را تا حدود زیادی کاهش می‌دهد. بنابراین هدف دنیای علم این است که گره‌های الکترونیکی را بوسیله با تکنولوژی اپتیکی جایگزین کند. به این منظور مطالعات پدیده‌ی اپتیک غیرخطی دوپایایی (OB) تشدید شده است. به این امید که این پدیده می‌تواند برای همه‌ی اهداف کلیدزنی اپتیکی مورد استفاده قرار گیرد. پدیده‌ی دو پایایی نوری به نوع معینی از رفتار وسایل اپتیکی اطلاق می‌شود که در آن به ازای یک شدت ورودی معین، امکان ایجاد دو حالت پایا برای شدت خروجی سیستم وجود دارد. این رفتار نتیجه‌ای از تکنیک بازخورد نور و استفاده از یک ماده غیر خطی است. بر پایه‌ی این رفتار غیر خطی، ابزارهای اپتیکی دو پایا می‌توانند به عنوان سویچ‌های اپتیکی، ترانزیستورهای اپتیکی، عناصر ذخیره سازی اپتیکی و ارتباطات اپتیکی مورد استفاده قرار گیرند.

دوپایایی نوری در سیستم‌های کوانتومی مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. به طور نمونه در سیستم‌های اتمی دو ترازی به طور گسترده هم از لحاظ نظری و هم از لحاظ تجربی بررسی شده است[۱،۲]. OB در سیستم‌های کوانتومی سه ترازی نیز به صورت نظری مطالعه شده[۳،۴] و به طور تجربی [۵] اندازه‌گیری شده است. در سالهای اخیر از نمونه‌های نقاط کوانتومی نیز برای مطالعات دوپایایی نوری استفاده می‌شود. نقاط کوانتومی ساختارهای کروی و یا بیضوی شکل در مقیاس نانو هستند. این نقاط نیمرساناهایی با ساختار سه بعدی‌اند که الکترون‌ها و حفره‌های آن در سه جهت در ترازهای انرژی گسسته محصور شده‌اند. امروزه گروههای زیادی در جهت تجاری کردن ابزارهایی بر پایه‌ی نقطه کوانتومی در تلاشند. به عنوان مثال لیزر دیودی ایجاد شده از نقطه‌ی کوانتومی می تواند جایگزین مناسبی برای لیزر دیودی ساخته شده از چاه‌های کوانتومی باشد. چگالی

آستانه‌ی پایین و حساس نبودن به دما از جمله مزایای این جایگزینی محسوب می‌شود [۸]. اخیراً ابزارهای جدیدی از نقاط کوانتومی در حال ساخت و توسعه‌اند. از جمله‌ی آنها می‌توان به ابزار حافظه بر اساس نقطه کوانتومی و دیودهای نوری اشاره کرد. بررسی پدیده‌ی همدوسی کوانتومی در نقاط کوانتومی، شاخه‌ی جدیدی در عرصه‌ی مطالعه این مواد ایجاد کرده است. QD ها خواصی شبیه بخارهای اتمی دارند با این تفاوت که ضرایب غیرخطی اپتیکی بزرگتری دارند. علاوه بر این QD ها دارای گشتاور الکتریکی بالاتری نسبت به بخارهای اتمی هستند و دلیل آن کوچک بودن جرم موثر الکترون در آنها است. تعدادی از پدیده‌های مربوط به همدوسی جمعیت در QD مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. برای مثال پدیده‌ی شفافیت القایی الکترومغناطیسی در یک QD مطالعه شده است [٦]. کنترل همدوسی تونل‌زنی در نقاط کوانتومی نشان داده شده است [۷]. اخیراً نیز برهمکنش الکترون محصور در یک ساختار نقطه کوانتومی با یک میدان الکترومغناطیسی خارجی مورد توجه محققین قرار گرفته است [۱۹]. پدیده‌های جالب دیگری از ساختارهای QD شامل یک یا دو الکترون شناخته شده‌اند. برای مثال کنترل انتقال الکترون بین دو نقطه‌ی کوانتومی و ایجاد حالتهایی با درهمتنیدگی بالا در سیستم‌های QD با دو الکترون [۱۳] به طور گسترده مورد بررسی قرار گرفته است. پدیده دوپایایی نوری در یک مولکول QD با بکار بردن یک میدان کاوشگر مطالعه شده است [۱۴].

در سالهای اخیر بیشتر توجّه‌ها در زمینه‌ی مطالعه دوپایایی نوری به بررسی اتمهای چند ترازی اختصاص یافته است. در مورد سیستم‌های اتمی چند ترازی پارامترهای موجود برای کنترل پدیده‌ی دوپایا بیشتر از پارامترهای کنترلی در مورد اتمهای دوترازی است. علاوه بر این، میدان‌های کنترلی اضافه شده به سیستم اتمی که ترازهای مختلف اتمی را به هم متصل می‌کنند، سبب ایجاد پدیده‌های جالبی در خروجی سیستم می‌شوند. ریشه این پدیده‌ها در بوجود آمدن اثر تداخل کوانتومی و یا همدوسی کوانتومی در سیستم است. شفافیت القایی الکترومغناطیسی (EIT)، شاخص شکست بزرگ بدون جذب و لیز کردن بدون ایجاد وارونگی جمعیت از جمله پدیده‌های جالبی هستند که در این سیستم‌ها مشاهده می‌شوند. سیستم‌های چهارترازی از جنبه‌های مختلفی بررسی شده‌اند. از جمله‌ی این مطالعات می‌توان به بررسی پدیده‌های EIT [١٦]، نورتند سرعت و کند سرعت[۱۷] وچند پدیده‌ی دیگر اشاره کرد. در این پایان نامه، ابتدا در فصل اوّل به بیان مفهوم دوپایایی نوری پرداخته شده است. در فصل دوم، OB در یک سیستم مولکول نقطه‌ی کوانتومی سه ترازی از طریق پارامترهای مختلف سیستم کنترل شده است. در این فصل، پدیده‌ی دوپایایی در دو حالت تشدید دوفوتونی و فراتر از آن بررسی گردیده است. در فصل آخر، دوپایایی نوری در یک سیستم کوانتومی چهار ترازی بررسی شده و نتایج

حاصل از کنترل سیستم توسط پارامترهای مختلف آورده شده است. نشان داده شده است که می‌توان به وسیله‌ی فاز نسبی بین میدان های کنترلی بکار رفته بین حالت دوپایا و چندپایا کلیدزنی انجام داد.

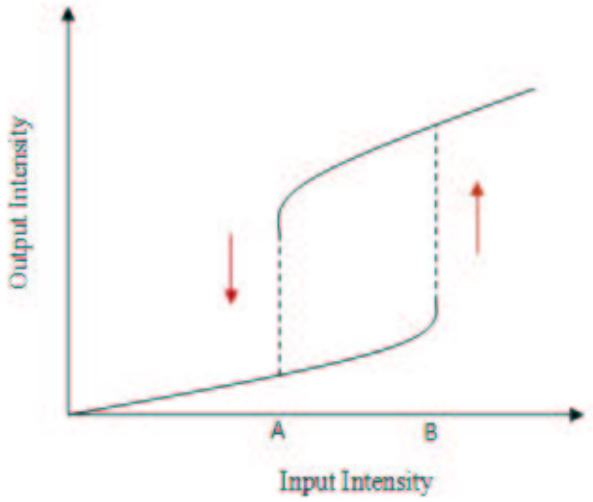
فصل اول

دوپایایی نوری

پدیده‌ی دو پایایی نوری به نوع معینی از رفتار وسایل اپتیکی اطلاق می‌شود که در آن به ازای یک شدت ورودی معین، امکان ایجاد دو حالت پایا برای شدت خروجی سیستم وجود دارد. این رفتار نتیجه‌ای از تکنیک بازخورد نور و استفاده از یک ماده غیرخطی است. بر پایه‌ی این رفتار غیرخطی، ابزار اپتیکی دو پایا می‌توانند به عنوان سویچ‌های اپتیکی، ترانزیستورهای اپتیکی، عناصر ذخیره سازی اپتیکی و ارتباطات اپتیکی مورد استفاده قرار گیرند. اولین مقاله‌ی نظری توصیف کننده‌ی پدیده دو پایایی نوری در سال ۱۹۶۹ توسط $Daneu, Goldhar, Szoke$ و $Kurnit$ منتشر شد [۲۰]. اساس وسیله‌ی اپتیکی پیشنهاد شده در این مقاله یک کاواک فابری ـ پرو[۱] است که با یک ماده‌ی غیرخطی جاذب پر شده است. اوّلین مقاله‌ی گزارش کننده‌ی مشاهدات آزمایشگاهی اثر دوپایایی نیز در سال ۱۹۷۶ توسط $Gibbs, MaCall$ و $Venkatesan$ منتشر شد[۲۱]. در این کار از یک کاواک فابری ـ پرو حاوی بخار سدیم استفاد شده‌است. در این آزمایش رفتار دو پایایی بر اساس تغییرات غیرخطی ضریب شکست نور، توجیه شده است. در مطالعات آزمایشگاهی با مواد غیرخطی متفاوت، محققین توانستند رفتار غیرخطی سیستم‌ها را با رسم شدت خروجی بر حسب شدت ورودی بررسی کنند. ویژگی مشترک تمامی این منحنی‌ها، شکل حلقه‌ی پسماند آنها است. رفتار نور در این سیستم‌ها به

[۱] $Fabry - Perot\ cavity$

صورت طرحوار در شکل (۱—۱) نشان داده شده است. انتخاب هر یک از مسیرها به سابقه تغییرات شدت



شکل ۱—۱: منحنی خروجی یک سیستم دوپایا [۲۶].

ورودی بستگی دارد. اگر دامنه‌ی میدان فرودی در حال افزایش باشد، دامنه‌ی خروجی شاخه‌ی پایین منحنی را دنبال می‌کند تا به نقطه‌ی B برسد، سپس به شاخه‌ی بالا پریده و شاخه‌ی بالا را ادامه می‌دهد. حال اگر دامنه‌ی ورودی در حال کاهش از یک نقطه شروع در شاخه‌ی بالا باشد، شدت خروجی روند نزولی را طی می‌کند تا به نقطه‌ی A برسد. سپس جهشی به شاخه‌ی پایین انجام داده و شاخه‌ی پایین را دنبال می‌کند. بنابراین انتخاب هر یک از حالت‌های خروجی به روند افزایشی یا کاهشی شدت ورودی بستگی دارد. این ویژگی امکان ساخت ابزار اپتیکی که مکانیسم آنها بر پایه دو حالت «۰» و «۱» می‌باشد را فراهم می‌کند. امروزه تحقیقات فراوانی برای کاربردی کردن این پدیده در حال انجام است. امید می‌رود با برطرف کردن موانعی همچون آستانه‌ی بالای شدت برای انجام کلیدزنی، ابزار اپتیکی ایده‌آلی ساخت.

۱.۱ برهم‌کنش نور با ماده

در فیزیک کلاسیک، برهم‌کنش موج الکترومغناطیسی با ماده در فرکانس‌های اپتیکی نسبت به فرکانس‌های رادیویی یا میکروویو کمی پیچیده‌تر است. تعداد بیشماری از نتایج در حالت تشدیدی برای بازه‌ی اپتیکی اتّفاق می‌افتند که در فرکانس‌های پایین‌تر از $10\ GHz$ امکان‌پذیر نیستند. از جمله‌ی این نتایج تشدیدی می‌توان به

تغییرات بزرگ میزان جذب، پراکندگی و پاشندگی نور به ازای تغییرات کم در فرکانس اشاره کرد. این نتایج سبب می‌شوند تا بررسی پدیده‌های ناشی از برهم‌کنش موج الکترومغناطیسی با ماده در بازه‌ی فرکانس اپتیکی، از اهمیّت فراوانی برخوردار باشند.

۱.۱.۱ معادلات ماکسول

معادلات بنیادی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی متغیّر با زمان که به معادلات ماکسول مشهور هستند، به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{۱}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{۲}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \rho_\nu, \tag{۳}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0. \tag{۴}$$

این روابط توصیف کننده‌ی پاسخ بار به میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی فرودی بر ماده هستند. D بردار جابجایی نامیده می‌شود و به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \tag{۵}$$

و چگالی شارش مغناطیسی نیز به این شکل توصیف می‌شود:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}). \tag{۶}$$

در فرکانس‌های اپتیکی یا در مواد غیرمغناطیسی، پارامتر M که مغناطش ماده را نشان می‌دهد برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. دلیل این امر این است که مولفهٔ‌ی مغناطیسی نیروی لورنتس در مقایسه با مولفهٔ الکتریکی در فرکانس‌های بالا قابل چشم‌پوشی است. در مواد خطی، قطبش برابر است با:

$$\vec{P} = \varepsilon \chi_e^{(1)} \vec{E}, \tag{۷}$$

که در این رابطه $\chi_e^{(1)}$ ، پذیرفتاری الکتریکی خلأ را نشان می‌دهد.

۲.۱.۱ معادله‌ی موج

معادله‌ی موج، رابطه‌ی کلیدی توصیف کننده‌ی انتشار نورکلاسیکی در ماده است. این رابطه از ترکیب دو معادله‌ی (۱) و (۲) معادلات ماکسول بدست می آید. شکل این معادله با فرض $J = 0$ و $M = 0$ به صورت زیر است:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \qquad (۸)$$

در این رابطه تغییرات فضایی قطبش صفر فرض شده است. پارامترهای c وμ_0 به ترتیب سرعت نور و تراوایی مغناطیسی خلأ را نشان می‌دهند.

۳.۱.۱ جذب و پاشندگی

پاسخ معادله‌ی (۸) بسیاری از پدیده‌های کلاسیکی خطی مانند جذب و پراکندگی خطی را به خوبی توصیف می‌کند. به عنوان نمونه به توصیف جذب و پراکندگی یک موج تخت می‌پردازیم. اگر این موج در راستای z منتشر شود و قطبش آن در راستای x باشد، با رابطه‌ی زیر توصیف می‌شود:

$$\vec{E}(z,t) = \frac{1}{2}E_{0x}(z)\hat{x}e^{[i(kz-\omega t)]} + c.c, \qquad (۹)$$

که $c.c$ قسمت همیوغ مختلط میدان را نشان می‌دهد. با جاگذاری این رابطه در معادله‌ی موج به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial^2 E_{0x}(z)}{\partial z^2} + 2ik\frac{\partial E_{0x}(z)}{\partial z} - k^2 E_{0x}(z) + \frac{\omega^2}{c^2}\ E_{0x}(z) = \frac{\omega^2}{c^2}\chi E_{0x}(z). \qquad (۱۰)$$

در این مرحله، از تقریب پوش کند تغییر [۲] استفاده می‌کنیم که یک ساده‌سازی محاسباتی بسیار مهم محسوب می‌شود[۹]. در این تقریب، فرض می‌شود که تغییرات دامنه $E_{0x}(z)$ در مقیاس قابل مقایسه با طول موج، بسیار

[۲] *slowly varying envelope approximation*

کم است. بنابراین سهم جمله‌ی $\partial^2 E_0(z)/\partial z^2$ در رابطه (۱۰) بسیار ناچیز شده و می‌توان از آن صرف‌نظر کرد و معادله را به شکل ساده‌تر زیر بازنویسی کرد:

$$2ik\frac{\partial E_{0x}(z)}{\partial z} - (k^2 + \frac{\omega^2}{c^2})E_{0x}(z) = \frac{\omega^2}{c^2}\chi_e E_{0x}(z). \qquad (۱۱)$$

با در نظر گرفتن پذیرفتاری به عنوان یک عدد مختلط ($\chi_e = \chi' + \chi''$) و برابر قرار دادن قسمت‌های حقیقی طرفین معادله موج به رابطه زیر می‌رسیم:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi'). \qquad (۱۲)$$

از این معادله شاخص پراکندگی با توجه به رابطه‌ی $n = kc/w$، به صورت زیر بدست می‌آید:

$$n = 1 + \chi'. \qquad (۱۳)$$

با مساوی قرار دادن قسمت‌های موهومی نیز، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$-2ik\frac{\partial E_{0x}(z)}{\partial z} = \frac{\omega^2}{c^2}\,\chi'' E_{0x}(z), \qquad (۱۴)$$

دو طرف این معادله را در قسمت موهومی دامنه میدان ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\partial |E_0|^2}{\partial z} = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\chi''}{k}|E_0|^2, \qquad (۱۵)$$

و در نهایت می‌توان این رابطه را به شکل زیر بیان کرد:

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\alpha I, \qquad (۱۶)$$

که I شدت میدان اپتیکی است و پارامتر α به عنوان ضریب جذب به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha \equiv \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\chi''}{k}. \qquad (۱۷)$$

با این تعریف، جواب معادله (۱۶) خواهد شد:

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z} \qquad (۱۸)$$

که این معادله به قانون بیر[۳] مشهور است. در حالتی که $\alpha > 0$ باشد، نور تحت عبور از ماده به صورت نمایی کاهش می‌یابد و به آن حالت جذب $(loss)$ می‌گویند. زمانی که $\alpha < 0$ باشد، شدت موج الکترومغناطیسی به صورت نمایی تقویت می‌شود و به آن حالت بهره$(gain)$ می‌گویند. قانون بیر برای انتشار نور در بسیاری از سیستم‌ها به کار می‌رود. سیستم هایی که در آنها به دام افتادگی نور[۴]، اشباع و پراکندگی چندگانه[۵] اتّفاق می‌افتد، از جمله‌ی این سیستم‌ها هستند.

۴.۱.۱ پاسخ حالت تشدید

تا کنون پاسخ میدان الکتریکی را توسط قطبش بیان کردیم که مقدار آن به میدان فرودی بر ماده بستگی داشت. بوسیله‌ی ضریب تناسب بین قطبش و میدان الکتریکی (χ)، تعدادی از اثرات شناخته شده‌ی انتشار نور در ماده مانند وابستگی فازی سرعت نور به ضریب شکست و همین طور وابستگی نمایی شدت به ضریب جذب توصیف شدند. امّا هنوز مدلی برای توصیف رفتار پذیرفتاری ارائه نشده است. به این منظور به سراغ مدل کلاسیکی نوسان هارمونیکی خطی (قانون هوک) می‌رویم. الکترون و پروتون دو جزء اتم هستند که توسط یک نیروی فنری که مربوط به قید بین هسته و الکترون است، بهم متصل می‌شوند. ضریب فنر این نیروی فنری را k_0 در نظر می‌گیریم. طبق تقریب بورن، فرض می‌کنیم که پروتون در اثر اعمال میدان، جابجایی قابل ملاحظه‌ای را ندارد. در این صورت جابجایی الکترون از حالت تعادل توسط رابطه $\vec{F} = -e\vec{E} = -k_0\vec{x}$ بدست می‌آید. در این رابطه E با زمان نوسان می‌کند. نتیجه این معادله به صورت $x(t) = x_0 e^{(-i\omega t)}$ بیان می‌شود. برای بدست آوردن دامنه‌ی جابجایی الکترون، رابطه $x(t)$ را در معادله‌ی قانون دوم نیوتون قرار می‌دهیم:

$$m_e \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} - m_e \gamma \frac{\partial x(t)}{\partial t} + k_0 x(t) = -eE_{0x} e^{(-i\omega t)}, \qquad (۱۹)$$

از حل این معادله به رابطه زیر برای دامنه‌ی جابجایی می‌رسیم:

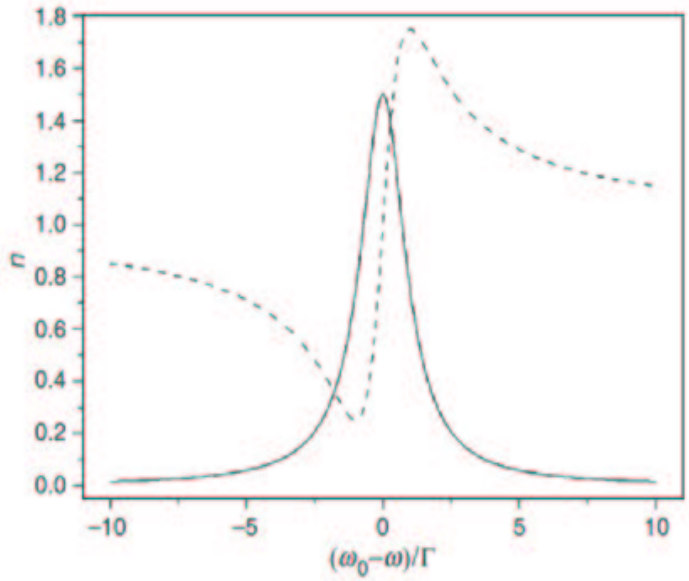
$$x_0 = \frac{eE_{0x}/m_e}{\omega^2 - i\omega\gamma - \omega_0^2}. \qquad (۲۰)$$

---

[۳] $Beer$

[۴] $radiation\ trapping$

[۵] $multiple\ scattering$



شکل ۱—۲: نمودار وابسته به فرکانس جذب (خط پر) و پراکندگی (خط چین) برای فرکانس‌های نزدیک به فرکانس تشدید (ω_0) در مدل کلاسیکی [۹].

که $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m_e}}$، فرکانس تشدیدی نوسان و γ ثابت میرایی تجربی است. قطبش کلی در این مدل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P(t) = -\sum_{1}^{N} ex(t) = -Nex(t) \qquad (۲۱)$$

در این رابطه N، تعداد اتم‌های ماده را نشان می‌دهد. با مقایسه‌ی این رابطه با رابطه‌ی $P = \varepsilon_0 \chi E$ برای قطبش، مشخص می‌شود که پذیرفتاری به فرکانس وابسته است. در این صورت، منحنی‌های جذب و پاشندگی به صورت شکل (۱—۲) وابسته به فرکانس خواهند بود. در این مدل کلاسیکی رابطه‌ی صریحی برای ثابت‌های k_0 و γ وجود ندارد و نیاز به مدل کاملتری است. اصولاً دو روش بسیار مهم دیگر غیر از نظریه کلاسیکی وجود دارد که در توصیف رفتارهای غیرخطی در حوزه اپتیک، فیزیک لیزر و بسیاری از پدیده‌های دیگر موفق‌ترند. روش اول تئوری نیمه‌کلاسیکی نور است که در بخش بعد راجع به آن صحبت خواهد شد. نظریه‌ی دوم نیز مربوط به تئوری الکترودینامیک کوانتومی است که در این پایان نامه به دلیل عدم استفاده از آن، معرفی نشده است.

۲.۱ نظریه نیمه‌کلاسیک برهم‌کنش اتم با میدان الکترومغناطیسی

نظریه نیمه‌کلاسیک برهم‌کنش اتم با میدان الکترومغناطیسی زمانی مطرح می شود که اتم به صورت کوانتومی و میدان به صورت کلاسیکی در نظر گرفته شود. در این نظریه به جای متغیرهای مختلف هامیلتونی مربوط به اتم، عملگرهای متناظرشان قرار می گیرند. بنابراین هامیلتونی نیمه‌کلاسیکی برهم‌کنش اتم کوانتومی با میدان الکترومغناطیسی کلاسیکی به صورت زیر بیان خواهد شد:

$$H = H_0 + H^{(I)} = H_0 - \hat{\vec{d}}.\vec{E}(t), \qquad (۲۲)$$

در رابطه بالا $\hat{d}$ عملگر گشتاور دوقطبی الکتریکی می‌باشد. برای بدست آوردن تغییرات حالت سیستم در اثر برهم‌کنش از نظریه‌ی اختلال استفاده می‌شود. میدان الکتریکی به شکل $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ فرض می‌شود و به طور ناگهانی در لحظه $t = 0$ روشن می‌شود. هم‌چنین فرض بر این است که تقریب دو قطبی الکتریکی، $k.r << 1$، برقرار بوده ، و اتم در ابتدا در حالت $|i >$ باشد. بنابراین تابع حالت سیستم در زمان‌های $t > 0$ به صورت زیر خواهد بود:

$$|\Psi(t) >= \sum_k C_k(t) e^{-i\frac{E_k t}{\hbar}} |k >, \qquad (۲۳)$$

در رابطه بالا شرط بهنجارش برای دامنه‌های وابسته به زمان $C_k(t)$ برقرار است. با جایگذاری این رابطه در معادله شرودینگر وابسته به زمان

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t) >}{dt} = (\hat{H}_0 + \hat{H}^{(I)})|\Psi(t) >, \qquad (۲۴)$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر را برای دامنه‌های احتمال بدست می آوریم:

$$\dot{C_\ell}(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_k \dot{C_k}(t) < \ell|\hat{H}^{(I)}|k > e^{i\omega_{k\ell} t}. \qquad (۲۵)$$

در اینجا $\omega_{k\ell} = \frac{E_\ell - E_k}{\hbar}$ فرکانس گذار بین ترازهای ℓ و k می‌باشد. اکنون با استفاده از نظریه‌ی اختلال تا مرتبه اول برای دامنه‌های احتمال خواهیم داشت :

$$\dot{C_\ell^{(0)}} = 0,$$

$$\dot{C_\ell^{(1)}} = -\frac{i}{\hbar}\sum_k C_k^{(0)} H_{\ell k}^{(I)}(t) e^{i\omega_{\ell k}t}, \qquad (۲۶)$$

در رابطه بالا $H_{\ell k}^{(I)}(t) \equiv < \ell|H^{(I)}(t)|k >$ تعریف شده است. نظریه‌ی اختلال تا زمانی معتبر می‌باشد که میدان خارجی ضعیف باشد به طوریکه جمعیت های اتمی خیلی کم تغییر کنند. تحت این شرایط، اگر $C_i(0) = 1$ و $C_f(0) = 0$ باشند، برای $t > 0$، $C_i(t) \approx 1$ و $|C_f(t)| << 1$ $(f \neq i)$ برقرار است. بنابراین معادله (۲۶) به ازای $k = i$ نتیجه زیر را خواهد داد:

$$\dot{C_f^{(1)}}(t) = -\frac{i}{\hbar} H_{fi}^{(I)}(t) e^{i\omega_{fi}t} C_i^{(0)}(t). \qquad (۲۷)$$

دامنه‌ی گذار از تراز $|i >$ به $|f >$ با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی بالا بدست می‌آید:

$$C_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' H_{fi}^{(I)}(t') e^{i\omega_{fi}t'} C_i^{(0)}(t'). \qquad (۲۸)$$

عناصر ماتریسی عملگر $\hat{\vec{d}}$ فقط برای حالت‌هایی که پاریته‌ی مخالف دارند غیرصفر خواهد بود. بنابراین تصحیح مرتبه اول برای دامنه‌ی احتمال در حالت اولیه صفر می‌شود $(C_i^{(1)} = 0)$. با توجّه به $H^{(I)} = -\hat{\vec{d}}.\vec{E}_0\cos(\omega t)$، $C_f^{(1)}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

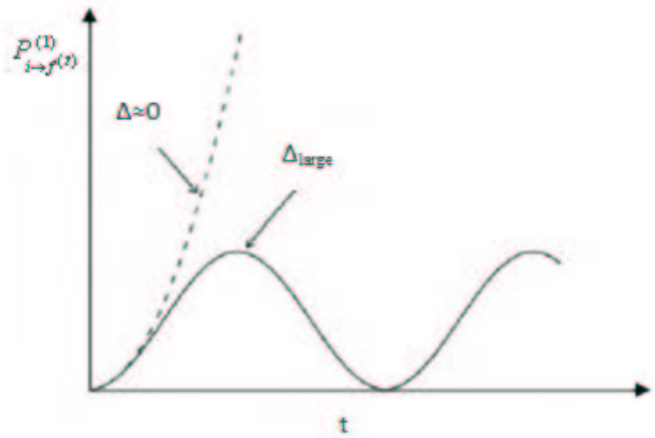
$$C_f^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' H_{fi}^{(I)}(t') e^{i\omega_{fi}t'} = \frac{1}{2\hbar}(\hat{\vec{d}}.\vec{E}_0)_{fi} \times [\frac{e^{i(\omega+\omega_{fi})t}-1}{(\omega+\omega_{fi})} - \frac{e^{-i(\omega-\omega_{fi})t}-1}{(\omega-\omega_{fi})}]. \qquad (۲۹)$$

هنگامیکه فرکانس میدان تابشی (ω) نزدیک به فرکانس گذار اتمی باشد (ω_{fi})، اثر جمله‌ی اول در مقایسه با جمله‌ی دوم ناچیز خواهد بود زیرا جمله‌ی اول به شدت نوسان می‌کند و مقدار انتگرال آن در بازه‌های زمانی که طولشان بزرگتر از $\frac{1}{2\omega}$ باشد نسبت به انتگرال دوم کوچک خواهد شد. بنابراین ما در تقریب موج چرخان از جمله‌ی اول در مقابل جمله‌ی دوم صرف‌نظر می‌کنیم. بدین ترتیب احتمال گذار در مرتبه‌ی اول برابر است با:

$$P_{i\longrightarrow f}^{(1)}(t) = |C_f^{(i)}(t)|^2 = \frac{|(\hat{d}.E_0)_{fi}|^2}{\hbar^2}\frac{\sin^2(\frac{\Delta t}{2})}{\Delta^2}, \qquad (۳۰)$$

در اینجا $\Delta = \omega - \omega_{fi}$، نامیزانی بین میدان تابشی و گذار اتمی می‌باشد. وقتی $\Delta \neq 0$ باشد ماکسیمم مقدار احتمال به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(P_{i\longrightarrow f}^{(1)})_{max} = |C_f^{(i)}(t)|^2 = \frac{|(\hat{d}.E_0)_{fi}|^2}{\hbar^2}\frac{1}{\Delta^2}. \qquad (۳۱)$$

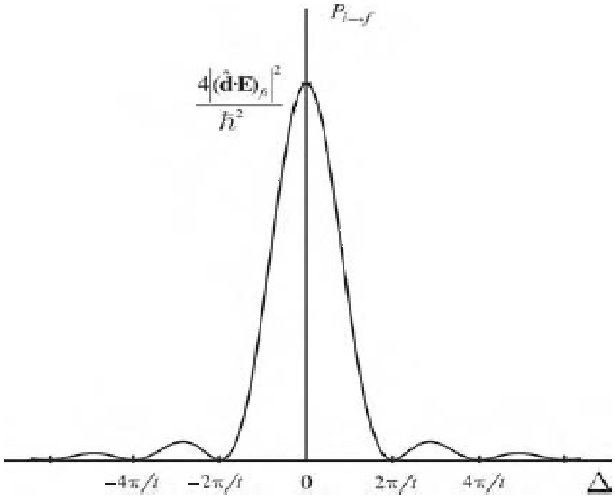


شکل۱—۳: $P^{(1)}_{i\longrightarrow f}(t)$ بر حسب زمان برای نامیزانی های کوچک و بزرگ [۲۷].

و در حالت تشدید، $\Delta = 0$، برابر است با:

$$(P^{(1)}_{i\longrightarrow f})_{max} = |C^{(i)}_f(t)|^2 = \frac{|(\hat{d}.E_0)_{fi}|^2}{4\hbar^2}t^2. \qquad (۳۲)$$

نظریه‌ی اختلال تا زمانی معتبر خواهد بود که $(P^{(1)}_{i\longrightarrow f})_{max} << 1$ باشد. بنابراین در حالت تشدید رابطه (۳۲) در زمان‌های کوچک صادق است. در شکل (۱—۳) احتمال گذار برای هر دو مورد $\Delta \approx 0$ و نامیزانی‌های بزرگ بر حسب زمان رسم شده است. همچنین در شکل (۱—۴) این احتمال گذار به صورت تابعی از Δ رسم شده است.



شکل۱—۴: احتمال گذار، $P^{(1)}_{i\longrightarrow f}(t)$ بر حسب نامیزانی Δ [۲۷].

در حد $t \longrightarrow \infty$ و $\Delta \approx 0$ بنابراین با تعریف نرخ احتمال گذار به صورت

$$W_{i \longrightarrow f} = \frac{P^{(1)}_{i \longrightarrow f}}{t}, \tag{۳۳}$$

و توجه به این نکته که در عمل میدان دارای پهنای فرکانسی می‌باشد، مجموعه ای از حالت های نهایی $|f>$ برای اتم قابل دسترس خواهند بود. اگر $[f]$ مجموعه‌ای از حالت‌های نهایی باشد، برای یک میدان با فرکانس ω نرخ احتمال گذار به این صورت خواهد بود:

$$W_{i \longrightarrow [f]} = \frac{\pi}{2} \sum_{[f]} \frac{|(\hat{\vec{d}}.\vec{E}_0)_{fi}|^2}{\hbar^2} \delta(\omega - \omega_{fi}). \tag{۳۴}$$

عبارت (۳۵) به قائده طلایی فرمی مشهور است و مفهوم آن این است که گذار در فرکانس‌هایی رخ می‌دهد که با فرکانس نور تابشی برابر باشند [۲۷].

۳.۱ عملگر ماتریس چگالی

ماتریس چگالی یک ابزار فوق‌العاده کاملی است که توصیف بسیاری از پدیده‌ها را آسان ساخته است. ماتریس چگالی در مکانیک کوانتومی شبیه توزیع احتمال مکان و تکانه در فضای فاز است. یک توصیف احتمالی توسط ماتریس چگالی زمانی اتّفاق می‌افتد که در یک سیستم آنسامبلی نتوان با قطعیت گفت که سیستم در کدام یک از حالت‌های خالص[۶] قرار دارد. در ادامه به بیان فرمول بندی ماتریس چگالی می‌پردازیم. در مکانیک کوانتومی، بردار حالت برای یک سیستم به طور کامل رفتار آماری اندازه گیری یک سیستم را مشخص می‌کند. برای یک کمّیت مشاهده‌پذیر با عملگر A، مقدار چشم‌داشتی برای یک تابع حقیقی مانند F، از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$< \psi | F(A) | \psi > \tag{۳۵}$$

---

[۶] $pure$

این رابطه در واقع میانگین‌گیری کوانتومی سیستم محسوب می‌شود. حال یک سیستم کوانتومی آمیخته را در نظر می‌گیریم که دارای دو حالت خالص $|\psi>$ و $|\phi>$ است و احتمال آنها به ترتیب برابر با p و $1-p$ است. در این صورت مقدار چشم‌داشتی این سیستم برای تابع F، برابر با $tr[\rho F(A)]$ می‌شود که ρ عملگر ماتریس چگالی را نشان می‌دهد و برای این سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\rho = p\,|\psi><\psi| + (1-p)|\phi><\phi|. \qquad (۳۶)$$

در حالت کلی برای یک سیستم کوانتومی آمیخته که فضای برداری آن متناهی باشد، عملگر ماتریس چگالی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j><\psi_j|, \qquad (۳۷)$$

که p_j یک مقدار مثبت است و از رابطه‌ی $\sum_j p_j = 1$ تبعیّت می‌کند. این معادله ابزاری است که متوسط‌گیری آنسامبلی از سیستم را انجام می‌دهد.

با استفاده از معادلات شرودینگر که تحول زمانی حالت های خالص را توصیف می‌کند، معادله‌ی تحول زمانی ماتریس چگالی نیز به صورت زیربیان می‌شود:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H(t), \rho(t)]. \qquad (۳۸)$$

این معادله ون نیومن[۷] نام دارد و اطلاعات آماری سیستم از این معادله بدست می‌آید. به همین دلیل بسیار کلی‌تر از معادله شرودینگر است [۲۹]. در شکل ماتریسی عملگر چگالی، عناصر قطری نشان دهنده‌ی جمعیّت سیستم اتمی و عناصر غیرقطری نشان دهنده همدوسی اتمی می‌باشند. در رابطه بالا نرخ واپاشی از ترازهای اتمی ناشی از گسیل خودبخودی در نظر گرفته نشده است. این اثر با اضافه کردن جملات واپاشی پدیده شناختی به معادله حرکت عملگر چگالی توضیح داده می‌شود. این نرخ واپاشی بوسیله ماتریس Γ که با رابطه زیر تعریف می‌شود به معادله اضافه می‌شود.

$$< n|\Gamma|m >= \gamma_n \delta_{nm}. \qquad (۳۹)$$

[۷] *von neumann*