بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

موضوع:

کلاسی از ماترویدهای غیر دودویی با مینورهای دودویی فراوان

رحیم جزء مقدم

استاد راهنما:

دکتر حبیب اذانچیلر

دانشکده علوم

گروه ریاضي

آبان ۱۳۸۷

پایان نامه براي دریافت درجه کارشناسي ارشد

آقای رحیم خرم مقدم ۸۷/۸/۱۵

پایان نامه به تاریخ شماره مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه

و نمره ۱۸/۰ قرار گرفت.
هجده

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران:

۲- استاد مشاور: حبیب الله نصیر

۳- داور خارجی: قدرت الله [illegible]

۴- داور داخلی: هوشنگ [illegible]

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی: اصغر استاد[illegible]

[illegible]

تقدیر و تشکر

با حمد و سپاس پروردگار بزرگ و بلند مرتبه و با تشکر از :

• استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر اذانچیلر که با زحمات فراوان و سعه صدر خویش در تمامی مراحل این کار همواره مشوق و یاری کننده من بودند.

• اساتید گروه ریاضی از جمله جناب آقای دکتر آزادی و ریاست محترم دانشکده علوم جناب آقای دکتر قهرمانلو و نماینده تحصیلات تکمیلی آقای دکتر استاد باشی که قبول زحمت فرموده و پایان نامه من را مورد مطالعه قرار دادند و تمامی مسئولین محترم دانشگاه که امکانات را برای ایجاد کارشناسی ارشد در گرایش متروید فراهم نموده‌اند.

• خانواده عزیزم بالاخص پدر و مادر بزرگوار و دلسوزم که همواره یاری گر و پشتیبان من در تمامی مراحل زندگی‌ام بوده‌اند.

و تمامی دوستانی که در به پایان رساندن این کار همواره کمک حال من بودند.

مشخصات مقاله کار شده

کلاسی از ماترویدهای غیر دودویی با مینورهای دودویی فراوان

کار مشترکی از آلن میلز و جیمز آکسلی

این مقاله در سال ۱۹۹۹ در مجله Discrete Mathematics به چاپ رسید. این کار تعمیم کار تات و آکسلی در مورد حذف و ادغام روی ماترویدها می باشد. در ابعاد دیگر کلاس‌بندی روی ماترویدهای غیر دودویی صورت پذیرفت ولی در مورد تعمیم مینور ماترویدهای غیر دودویی در این حالت کار خاصی از آن به بعد انجام نشده است.

A class of non-binary matroids with many binary minors

Allan D. Mills , James G. Oxley

Discrete Mathematics 207 (1999) 173-187

چکیده

تات در مقاله خود تحت عنوان یک قضیه هموتوپی برای ماترویدها، ثابت کرد که تنها ماتروید غیر دودویی M که به ازای هر عضو e از مجموعه زمینه $E(M)$ هر دوی ماترویدهای $M\backslash e$ و M/e دودویی هستند، همان ماتروید $U_{۲,۴}$ می باشد. اکسلی با قرار دادن این ویژگی که به ازای هر عضو دلخواه از ماتروید M حداقل یکی از ماترویدهای حاصل از عمل حذف $M\backslash e$ و یا عمل ادغام M/e دودویی باشند به تعمیم این قضیه پرداخت.

ما نیز به مشخص سازی آن دسته از ماترویدهای غیر دودویی M می پردازیم که به ازای هر دو عضو e و f حداقل دو تا از ماترویدهای $M\backslash e, f$، $M\backslash e/f$، $M/e\backslash f$ و $M/e, f$ دودویی باشند.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

ماترویدهای دودویی دارای جایگاه عظیم و کاربرد فراوان در نظریه ماتروید هستند، لذا شناسایی این ماترویدها و هر ماترویدی که تحت چند عمل کوتاه دودویی شوند، در بالا بردن کارایی این نظریه بسیار سودمند خواهد بود. مهم‌ترین کاربرد این ماترویدها در گراف‌ها، شبکه‌ها و رمزنگاری می باشد. هدف اصلی این پایان‌نامه شناسایی کلاسی از ماترویدهای غیر دودویی با مینورهای دودویی فراوان می باشدکه این مینورهای دودویی گاهی به شکل ماترویدهایی جدید و پرکاربرد می‌باشند.
در نگارش این پایان نامه تلاش کرده‌ایم تا مطالب به ساده‌ترین صورت بیان شود. این پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم شده است .

فصل اول را با ارائه‌ی مفاهیم پایه‌ای از نظریه گراف و ماتروید آغاز می کنیم. مطالعه فصل اول، زمینه‌ی لازم را جهت ارائه بحث اصلی فراهم می‌سازد.

در فصل دوم پس از معرفی واهلش و خواص آن به بیان خواص مهم و جالبی از ماترویدهای ۳—همبند می پردازیم. در بخش سوم از این فصل قضیه مهم و بنیادی شکافنده و نتایج آن را بیان کرده و به کمک آنها به اثبات برخی از لم‌های کمکی در اثبات قضیه اصلی می پردازیم. در بخش آخر نیز ماترویدهای سه‌سه‌ای و ویژگی‌های آن را مورد بررسی و مطالعه قرار داده و به بیان قضیه اصلی برای شناسایی ماترویدهای سه‌سه‌ای می پردازیم.

در فصل سوم به شناسایی ماترویدهای غیر دودویی که با حذف یا ادغام یک عضو دودویی می‌شوند، می‌پردازیم. این شناسایی در دو حالت و تحت دو بخش صورت گرفته است. در بخش اول

ماترويد در نظر گرفته شده غیردودویی و ۳–همبند است اما در بخش دوم این حالت تعمیم پیدا کرده و تمامی ماترویدهای غیر دودویی با ویژگی ذکر شده را شامل می شود. این فصل را می توان به عنوان جرقه اصلی در رسیدن به نتیجه اصلی در نظر گرفت.

در فصل آخر از این پایان نامه به شناسایی کلاسی از ماترویدهای غیر دودویی با مینورهای دودویی فراوان می پردازیم. این کار همانند فصل سه ابتدا روی ماترویدهای ۳–همبند صورت می‌گیرد و در بخش بعد به بیان کلی و تعمیم اصلی می‌پردازد.

در حالت ۳–همبندی کار روی رتبه و هم رتبه ماتروید M بوده و در هر حالت ماتروید یکریخت با ماتروید M را تعیین می‌کنیم.

کار اصلی روی ماترویدهای غیر دودویی، ۳–همبند و دارای رتبه و هم رتبه بیش از سه می‌باشد. در این حالت با تعریف مجموعه $Z(M)$ از عضوهای غیر دودویی به ساخت گراف $G(M)$ با مجموعه رأس‌های $Z(M)$ می‌پردازیم و ثابت می‌کنیم این گراف یکریخت با گراف دو بخشی کامل و یا منشور مثلثی شکل است. در پایان بخش اول ماترویدهای یکریخت با M و دارای گراف‌های با اعضای غیر دودویی را مشخص می‌کنیم.

در بخش پایانی قضیه اصلی و تعمیمی کلی از بخش اول را ارائه می‌دهیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل به برخی از تعاریف و قضایای پایه‌ای مورد نیاز از نظریه گراف و ماترویید اشاره می‌کنیم و برای خلاصه گرایی از ارائه اثبات قضایا و لم‌ها در این فصل صرف نظر می‌کنیم .

۱.۱ گراف

تعریف ۱.۱.۱ گراف[۱] G سه تایی است متشکل از یک مجموعهٔ متناهی و غیر خالی $V(G)$ که اعضای آن رأس‌های گراف[۲] و یک مجموعهٔ متناهی $E(G)$ که اعضای آن یال‌های گراف[۳] نامیده می‌شوند و یک رابطه که به هر عضو $E(G)$ دو عضو از اعضای $V(G)$ را وابسته می‌کند.

تعریف ۲.۱.۱ دو عضو u و v از مجموعه $V(G)$ را مجاور هم گوییم هرگاه $uv \in E(G)$ باشد. در غیر این صورت این دوعضو را نامجاور گوییم.

تعریف ۳.۱.۱ اگر نقاط انتهایی یک یال بر هم منطبق باشند آن را یک طوقه[۴] می گوییم و اگر نقاط انتهایی دو یال یکسان باشند، آنها را یال‌های موازی یا چندگانه[۵] گوییم و گراف G را که فاقد

[۱] Graph
[۲] Vertex set
[۳] Edge set
[۴] Loop
[۵] Multiple

طوقه و یال موازی باشد گراف ساده [۶] گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ گراف H زیرگراف [۷] G است هر گاه:

(۱) $V(H) \subseteq V(G)$ (۲) $E(H) \subseteq E(G)$

در این‌صورت آن را به‌صورت $H \subseteq G$ نشان داده و گوییم G شامل H است.

تعریف ۵.۱.۱ گراف های G_1 و G_2 را گراف های یکریخت [۸] گوییم و با $G_1 \cong G_2$ نشان می‌دهیم هر گاه تناظر یک به یک $f : V(G_1) \to V(G_2)$ وجود داشته باشد به‌طوری که :

$$uv \in E(G_1) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(G_2)$$

تعریف ۶.۱.۱ زیر مجموعه A از $V(G)$ را مستقل [۹] گوییم هر گاه هر دو عضو A نامجاور باشند.

تعریف ۷.۱.۱ گراف G را دوبخشی [۱۰] گوییم اگر بتوان مجموعه رأس‌های آن را به صورت اجتماع دو مجموعه مستقل جدا از هم مثل V_1 و V_2 نوشت به‌طوری که هر یال G یک رأس از V_1 را به یک رأس از V_2 وصل کند، این گراف را به‌صورت $G(V_1, V_2)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید G یک گراف دو بخشی با افراز دو بخشی $V(G) = V_1 \cup V_2$ باشد. اگر هر رأس از V_1 با هر رأس V_2 مجاور باشند، گوییم G یک گراف دوبخشی کامل [۱۱] است.

اگر $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$، در این صورت گراف دو بخشی کامل را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱ گراف G را k-بخشی گوییم اگر بتوان $V(G)$ را به صورت اجتماع k مجموعه مستقل دو به دو جدا از هم نوشت.

[۶] Simple graph

[۷] Subgraph

[۸] Isomorphic graphs

[۹] Independendent

[۱۰] Bipartite

[۱۱] Complete partition graph

تعریف ۱۰.۱.۱ گراف ساده‌ای که در آن هر دو رأس متمایز با یک یال به یکدیگر متصل شوند را گراف کامل [۱۲] می‌نامیم. هر گراف کامل با n رأس را با K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ برای هر رأس $v \in V(G)$، درجه [۱۳] آن رأس را تعداد یال‌های واقع بر آن رأس تعریف کرده و آن را با $d(v)$ نشان می دهیم.

رأسی که هیچ یالی بر آن واقع نباشد (رأس با درجه صفر) را رأس تنها [۱۴] گوییم و کمترین و بیشترین درجهٔ رأس‌های G را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ گراف G را منتظم گوییم اگر $\Delta(G) = \delta(G)$ و آن را k-منتظم گوییم اگر $\Delta(G) = \delta(G) = k$.

تعریف ۱۳.۱.۱ یک گشت [۱۵] در گراف G دنباله‌ای از رأس‌ها و یال‌های G مانند $v_0 e_1 v_1 \ldots e_k v_{k+1}$ است که در آن v_{i-1} و v_i برای هر $0 \leq i \leq k+1$ نقاط انتهایی یال e_i هستند.

اگر یالی در گشت تکرار نشود، آن را یک گذر [۱۶] گوییم و اگر هیچ رأسی در گذر تکرار نشود، آن را یک مسیر [۱۷] می‌نامیم.

مسیر $v_0 e_1 v_1 \ldots e_n v_n$ که در آن رابطه $v_0 = v_n$ برقرار باشد را دور [۱۸] گوییم.

تعریف ۱۴.۱.۱ گراف G را همبند [۱۹] گوییم هر گاه برای هر دو رأس v و u از آن یک مسیر وجود داشته باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱ همبندی G که آن را با $K(G)$ نشان می دهیم عبارتست از کمترین تعداد رأس‌های ممکن که با حذف آنها یک گراف ناهمبند یا یک رأس تنها حاصل می‌شود. گراف G را

[۱۲] Complete graph
[۱۳] Degree
[۱۴] Isolated vertex
[۱۵] Walk
[۱۶] Trail
[۱۷] Path
[۱۸] Circuit
[۱۹] Connected

k–همبند گوییم اگر $K(G) \geq k$. همچنین اگر G یک گراف بی طوقه و فاقد رأس تنها و حداقل سه رأس داشته باشد، آن‌گاه G ۲–همبند است اگر و تنها اگر برای هر دو یال متمایز G دوری از G شامل این دو یال وجود داشته باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱ زیر گراف بی دور H از گراف G را که در آن $V(G) = V(H)$، درخت فراگیر[۲۰] G گوییم.

تعریف ۱۷.۱.۱ یال e از گراف G رامنقبض شده گوییم اگر آن یال حذف شده و دو سر آن روی هم قرار گیرند. گراف بدست آمده از انقباض[۲۱] یال e را با $G.e$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۸.۱.۱ k-رنگ آمیزی گراف G یعنی نشاندار کردن رأس‌ها بوسیله نگاشت $f : V(s) \to s$ که در آن $|s| = k$ علامت رنگ‌هاست .

رأس‌های رنگ شده با یک کلاس خاص را کلاس رنگی[۲۲] گوییم.

اگر رأس‌های مجاور یک گراف رنگ‌های متفاوت داشته باشند، این رنگ آمیزی را یک k–رنگ آمیزی سره[۲۳] گوییم.

یک گراف را k–رنگ شدنی گوییم اگر G یک k–رنگ آمیزی سره داشته باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱ کوچکترین مقدار k را که به ازای آن گراف G، k–رنگ شدنی باشد را عدد رنگی[۲۴] گراف G گوییم و آن را با $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم.

تبصره ۲۰.۱.۱ در رنگ آمیزی سره هر کلاس رنگی یک مجموعه مستقل در گراف G است. پس G، k-رنگ شدنی است اگر و تنها اگر $V(G)$ به صورت k مجموعه مستقل باشد.

مثال ۲۱.۱.۱ G دو بخشی است اگر و تنها اگر $\chi(G) = ۲$.

[۲۰] Spaning tree
[۲۱] Contraction
[۲۲] Chromatic class
[۲۳] Proper colouring
[۲۴] Choromatic number

۲.۱ متروید

تعریف ۱.۲.۱ یک متروید[۲۵] مثل M زوج مرتب $M = (E,\mathcal{I})$ است که در آن E یک مجموعه متناهی و $\mathcal{I}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های E است که در سه شرط زیر صدق می‌کند:

$I1$) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

$I2$) اگر $I \in \mathcal{I}$ و $I' \subseteq I$، آن‌گاه $I' \in \mathcal{I}$.

$I3$) اگر $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ و $|I_2| > |I_1|$، آن‌گاه عضوی مانند $e \in I_2 - I_1$ وجود دارد به‌طوری که $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

اگر $M = (E,\mathcal{I})$ یک متروید باشد، آن‌گاه M را مترویدی روی مجموعهٔ E و E را مجموعهٔ زمینه[۲۶] متروید M گوییم.

هر عضو گردایه $\mathcal{I}$ را یک مجموعه مستقل[۲۷] متروید M می‌نامیم.

زیر مجموعه‌هایی از E که در $\mathcal{I}$ نیستند را مجموعه‌های وابسته[۲۸] گوییم.

گزاره ۲.۲.۱ فرض کنیم E مجموعه‌ای از بردارها باشد و $\mathcal{I}$ گردایه تمام زیر مجموعه‌های مستقل خطی E باشد. در این‌صورت $(E,\mathcal{I})$ یک متروید است. متروید حاصل را یک متروید برداری[۲۹] گوییم.

برهان : مرجع [۷] بخش ۱.۱ ♦

گزاره ۳.۲.۱ فرض کنیم G یک گراف و $E = E(G)$ باشد. مجموعه $\mathcal{I}$ شامل مجموعه‌ای از یال‌های G است که زیر گراف های تولید شده توسط این مجموعه‌ها بی دور باشند، در این صورت $M = (E,\mathcal{I})$ یک متروید روی E است و این متروید را با $M(G)$ نشان می‌دهیم.

برهان : مرجع [۷] بخش ۱.۱ ♦

[۲۵] Matroid
[۲۶] Ground set
[۲۷] Independent set
[۲۸] Dependent set
[۲۹] Vector matroid

تعریف ۴.۲.۱ هر زیر مجموعه وابسته متروید M را یک دور[۳۰] گوییم و مجموعه تمامی دورهای متروید M را با $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ یا با $\mathcal{C}$ نشان می‌دهیم.

یک دور M را که شامل n عضو باشد، یک n—دور[۳۱] می‌نامیم.

بنابراین با معلوم بودن عناصر$\mathcal{C}(\mathrm{M})$ می‌توان اعضای $\mathcal{I}(\mathrm{M})$ را مشخص کرد چون عناصر دقیقاً آن زیر مجموعه‌هایی از E است که شامل هیچ عضوی از $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ نیستند.

قضیه ۵.۲.۱ گردایه دورهای یک متروید دارای خواص زیر است:

$C1$) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

$C2$) اگر $C_1 \in \mathcal{C}$ ، $C_2 \in \mathcal{C}$ و $C_1 \subseteq C_2$، آن‌گاه $C_1 = C_2$.

$C3$) اگر C_1 و C_2 دو عضو متمایز $\mathcal{C}$ باشند و $e \in C_1 \cap C_2$، آن‌گاه عضوی مثل C_3 از $\mathcal{C}$ وجود دارد به‌طوری که $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

برهان : مرجع [۷] بخش ۱.۱ ♦

قضیه ۶.۲.۱ فرض کنیم E یک مجموعه و $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های E باشد که در سه خاصیت $C1$ و $C2$ و $C3$ صدق می‌کند. همچنین فرض کنیم $\mathcal{I}$ گردایه تمامی زیر مجموعه‌های E باشد که شامل هیچ عضو $\mathcal{C}$ نیستند، آن‌گاه$(\mathrm{E},\mathcal{I})$ یک متروید روی E است که $\mathcal{C}$ گردایه دورهای آن می‌باشد.

برهان : مرجع [۷] بخش ۱.۱ ♦

نتیجه ۷.۲.۱ فرض کنیم G گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های مجموعه زمینه $E(M)$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{C}$ گردایه دورهای یک متروید روی E است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}$ در سه خاصیت $C1$ و $C2$ و $C3$ صدق کند.

برهان : مرجع [۷] بخش ۱.۱ ♦

---

[۳۰] Circuit

[۳۱] n-circuit

گزاره ۸.۲.۱ فرض کنیم E مجموعه یال‌های گراف G و C گردایه تمام دورهای G باشد آن‌گاه C گردایه دورهای یک ماترویید روی مجموعه E است. این ماترویید را ماترویید دوری [۳۲] گراف G گوییم و آن را با $M(G)$ نمایش می‌دهیم.

برهان : مرجع [۷] بخش ۱.۱ ♦

تعریف ۹.۲.۱ دو ماترویید M_1 و M_2 را یکریخت گوییم و می‌نویسیم $M_1 \cong M_2$، اگر تناظر یک به یک $\psi(X) : E(M_1) \to E(M_2)$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $X \in E(M_1)$، $\psi(X)$ یک مجموعه مستقل در M_2 است اگر و تنها اگر X یک مجموعه مستقل در M_1 باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱ ماترویید M را گرافیکی [۳۳] گوییم هر گاه گرافی وجود داشته باشد که ماترویید دوری این گراف یکریخت با M باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱ هر عضو e از ماترویید M را یک طوقه گوییم اگر $\{e\}$ یک دور M باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱ اگر f و g دو عضو ماترویید M باشند به‌طوری که $\{f, g\}$ یک دور باشد، آن‌گاه f و g را موازی گوییم. منظور از یک کلاس موازی از M، زیر مجموعه ماکسیمال X از E است که هر دو عضو متمایز آن موازی‌اند و هیچ عضو آن طوقه نیست.

یک کلاس موازی را بدیهی [۳۴] گوییم اگر شامل تنها یک عضو باشد.

تعریف ۱۳.۲.۱ فرض کنیم $M = (E, \mathcal{I})$ یک ماترویید بدون طوقه بوده و هر کلاس موازی آن بدیهی باشد. در این‌صورت M را یک ماترویید ساده [۳۵] گوییم.

حال اگر تمامی طوقه‌های ماترویید M و از هر کلاس موازی همهٔ عضوها را به‌جز یکی حذف کنیم، ماترویید حاصل را ماترویید ساده‌ی وابسته به M می‌نامیم و آن را با $\tilde{M}$ نمایش می‌دهیم.

---

[۳۲] Cycle matroid

[۳۳] Graphic

[۳۴] Trivial

[۳۵] Simple matroid

تعریف ۱۴.۲.۱ هر مجموعه مستقل ماکسیمال ماترویید M را یک پایه‌ی[۳۶] M گوییم و مجموعه تمامی پایه‌های M را با $\mathcal{B}(M)$ نشان می دهیم.

لم ۱۵.۲.۱ فرض کنیم B_1 و B_2 دو پایه از ماترویید M باشند؛ آن‌گاه $|B_2| = |B_1|$.

برهان : مرجع [۷] بخش ۲.۱ ♦

قضیه ۱۶.۲.۱ فرض کنیم E مجموعه متناهی وناتهی و $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های E باشد آن‌گاه $\mathcal{B}$ گردایه پایه‌های یک ماترویید روی E است اگر و تنهااگر در شرایط زیر صدق کند:

$B1$) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

$B2$) اگر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ و $x \in B_1 - B_2$، آن‌گاه عضوی مانند $y \in B_2 - B_1$ وجود دارد به‌طوری که $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

برهان : مرجع [۷] بخش ۲.۱ ♦

تعریف ۱۷.۲.۱ فرض کنید B پایه‌ای از ماترویید M باشد. آن‌گاه برای هر $e \in E - B$، $B \cup e$ شامل دوری یکتاست. این دور را با $C(e, B)$ نمایش می‌دهیم. بعلاوه $e \in C(e, B)$.

$C(e, B)$ را دور اصلی[۳۷] وابسته به پایه M گوییم.

مثال ۱۸.۲.۱ فرض کنیم E یک مجموعهٔ n عضوی و $\mathcal{B}$ گردایه تمام زیر مجموعه‌های m عضوی E باشد که در آن $0 \leq m \leq n$.آن گاه $\mathcal{B}$ گردایه پایه‌های یک ماترویید روی E است. این ماترویید را با $U_{m,n}$ نمایش داده آن را ماترویید یکنواخت[۳۸] می‌نامیم و داریم:

$$\mathcal{I}(U_{m,n}) = \{X \subseteq E; |X| \leq m\}$$

$$C(U_{m,n}) = \begin{cases} \emptyset & m = n \\ \{C \subseteq E; |C| = m + 1\} & m < n \end{cases}$$

---

[۳۶] Base

[۳۷] Fundamental circuit

[۳۸] Uniform matroid

مثال ۱۹.۲.۱ مترویید $U_{0,n}$، هر مجموعه تک عضوی از مجموعه زمینه یک طوقه است چون تک عضوی‌ها دوراند. در ضمن $\emptyset$ به‌عنوان تنها مجموعه مستقل برای این مترویید است.

در مترویید $U_{n,n}$ هر زیر مجموعه از مجموعه زمینه $E(M)$ یک مجموعهٔ مستقل است. لازم به ذکر است این مترویید هیچ مجموعه وابسته ندارد.

گزاره ۲۰.۲.۱ فرض کنیم M یک مترویید گرافیک باشد. آن‌گاه $M \cong M(G)$ که در آن G یک گراف همبند می‌باشد. یعنی گراف همبندی مثل G وجود دارد که مترویید دوری تولید شده توسط G یکریخت با M باشد.

برهان : مرجع [۷] بخش ۱.۲ ♦

تعریف ۲۱.۲.۱ فرض کنیم $M = (E,\mathcal{I})$ یک مترویید و $X \subseteq E$ باشد، فرض کنید:

$$\mathcal{I}\,|X \;=\{\; I \subseteq X \mid I \in \mathcal{I}\}$$

می توان دید که $(X,\mathcal{I}|X)$ یک مترویید است. این مترویید را تحدید[۳۹] M به X یا حذف $E-X$ از M گوییم و با نماد $M|X$ یا $M\backslash E-X$ نمایش می‌دهیم.

گردایه دورهای این مترویید به‌صورت زیر است:

$$C(M|X) = \{C \in \mathcal{C}\;;\; C \in X\}$$

تعریف ۲۲.۲.۱ فرض کنید M=(E,$\mathcal{I}$) یک مترویید و $X \subseteq E$ باشد، تابع رتبه مترویید M را به‌صورت:

$$r(X) = max\{\;|Y|\;;\; Y \subseteq X,\; Y \in \mathcal{I}\}$$

تعریف می‌کنیم.

Restriction[۳۹]

لم ۲۳.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه متناهی و ناتهی باشد. تابع $r : 2^E \to N \cup \{0\}$ تابع رتبه یک ماترویید روی E است اگر وتنها اگر r در شرایط زیر صدق کند:

$R1$) اگر $X \subseteq E$، آن‌گاه $0 \leq r(X) \leq |X|$.

$R2$) اگر $X \subseteq Y \subseteq E$، آن‌گاه $r(X) \leq r(Y)$.

$R3$) اگر $X, Y \subseteq E$، آن‌گاه $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

برهان : مرجع [۷] بخش ۱.۳ ♦

تعریف ۲۴.۲.۱ فرض کنیم M یک ماترویید روی مجموعه زمینه $E(M)$ باتابع رتبه r باشد. تابع $cl : 2^E \to 2^E$ را برای هر $X \subseteq E$ با ضابطه‌ی

$$cl(X) = \{x \in E \; ; \; r(X \cup x) = r(X)\}$$

تعریف می‌کنیم. این تابع را عملگر بستار[۴۰] M گوییم.

لم ۲۵.۲.۱ عملگر بستار ماترویید M روی E دارای خواص زیر است:

۱) اگر $X \subseteq E$، آن‌گاه $X \subseteq cl(X)$.

۲) اگر $X \subseteq Y \subseteq E$، آن‌گاه $cl(X) \subseteq cl(Y)$.

۳) اگر $X \subseteq E$، آن‌گاه $cl(cl(X)) = cl(X)$.

۴) اگر $X \subseteq E$ و $x \in E$ و $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$، آن‌گاه $x \in cl(X \cup y)$.

برهان : مرجع [۷] بخش ۱.۴ ♦

نتیجه ۲۶.۲.۱ فرض کنیم E یک مجموعه باشد، $cl : 2^E \to 2^E$ عملگر بستار یک ماترویید روی E است اگر و تنهااگر در شرایط لم قبل صدق کند.

برهان : مرجع [۷] بخش ۱.۴

[۴۰] Closur operatore