equation.۴.۵.۵۸وجود جواب‌های ایستای۵۸۷۷.۴

دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی
گرایش آنالیز عددی

شبکه‌های انتقالی پایای معادله شرودینگر غیرخطی

استاد راهنما:

دکتر سید محمد حسینی

دانشجو:

سمیرا عمار

مهرماه ۱۳۹۱

تقدیم به

عزیزترینم

مادر مهربانم

و

همه ی آنان که آفتاب مهرشان در آستانه ی قلبم هم چنان پابرجاست

و هرگز غروب نخواهد کرد

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس بی‌کران سزآوار آفریننده‌ی هستی است که ذره‌ای از نور دانش بی‌پایانش را به‌ما بخشید تا از تاریکی رهایی یابیم.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر سید محمد حسینی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه تحقق نمی‌یافت.

همچنین لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر علی توکلی که زحمت داوری این پایان‌نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر کنم. از سرکار خانم دکتر پنجه‌علی بیک نیز به خاطر تقبل زحمت داوری این پایان‌نامه سپاس گزارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادر و خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.
هم‌چنین از همه‌ی دوستان خوبم و هم‌کلاسی‌های عزیزم، کمال تشکر را دارم.

سمیرا عمار
مهرماه ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان‌نامه وجود جواب‌های ایستا و متحرک با ساختار تک‌قله‌ای موضعی‌بودن در کلی‌ترین شکل ممکن برای معادله گسسته شرودینگر بررسی می‌شود. با اعمال بعضی محدودیت‌ها بر روی تابع غیرخطی موجود در معادله گسسته نشان داده می‌شود که معادله گسسته دوگامی قابل تبدیل به یک معادله گسسته تک‌گامی می‌باشد. همچنین کاهش به یک معادله تفاضلی تک‌گامی شرط کافی برای وجود جواب‌های ایستای تک‌قله‌ای را مشخص می‌کند. اعمال یک شرط اضافی بر روی تابع غیرخطی معادله گسسته، وجود جواب‌های تحلیلی یک معادله انتگرال‌پذیر درجه سه را تضمین می‌کند. همچنین این شرط، یک شرط لازم برای وجود جواب‌های متحرک تک‌قله‌ای را فراهم می‌سازد. این شروط خود مشخص کننده یک خانواده چهار پارامتری از جواب‌های متحرک تک‌قله‌ای برای معادله گسسته شرودینگر می‌باشد که حالت کلی‌تری از معادله ابلوویتز-لدیک می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: *جواب ایستا، جواب متحرک، معادله گسسته شرودینگر غیرخطی، شبکه.*

پیش‌گفتار

تحقیقات در زمینه جواب‌های موضعی ایستا و متحرک معادله گسسته شرودینگر غیرخطی

$$i\dot{u}_n + \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + f(u_{n-1}, u_n, u_{n+1}) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

چندی است که ذهن محققان و پژوهشگران را به خود جلب کرده است. در معادله گسسته شرودینگر غیرخطی، f یک تابع غیرخطی می‌باشد که در محیط‌های فیزیکی مختلف قابل تعیین می‌باشد. در تحقیقات قبلی این تابع غیرخطی f به صورت بسیار خاص در نظر گرفته شده است که محققان با توجه به فرم بسیار ساده تابع f در نظر گرفته شده، به وجود جواب‌های موضعی ایستا و متحرک معادله (1) پرداخته‌اند.

به عنوان مثال ابلوویتز و موسلیمونی [1] با در نظر گرفتن حالتی خاص از f و با استفاده از تقریب‌های عددی و همچنین با استفاده از یک روش مجانبی توسعه داده شده از یک جواب ایستا برای سرعت $c = 0$ یک جواب متحرک با سرعت $c \neq 0$ استخراج کردند.

برگر و همکارانش [2] با مطالعه کارهای پیشین به یک شرط لازم برای وجود جواب‌های متحرک معادله گسسته شرودینگر غیرخطی برای حالت انتگرال‌پذیر ابلوویتز-لدیک [3] به دست آوردند که نتایج آنها کاربردی مستقیم در تعداد دیگری از حالت‌های تابع f مانند مدل سالرنو [4] دارند.

پلینووسکی و روتوس [5] فرم نرمالی برای انشعاب [6] جواب‌های متحرک برای حالت خاصی از پارامترهای $\omega = \frac{(\pi - 2)}{h^2}$ و $c = \frac{1}{h}$ به دست آوردند که پارامترهای یاد شده به ترتیب سرعت زاویه‌ای و سرعت جواب می‌باشند که در فرمول زیر بیان شده‌اند

$$u_n(t) = \phi(hn - ct)e^{i\omega t}, \qquad \phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}.$$

فرم نرمال به دست آمده توسط آنها به وسیله یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه سه که وابسته به

[1] Ablowitz and Mosslimani
[2] Berger et al
[3] Ablowitz-Ladik(AL)
[4] Salerno
[5] Pelinovsky and Rothos
[6] Bifurcation

معادله پیوسته شرودینگر غیرخطی مرتبه مشتقی سوم [۱] می‌باشد، بیان می‌شود.
اخیرا ملوین [۲] و گروه تحقیقاتی‌اش وجود و پایداری و دینامیک جواب‌های متحرک معادله گسسته شرودینگر غیرخطی با قسمت غیرخطی قابل اشباع [۳] بررسی کرده‌اند.
قابل ذکر می‌باشد که قسمت غیرخطی قابل اشباع در فرمول کلی (۱) صدق نمی‌کنند، اما فرآیند و تکنیک‌های مورد استفاده را می‌توان به صورت کلی (۱) نیز بسط داد.
در این پایان‌نامه به مرور و بررسی نتایج و حدس‌های پیرامون کارهای قبلی پرداخته شده و شرط لازم برای وجود جواب‌های متحرک و شرط کافی برای وجود جواب‌های ایستا و همچنین خصوصیت‌های این جواب‌ها برای حالت کلی معرفی شده در (۱) مورد بحث و بررسی قرار داده خواهد شد.
این پایان‌نامه در چهار فصل ارائه خواهد شد. در فصل اول به معرفی معادلات اویلر-لاگرانژ [۴] نشأت گرفته از یک مسأله حساب تغییرات پرداخته خواهد شد و معادلات پیوسته و گسسته شرودینگر غیرخطی را به صورت معادلات اویلر-لاگرانژ از یک مسأله حساب تغییرات خاص بیان خواهیم کرد و در انتهای این فصل با معرفی ساختار همیلتونی یک معادله دیفرانسیل به بررسی معادلات پیوسته و گسسته شرودینگر غیرخطی از دیدگاه همیلتونی خواهیم پرداخت.
در فصل دوم با بیان و اثبات قضیه نوتر [۵] مقادیر پایا را برای معادله پیوسته شرودینگر غیرخطی به دست آورده و در انتها به پایداری و ناپایداری این معادله خواهیم پرداخت.
در فصل سوم با معرفی حالت‌های خاصی از معادله کلی (۱) به پایداری و ناپایداری جواب‌های آنها پرداخته خواهد شد.
در فصل چهارم که به آخرین نتایج و دستاوردهای علمی در این زمینه پرداخته می‌شود، به وجود جواب‌های ایستا و متحرک معادله گسسته شرودینگر غیرخطی با فرم کلی (۱) پرداخته خواهد شد.
در این فصل f را به صورت کلی‌ترین شکل ممکن که یک تابع غیرتحلیلی با ده پارامتر آزاد می‌باشد در نظر خواهیم گرفت و با القاء شرایط مختلف بر روی این ده پارامتر آزاد به شرط کافی برای وجود جواب‌های ایستا دست خواهیم یافت. این کار را با تبدیل یک معادله تفاضلی دوگامی [۶] به یک معادله تفاضلی تک‌گامی انجام خواهیم داد.
نتایج به دست آمده را برای معادله انتگرالپذیر ابلوویتز-لدیک، مورد بررسی قرار خواهیم داد. در انتها به وجود جواب‌های متحرک برای حالت خاصی از ω, c نیز خواهیم پرداخت که معادل با یک

[۱] Third-order derivative NLS equation
[۲] Melvin
[۳] Saturable
[۴] Euler-lagerange equations
[۵] Noether theorem
[۶] Second-order difference equation

شرط دیگر بر روی پارامترهای آزاد f خواهد بود.

تکنیک‌های به کار رفته در این پایان‌نامه می‌تواند پایه و اساسی برای معادلات گسسته دیگر باشد از جمله معادلات گسسته kdv [۱] و یا معادله گسسته SG [۲] به کار برد.

[۱] Kortewaeg-de vrics

[۲] Sine-Gordon

فهرست مطالب

فصل ۱
اصول تغییرات

مطالب این فصل در چهار بخش ارائه خواهد شد. در بخش اول به معرفی حساب تغییرات می‌پردازیم. در بخش دوم اکسترمال را معرفی می‌کنیم و در بخش سوم معادله اویلر-لاگرانژ را معرفی کرده و دو مثال برای آن ارائه می‌شود و در بخش آخر به معرفی معادلات همیلتونی و مثال‌هایی پیرامون آن خواهیم پرداخت. تعاریف و قضایای این فصل برگرفته از [۳] می‌باشد.

۱.۱ حساب تغییرات

حساب تغییرات به‌وسیله ریاضیدان سوئیسی، جان برنولی[۱] (۱۷۴۸-۱۶۶۷) پیشنهاد شده است. در ابتدا چند تعریف را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. اگر A و B فضاهای خطی روی میدان F باشند، یک تابع T از A به‌توی B را تبدیل خطی یا عملگر خطی گویند، اگر برای هر $x, y \in A$ و هر اسکالر $\alpha \in F$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y).$$

تعریف ۲.۱.۱. عملگر خطی که برد آن $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد را تابعک خطی نامند.

حساب تغییرات شاخه‌ای از ریاضیات است که به یافتن اکسترمم تابعک‌ها می‌پردازد.
در ادامه مثالی از یک تابعک در فضای اقلیدسی که طول یک منحنی می‌باشد، ارائه می‌نماییم.

[۱] Jan Bernoli

مثال ۳.۱.۱. فرض کنید که $\gamma = \{(t,x) : x(t) = x, t_۰ \leq t \leq t_۱\}$ یک منحنی باشد. بنابراین تابعک Φ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_۰}^{t_۱} \sqrt{۱ + \dot{x}^۲}\, dt,$$

که Φ طول منحنی γ را نمایش می‌دهد.

با در نظر گرفتن γ به عنوان منحنی، تقریب منحنی یعنی γ' به صورت

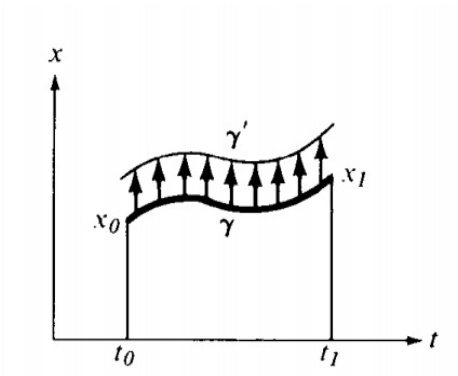
$$\gamma' = \{(t,x) : x = x(t) + h(t)\},$$

می‌باشد و یا به‌طور خلاصه $\gamma' = \gamma + h$.

بنابراین اگر $\Phi(\gamma)$ نشانگر تابعکی روی منحنی γ باشد، نمو Φ را به صورت

$$\nabla\Phi(\gamma) = \Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma),$$

نشان می‌دهیم. این مطلب در شکل زیر نمایان شده است .



در ادامه، تعریف مشتق‌پذیر بودن تابعک $\Phi(\gamma)$ را بیان می‌کنیم.

تعریف ۴.۱.۱. تابعک $\Phi(\gamma)$ مشتق‌پذیر نامیده می‌شود اگر

$$\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F + R,$$

که F به طور خطی وابسته به h می‌باشد، یعنی برای هر γ ثابت، $F(h_۱ + h_۲) = F(h_۱) + F(h_۲)$ و $F(ch) = cF(h)$ و $R(h,\gamma) = O(h^۲)$، به این مفهوم که برای هر $|h| < \varepsilon$ و $|\frac{dh}{dt}| < \varepsilon$، داشته باشیم $|R| < C\varepsilon^۲$. قسمت خطی نمو، $F(h)$، مشتق تابعک $\Phi(\gamma)$ نامیده می‌شود.

اکنون به بیان یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۵.۱.۱. فرض کنیم $\gamma = \{(t,x) : x = x(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$ یک منحنی در فضای (t,x)، $\dot{x}$ معرف $\dfrac{dx}{dt}$ و $L = L(a,b,c)$ تابع مشتق‌پذیری با سه متغیر باشد. تابعک $\Phi(\gamma)$ به صورت

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t)dt,$$

تعریف می‌شود و با در نظر گرفتن $L = \sqrt{1 + b^2}$ طول γ به دست آورده می‌شود.

قضیه ۶.۱.۱. *تابعک*

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)dt,$$

مشتق‌پذیر می‌باشد و مشتق آن به صورت

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} (\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})hdt + (\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}h)\Big|_{t_0}^{t_1}. \qquad (1.1)$$

برهان. با استفاده از تعریف مشتق‌پذیر بودن یک تابعک، به اثبات قضیه خواهیم پرداخت.

$$\begin{aligned}\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} (L(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t) - L(x, \dot{x}, t))dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\frac{\partial L}{\partial x}h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h})dt + O(h^2) = F(h) + R,\end{aligned}$$

که

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} (\frac{\partial L}{\partial x}h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h})dt, \qquad R = O(h^2).$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h}dt = -\int_{t_0}^{t_1} h\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})dt + (h\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})\Big|_{t_0}^{t_1}.$$

□

۲.۱ اکسترمال

این بخش را با تعریف اکسترمال یک تابعک شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. یک اکسترمال از یک تابعک مشتق‌پذیر $\Phi(\gamma)$ یک منحنی می‌باشد که برای هر h . $F(h) = 0$

در ادامه قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که چه شرطی باید روی تابعک اعمال شود تا دارای اکسترمال باشد.

قضیه ۲.۲.۱. *منحنی $\gamma : x = x(t)$ یک اکسترمال از تابعک $\Phi(\gamma) = \int L(x, \dot{x}, t)dt$ روی فضای منحنی‌هایی که از نقاط $x(t_0) = x_0$ و $x(t_1) = x_1$ می‌گذرد، می‌باشد اگر و تنها اگر در طول منحنی $x(t)$،*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

برای اثبات قضیه ۲.۲.۱ ابتدا لم زیر را بیان کرده و سپس با استفاده از آن قضیه را اثبات می‌کنیم.

لم ۳.۲.۱. *فرض شود تابع پیوسته $f(t)$، $t_0 \leq t \leq t_1$ در*

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0, \tag{۲.۱}$$

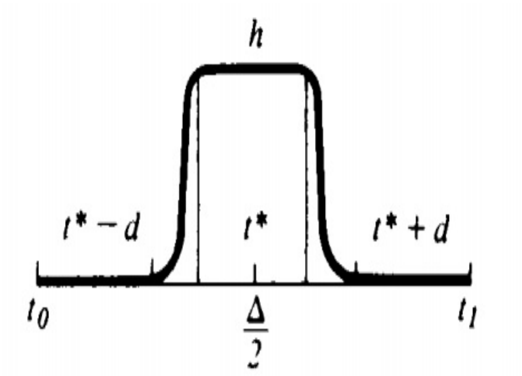
صدق کند که $h(t)$ تابع پیوسته دلخواهی با شرط $h(t_0) = h(t_1) = 0$ می‌باشد، آن‌گاه $f(t) = 0$.

به‌وسیله برهان خلف به اثبات لم می‌پردازیم.

برهان. فرض کنید $f(t^*) > 0$ برای تعدادی از t^* که $t_0 < t^* < t_1$ می‌باشد. چون f تابعی پیوسته بوده لذا در نقطه t^* از همسایگی $\Delta = \{t : t_0 < t^* - d < t < t^* + d < t_1\}$، $f(t) > c$ می‌باشد. فرض کنید $h(t)$ به گونه‌ای باشد که خارج از Δ، $h(t) = 0$ و در Δ، $h(t) > 0$ و در

$\frac{\Delta}{۲}$ ، $h(t) = ۱$. که در آن $t^* - \frac{d}{۲} < t < t^* + \frac{d}{۲}$: $\frac{\Delta}{۲}$. به‌وضوح دیده می‌شود که

$$\int_{t_\circ}^{t_۱} f(t)h(t)dt > dc > \circ.$$



که این با فرض (۲.۱) در تناقض است. بنابراین برای t^* ، $t_\circ < t^* < t_۱$ ، $f(t^*) > \circ$. □

برهان. اکنون به قضیه ۲.۲.۱ برمی‌گردیم، با توجه به رابطه (۱.۱) داریم:

$$F(h) = -\int_{t_\circ}^{t_۱} (\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x})hdt + (\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})h\Big|_{t_\circ}^{t_۱},$$

بنابر لم ۳.۲.۱ $h(t_\circ) = h(t_۱) = \circ$. بنابراین،

$$\int_{t_\circ}^{t_۱} f(t)h(t)dt = \circ,$$

که در آن $f(t) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x}$. با توجه به لم ۳.۲.۱ $f(t) \equiv \circ$.

برعکس اگر $f(t) \equiv \circ$ باشد، به وضوح دیده می‌شود که $F(h) \equiv \circ$. □

۳.۱ معادله اویلر- لاگرانژ

تعریف ۱.۳.۱. معادله

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} = \circ,$$

معادله اویلر- لاگرانژ برای تابعک

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_\circ}^{t_\backslash} L(x, \dot{x}, t)dt,$$

نامیده می‌شود.

با بیان دو مثال این بخش را به پایان خواهیم برد.

مثال ۲.۳.۱. معادله پیوسته شرودینگر غیرخطی [1] در فضای یک‌بعدی به صورت

$$iu_t = -u_{xx} - |u|^{2\sigma}u, \qquad \sigma \in \mathbb{N}, \qquad i = \sqrt{-1}, \tag{۳.۱}$$

می‌باشد.
با در نظر گرفتن تابعک

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Ldxdt,$$

که در آن

$$L = \frac{i}{2}(u^*u_t - uu_t^*) - |u_x|^2 + \frac{1}{\sigma+1}|u|^{2\sigma+2},$$

معادله لاگرانژین می‌باشد. برای به دست آوردن اکسترمال از معادله اویلر-لاگرانژ داریم

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial L}{\partial u_x}) - \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial u_t}) = (iu_t + u_{xx} + |u|^{2\sigma}u)^* = 0,$$

که همان معادله پیوسته شرودینگر غیرخطی می‌باشد. معادله اویلر-لاگرانژ برای u^* نیز نتیجه مشابه را می‌دهد.

[1] Nonlinear Schrödinger Equation (NLS)

مثال ۱.۳.۳. معادله گسسته شرودینگر غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$i\dot{u}_n + \varepsilon(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \beta|u_n|^2 u_n = 0, \quad \beta \in \mathbb{N},$$

که معادله لاگرانژین آن به صورت زیر می‌باشد

$$L = \frac{i}{2}(u_n^* \dot{u}_n - u_n \dot{u}_n^*) - \varepsilon(u_n^* u_{n+1} - 2|u_n|^2 + u_n u_{n+1}^*) - \frac{\beta}{2}|u_n|^4.$$

برای به دست آوردن اکسترمال از معادله اویلر-لاگرانژ داریم:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_n}) - \frac{\partial L}{\partial u_n} = (i\dot{u}_n + \varepsilon(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \beta|u_n|^2 u_n)^* = 0.$$

معادله اویلر-لاگرانژ برای u_n^* نیز نتیجه مشابه را می‌دهد.

حالت کلی‌تر معادله اویلر-لاگرانژ

برای توابع چند متغیره و در بعدهای بالاتر معادله اویلر-لاگرانژ به صورت زیر خلاصه می‌شود. فرض کنیم

$$I(f_1, \dots, f_m) = \int_\Omega L(x_1, \dots, x_n, f_1, \dots, f_m, f_{1,1}, \dots, f_{1,n}, \dots, f_{m,1}, \dots, f_{m,n}) dX,$$

یک تابعک در فضای $\mathbb{R}^n$ بر اساس توابع $f_1, \dots, f_m$ و مشتقات جزئی آن‌ها

$$f_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

باشد که در آن Ω ناحیه‌ای همبند در فضای $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. در این حالت معادلات اویلر-لاگرانژ به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\frac{\partial L}{\partial f_1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial f_{1,i}} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_m} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial f_{m,i}} = 0.$$

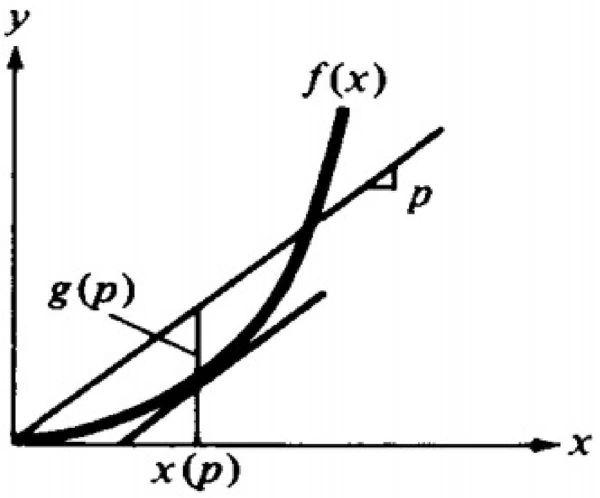
۴.۱ معادلات همیلتونی

تعاریف و قضایای این بخش برگرفته از [۳] و [۱۸] می‌باشند.
بنا به اهمیت تبدیل لژاندر [۱] در معادلات همیلتونی [۲] ، در ابتدا این تعریف را بیان کرده و در ادامه با ارایه یک مثال از تبدیل لژاندر این قسمت را به پایان می‌رسانیم.

۱.۴.۱ تبدیل لژاندر

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید $y = f(x)$ تابعی محدب باشد یعنی برای هر x، $f''(x) > 0$. تبدیل لژاندر تابع f، تابعی جدید مانند g بر حسب متغیر جدید p است. فرض کنید نمودار f در صفحه x و y به صورت شکل زیر باشد و عدد p یک داده شده باشد، همچنین خط راست $y = px$ را در نظر بگیرید.

[۱] Legendre transformation
[۲] Hamiltonian equations



نقطه $x = x(p)$ را نقطه‌ای روی منحنی که در دورترین فاصله قائم نسبت به خط $y = px$ باشد را در نظر بگیرید. برای هر p، تابع $F(p, x) = px - f(x)$ یک ماکسیمم نسبت به x در نقطه $x(p)$ دارد. حال تابع $g(p)$ به صورت $g(p) = F(p, x(p))$ تعریف می‌شود.
نقطه $x(p)$ مختصات اکسترمال $\frac{\partial f}{\partial x} = ۰$ یعنی $f'(x) = p$ می‌باشد، به علت محدب بودن f، نقطه $x(p)$ منحصر به فرد می‌باشد.

مثال ۲.۴.۱. فرض کنید $f(x) = x^۲$ بنابراین $F(p) = px - x^۲$ که

$$x(p) = \frac{p}{۲}, \qquad g(p) = \frac{p^۲}{۴}.$$

مثال ۳.۴.۱. فرض کنید $f(x) = \frac{mx^۲}{۲}$ بنابراین $g(p) = \frac{p^۲}{۲m}$.

مثال ۴.۴.۱. فرض کنید $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ بنابراین $g(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$ که در آن

$$\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} = ۱, \qquad \alpha > ۱, \beta > ۱.$$