دانشگاه تربیت معلم
دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان‌نامه دکتری
ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

بررسی چند نامساوی روی فضاهای هیلبرت مدول

تدوین:

مریم خسروی

استاد راهنما:

دکتر حکیمه ماهیار

استاد مشاور:

دکتر محمد صال مصلحیان

آذر ۱۳۸۸

چکیده

در این رساله ما به بررسی بعضی از نامساویهای کلاسیک که کاربردهای زیبایی در ریاضیات و سایر علوم دارند، می‌پردازیم. دو نامساوی اول که عبارتند از نامساوی مثلثی و نامساوی بسل قبلاً در فضاهای هیلبرت ثابت شده‌اند و ما به بیان آنها در فضاهای هیلبرت مدول که تعمیمی از فضاهای هیلبرت با ضرب داخلی C^*ـمقدار هستند، می‌پردازیم. در این نامساویها علاوه بر تعمیمهایی برای نرم مختلط مقدار، تعمیمهایی نیز برای «نرم» C^*ـمقدار بیان می‌کنیم.

به علاوه در فصل آخر به بحث درباره نامساوی ینسن برای عملگرها پرداخته و نتایج اخیر در این باره را مرور می‌کنیم و در نهایت به معرفی و اثبات تظریفی از نامساوی دیویس-چویی-ینسن برای C^*ـجبرها می‌پردازیم. از آنجا که فضای عملگرهای الحاق پذیر در یک هیلبرت مدول تشکیل یک C^*ـجبر می‌دهد، می‌توان این تظریف را برای عملگرهای الحاق پذیر هیلبرت مدولها و به ویژه برای عملگرهای روی فضای هیلبرت، بکار برد.

کلمات کلیدی: هیلبرت C^*ـمدول، ؟؟؟؟ ، محدب عملگری، نامساوی مثلثی، نامساوی بسل، نامساوی بمبیری، نامساوی بوآس-بلمن، نامساوی ینسن.

فهرستِ مطالب

پیشگفتار

نامساویها در بخشهای مختلفی از ریاضیات و سایر علوم دیده می‌شوند، ولی اولین مونوگراف در این زمینه در دهه ۳۰ به چاپ رسید. اولین کتاب که «نامساویها» نام داشت و توسط هاردی، لیتلوود و پولیا در انتشارات دانشگاه کمبریج به چاپ رسید، اولین گزارش از توسعه سریع این حوزه را ارائه می‌نمود. به مرور زمان، علاقه روز افزون به نامساویها موجب شد تا چندین کتاب در این زمینه منتشر شود.

هدف از این رساله ارائه چند نامساوی در فضاهای هیلبرت است که در کنار تعمیم آنها به فضاهای هیلبرت مدول به بیان کاربردهایی از آنها و نیز تحقیقات و نتایج اخیر درباره آنها می‌پردازیم. در این رساله ما به بررسی چند نامساوی که بیشترین استفاده در ریاضیات را دارند، می‌پردازیم. این نامساویها اغلب در آنالیز ظاهر می‌شوند. در اینجا ما به طور خلاصه به بیان نتایج اصلی این رساله می‌پردازیم. فصلهای ۴ـ ۲ را می‌توان به طور مستقل مطالعه نمود.

در فصل ۲، درباره نامساوی مثلثی بحث خواهیم کرد. در طول سالها، ریاضیدانان مختلفی به این نامساوی و شرایط تساوی در آن، توجه عمیقی داشته‌اند. به خصوص، تلاشهای زیادی در جهت یافتن صورتی از این نامساوی برای قدرمطلق در C^*ـ جبرها صورت گرفته است. بهترین پاسخ برای این سوال توسط تامسون داده شد که ثابت کرد:

به ازای هر $A, B \in \mathbb{M}_n$، ماتریسهای یکانی U و V وجود دارد که

$$|A+B| \leq U^*|A|U + V^*|B|V.$$

به علاوه دراگومیر توانست صورتی از عکس نامساوی مثلثی را در فضاهای هیلبرت ثابت کند. در

بخش ۴.۲، ما این نامساوی را برای هیلبرت مدولها تعمیم داده‌ایم. قضیه اصلی این بخش به صورت زیر است:

قضیه ۷.۴.۲: فرض کنید $e_1, \cdots, e_m$ خانواده‌ای از بردارها در هیلبرت مدول X باشد به طوری که $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \; (1 \leq i \neq j \leq m)$ و $|e_i| = 1 \; (1 \leq i \leq m)$. فرض کنید $r_k, \rho_k \in \mathbb{R} \; (1 \leq k \leq m)$ و بردارهای $x_1, \cdots, x_n \in \mathcal{X}$ در شرایط

$$0 \leq r_k^2 \|x_j\| \leq Re\langle r_k e_k, x_j \rangle \,, \qquad 0 \leq \rho_k^2 \|x_j\| \leq Im\langle \rho_k e_k, x_j \rangle \,,$$

صدق می‌کنند. در اینصورت

$$\left[\sum_{k=1}^{m} (r_k^2 + \rho_k^2) \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| \,,$$

و تساوی تنها و تنها وقتی اتفاق می‌افتد که

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \sum_{k=1}^{m} (r_k + i\rho_k) e_k \,.$$

در فصل ۳، نامساوی بسل و تعمیمهایی از آن مانند نامساوی بمبیری، نامساوی بوآس-بلمن، نامساوی میترینوویچ-پچاریک-فینک و تعمیمهایی از دراگومیر را بیان می‌کنیم. بکیک و گلجاش صورتی از نامساوی بسل را برای هیلبرت مدولها بدست آوردند و نتایج زیر توسط ما بدست آمده‌است:

قضیه ۶.۲.۳: فرض کنیم $x, y_1, \cdots, y_n \in \mathcal{X}$ و $a_1, \cdots, a_n \in \mathcal{A}$. در اینصورت

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\langle y_i, x \rangle|^2 \right)^2 \leq |x|^2 \left\| \sum_{i=1}^{n} |\langle y_i, x \rangle|^2 \right\| \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} \|\langle y_i, y_j \rangle\| \,.$$

قضیه ۱۰.۲.۳: اگر $x, y_1, \cdots, y_n$ اعضایی از یک هیلبرت $\mathcal{A}$-مدول $\mathcal{X}$ باشند و $a_1, \cdots, a_n$ اعضایی از $\mathcal{A}$ باشند، در اینصورت

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \langle y_i, x \rangle \right|^2 \leq |x|^2 \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|^2 \left[\max_{1 \leq i \leq n} \|y_i\|^2 + \left(\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \|\langle y_i, y_j \rangle\|^2 \right)^{1/2} \right] .$$

قضیه ۱۳.۲.۳: اگر $x, y_1, \cdots, y_n \in \mathcal{X}$ و $a_1, \cdots, a_n \in \mathcal{A}$ آنگاه

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \langle y_i, x \rangle \right|^2 \leq |x|^2 \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i^*|^2 \right\|^{1/2} \left[\max_{1 \leq i \leq n} \|y_i\|^2 \| \sum_{i=1}^{n} |a_i^*|^2 \|^{1/2} + B_n \right] ,$$

که در آن

$$B_n := \begin{cases} (n-1)\sqrt{n} \max\limits_{1\le i\le n} \|a_i\| \max\limits_{1\le i\neq j\le n} \|\langle y_i, y_j\rangle\|, \\ \sqrt{n-1}\left(\max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{1\le j\neq i\le n} \|\langle y_i, y_j\rangle\|^2\right)^{1/2} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \|a_i\|^2\right)^{1/2}. \end{cases}$$

در نهایت، فصل آخر درباره صورت عملگری نامساوی ینسن است. یک نتیجه قابل توجه، بنا به مقالات دیویس و چویی، بیان می‌کند که یک تابع f روی (a,b) محدب عملگری است اگر و فقط اگر برای هر نگاشت خطی مثبت Φ روی $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ و هر عملگر خودالحاق A که طیف آن در (a,b) است، داشته باشیم:

$$f(\Phi(A)) \le \Phi(f(A)).$$

هنسن و پدرسن نشان دادند که این شرایط معادل است با نامساوی ینسن ناجابجایی

$$f\Big(\sum_i Z_i^* A_i Z_i\Big) \le \sum_i Z_i^* f(A_i) Z_i, \qquad (*)$$

به ازای عناصر خودالحاق $\{A_i\}_{i=1}^m$ که طیف آنها در $[a,b]$ است و عناصر $\{Z_i\}_{i=1}^m$ که در شرط $\sum_{i=1}^m Z_i^* Z_i = I$ صدق می‌کنند. اگر $0 \in [a,b]$ و $f(0) \le 0$ و A یک عملگر خود الحاق با طیف در $[a,b]$ باشد، در این صورت $(*)$ به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$f(Z^* A Z) \le Z^* f(A) Z,$$

که در آن $Z^*Z \le 1$. در واقع، هنسن و پدرسن ابتدا این نامساوی را اثبات نمودند.

سوال دیگری که مطرح می‌شود آن است که اگر f تابع محدبی باشد که محدب عملگری نباشد، چه می‌توان گفت؟ کاربردی از نامساوی ینسن نشان می‌دهد که به ازای هر بردار h که $\|h\| = 1$ داریم

$$f(\langle h, Ah\rangle) \le \langle h, f(A)h\rangle.$$

برون و کساکی نشان دادند که در این حالت نامساوی هنسن و پدرسن در داخل تریس برقرار است و بورین ثابت کرد که که با افزودن چند شرط ساده این نامساوی برای مقادیر ویژه برقرار است.

حال فرض کنیم که در نامساوی دیویس-چویی-ینسن، نگاشت Φ به صورت جمع چند نگاشت اکیداً مثبت باشد. در این صورت تظریف زیر از این نامساوی برقرار است:

$$f(\Phi(A)) \leq \sum_{i=۱}^{n} \Phi_i(I)^{\frac{۱}{۲}} f\left(\Phi_i(I)^{-\frac{۱}{۲}} \Phi_i(A) \Phi_i(I)^{-\frac{۱}{۲}}\right) \Phi_i(I)^{\frac{۱}{۲}} \leq \Phi(f(A)).$$

ما این نامساوی را در بخش ۵.۴ ثابت کرده و کاربردهایی از آن را در فصلهای ۵.۴ و ۶.۴ ارائه می‌کنیم.

فصلِ ۱

مقدمات

در این فصل به بیان برخی مفاهیم مقدماتی که در فصلهای بعد کاربرد دارند، می‌پردازیم.

فرض ما بر این است که خواننده با مفاهیم جبرهای باناخ و فضاهای هیلبرت آشنایی دارد. بخش ۱.۱ به معرفی C^*-جبرها و بررسی خواص آنان می‌پردازد. در بخش ۲.۱، فضاهای هیلبرت مدول را معرفی کرده و در بخش ۳.۱ مطالبی را درباره مقادیر ویژه و ؟؟؟؟؟؟ آورده‌ایم و در بخش ۴.۱ به معرفی توابع محدب عملگری می‌پردازیم که موضوع بحث فصل ۴ است.

در این رساله همه جبرها و فضاها روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ در نظر گرفته می‌شوند.

۱-۱ C^*-جبرها

ابتدا به معرفی دسته مهمی از جبرهای باناخ می‌پردازیم. در این بخش ما به بیان قضایا و نتایج آشنایی درباره C^*-جبرها می‌پردازیم. این قضایا در کتاب [۵۶] و سایر کتابهای مقدماتی در زمینه C^*-جبرها آمده‌اند.

تعریف ۱.۱.۱. یک C^*-جبر عبارتست از یک جبر باناخ $\mathcal{A}$ و یک نگاشت برگشت مزدوج خطی که به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $a, b \in \mathcal{A}$، در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱) $(\lambda a+b)^*=\bar{\lambda}a^*+b^*$؛

(۲) $a^{**}=a$؛

(۳) $(ab)^*=b^*a^*$؛

و به علاوه $\|a^*a\|=\|a\|^۲$.

تعریف ۲.۱.۱. گوییم عضو a در یک C^*ـجبر

- نرمال است اگر $aa^*=a^*a$؛
- خودالحاق است اگر $a=a^*$؛
- تصویر است اگر $a=a^*=a^۲$؛
- یکانی است اگر $aa^*=a^*a=۱$.

مثالهای زیر نمونه‌هایی از C^*ـجبرها می‌باشد.

مثال ۳.۱.۱. فضای اعداد مختلط $\mathbb{C}$ با برگشت $\lambda\mapsto\bar{\lambda}$ یک C^*ـجبر است. مجموعه عناصر خودالحاق این فضا $\mathbb{R}$ و مجموعه عناصر یکانی آن دایره واحد است.

مثال ۴.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای فشرده و هاسدورف باشد. در این صورت فضای باناخ $C(\mathcal{X})$ از توابع پیوسته مختلط مقدار روی $\mathcal{X}$ با برگشت $f\mapsto\bar{f}$ یک C^*ـجبر است.

مثال ۵.۱.۱. فضای $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ از عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با برگشت $T\mapsto T^*$ که در آن T^* عملگر الحاقی T است، یک C^*ـجبر می‌باشد.

یک C^*ـجبر از جهاتی شبیه فضای مختلط $\mathbb{C}$ است. مثلاً هر عضو a در یک C^*ـجبر را می‌توان به صورت $a=b+ic$ که در آن b و c خودالحاق هستند، نوشت ($b=\frac{a+a^*}{۲}$ و $c=\frac{a-a^*}{۲i}$). b را قسمت حقیقی a نامیم و با نماد $\mathrm{Re}\ a$ نمایش می‌دهیم و c را قسمت موهومی a نامیده و با نماد $\mathrm{Im}\ a$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد و $a \in \mathcal{A}$. در این صورت طیف a به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \text{معکوسپذیر نیست } \mathcal{A} \text{ در } \lambda 1 - a\},$$

و شعاع طیفی a عبارتست از

$$\rho(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

اگر $\mathcal{A}$ یکدار نباشد، طیف و شعاع طیفی a به عنوان عضوی از فضای باناخ یکدار شده $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \mathbb{C}1$ تعریف می‌شود.

قضیه زیر به طیف و شعاع طیفی عناصر خودالحاق می‌پردازد.

قضیه ۷.۱.۱. اگر a یک عضو خودالحاق از C^*ـجبر $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ و $\rho(a) = \|a\|$.

قضیه زیر نشان می‌دهد که مثالهای ۴.۱.۱ و ۵.۱.۱ دو فضای مهم در نظریه C^*ـجبر هستند.

قضیه ۸.۱.۱. (قضیه گلفاند) فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*ـجبر جابجایی و یکدار باشد و $\Omega(\mathcal{A})$ مجموعه همریختی های ناصفر از $\mathcal{A}$ به $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت $\Omega(\mathcal{A})$ یک فضای فشرده و هاسدورف است و $\mathcal{A}$ با $C(\Omega(\mathcal{A}))$ یکریخت است. به علاوه این یکریختی حافظ نرم و $*$ نیز هست.

قضیه ۹.۱.۱. (قضیه گلفاند ـ نیمارک) هر C^*ـجبر را می‌توان در فضایی به شکل $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ نشاند. به طور دقیقتر، می توان فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و نمایش π از $\mathcal{A}$ به $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ یافت به طوری که π یک به یک باشد.

توجه کنید که نمایش π نرم را نیز حفظ می‌کند.

قضیه ۱۰.۱.۱. فرض کنید a یک عضو نرمال از C^*ـجبر $\mathcal{A}$ باشد و فرض کنید z نگاشت شمول از $\sigma(a)$ به $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت یک $*$ـهمریختی یکانی $\varphi : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$ وجود دارد که $\varphi(z) = a$. به علاوه φ حافظ نرم است و $\mathrm{Im}\ (\varphi)$ عبارتست از C^*ـزیر جبر تولید شده با ۱ و a از $\mathcal{A}$.

$*$ـ همریختی $\varphi : C(\sigma(a)) \to A$ تعریف شده در بالا که در آن $\varphi(z) = a$، حسابان تابعی در a نامیده

می‌شود. به ازای هر تابع $f \in C(\sigma(a))$، عضو نظیر $\varphi(f)$ از C^*ـ جبر $\mathcal{A}$ را با $f(a)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۱۱. اگر a یک عضو نرمال از C^*ـ جبر $\mathcal{A}$ باشد و $f \in C(\sigma(a))$، آنگاه $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.
به علاوه اگر $g \in C(\sigma(f(a)))$ ، داریم $(gof)(a) = g(f(a))$.

حال به معرفی یک ترتیب جزیی روی عناصر خودالحاق یک C^*ـ جبر می‌پردازیم.

قضیه ۱.۱.۱۲. اگر a یک عضو خودالحاق از C^*ـ جبر $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه گوییم a مثبت است اگر $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$ و a را اکیداً مثبت نامیم اگر مثبت و معکوسپذیر باشد.

اگر a مثبت باشد می‌نویسیم $a \geq 0$ و اگر a اکیداً مثبت باشد می‌نویسیم $a > 0$.

اگر a و b دو عضو خودالحاق از یک C^*ـ جبر باشد، گوییم $b \leq a$ یا $a \geq b$ اگر $a - b$ مثبت باشد.

قضیه ۱.۱.۱۳. اگر a عضو مثبتی از C^*ـ جبر $\mathcal{A}$ باشد آنگاه عضو مثبت منحصر بفردی مانند b از $\mathcal{A}$ وجود دارد به طوری که $b^2 = a$.

تعریف ۱.۱.۱۴. اگر a عضو مثبتی از C^*ـ جبر $\mathcal{A}$ باشد آنگاه عضو مثبت منحصر بفرد b را که $b^2 = a$، با $a^{1/2}$ نمایش می‌دهیم و آن را ریشه دوم a نامیم.

می‌توان نشان داد که مجموعه عناصر مثبت C^*ـ جبر $\mathcal{A}$ عبارتست از $\{a^*a | \ a \in \mathcal{A}\}$. بنابراین به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ می‌توان تعریف کرد $|a| = (a^*a)^{1/2}$. باید توجه کرد که هر چند مجموعه عناصر مثبت در یک C^*ـ جبر از جهاتی شبیه به مجموعه اعداد مثبت است ولی اساساً ماهیت متفاوتی دارد. برای مثال حاصلضرب دو عضو مثبت در یک C^*ـ جبر الزاماً مثبت نیست. همچنین طرفین یک نامساوی در C^*ـ جبرها را نمی‌توان به توان ۲ رساند یا به عنوان مثالی دیگر نامساوی $\mathrm{Re}\ a \leq |a|$ در C^*ـ جبرها همیشه برقرار نیست.

در اینجا ما برخی از خواص عناصر مثبت C^*ـ جبرها را یادآوری می‌کنیم:

قضیه ۱.۱.۱۵. اگر a, b دو عضو خودالحاق از C^*ـ جبر $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه

(۱) اگر $a \leq b$ و $c \in \mathcal{A}$ آنگاه $c^*ac \leq c^*bc$؛

(۲) اگر $0 \le a \le b$ آنگاه $\|a\| \le \|b\|$؛

(۳) $a \le |a| \le \|a\|$؛

(۴) اگر $0 \le a \le b$ آنگاه $a^{1/2} \le b^{1/2}$؛

لم زیر نیز به طور مکرر در فصل ۲ استفاده می‌شود.

لم ۱۶.۱.۱. به ازای هر عضو a در C^*ـ‌جبر $\mathcal{A}$،

$$\mathrm{Re}^2\ a + \mathrm{Im}^2\ a = \frac{|a|^2 + |a^*|^2}{2}.$$

برهان. فرض کنید $a = b + ic$. در اینصورت

$$|a|^2 + |a^*|^2 = a^*a + aa^* = (b - ic)(b + ic) + (b + ic)(b - ic) = 2(b^2 + c^2).$$

$\square$

بنابراین به جای نامساوی $\mathrm{Re}\ a \le |a|$ در اعداد مختلط می‌توان از نامساوی زیر استفاده کرد.

نتیجه ۱۷.۱.۱. برای هر a در C^*ـ‌جبر $\mathcal{A}$،

$$\mathrm{Re}^2\ a \le \frac{|a|^2 + |a^*|^2}{2},$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که a خودالحاق باشد.

قضیه ۱۸.۱.۱. اگر u یک عملگر روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد آنگاه u خودالحاق است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in \mathcal{H}$، داشته باشیم $\langle ux, x\rangle \in \mathbb{R}$ و u مثبت است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in \mathcal{H}$، داشته باشیم $\langle ux, x\rangle \ge 0$.

تابعک خطی ϕ را روی یک C^*ـ‌جبر مثبت گوییم اگر به ازای هر عضو مثبت a داشته باشیم $\phi(a) \ge 0$. تابعک خطی مثبت با نرم یک، حالت نامیده می‌شود.

قضیه ۱۹.۱.۱. اگر a یک عضو نرمال ناصفر از C^*ـجبر $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه حالتی مانند ϕ روی $\mathcal{A}$ وجود دارد به طوری که $\phi(a) = \|a\|$.

تعریف ۲۰.۱.۱. یک تابعک خطی کراندار $u : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ بین فضاهای هیلبرت $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ به طور جزیی حافظ نرم نامیده می‌شود اگر u روی $\ker(u)^\perp$ حافظ نرم باشد.

به راحتی دیده می‌شود که اگر u به طور جزیی حافظ نرم باشد، آنگاه u^*u یک نگاشت تصویر است.

قضیه زیر به تجزیه پلار معروف است.

قضیه ۲۱.۱.۱. فرض کنیم v یک عملگر روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است. در این صورت یک عملگر به طور جزیی حافظ نرم مانند $u \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ وجود دارد که

$$v = u|v| \quad \text{and} \quad \ker(u) = \ker(v).$$

به علاوه $|v| = u^*v$.

تعریف ۲۲.۱.۱. عملگر u را روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ قطری پذیر گوییم اگر بردارهای ویژه آن تشکیل یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ بدهد.

قضیه ۲۳.۱.۱. اگر u یک عملگر فشرده و نرمال روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه u قطری پذیر است.

برای جزییات بیشتر درباره C^*ـجبرها رجوع کنید به [۵۶].

۱-۲ هیلبرت C^*ـمدول

فضاهای هیلبرت C^*ـمدول نخستین بار در سال ۱۹۵۳ در کارهای کاپلانسکی [۴۵] معرفی شدند. ایده او این بود که تعمیمی از فضاهای هیلبرت ارائه کند که در آن به جای آنکه مقادیر ضرب داخلی در اعداد مختلط فرض شود، در یک C^*ـجبر یکدار جابجایی اختیار شود.

تا حدود ۲۰ سال بعد، تقریباً هیچ کار اساسی در این زمینه صورت نگرفت تا اینکه در رساله دکتری پاسکه [۵۸] و بعد از آن در مقالات رایفل [۶۳] به این مفهوم روی C^*ـجبرهای دلخواه پرداخته شد.

در این بخش ما به معرفی فضاهای هیلبرت C^*ـمدول که مفهوم اصلی فصلهای بعد است، می‌پردازیم.

ابتدا تعریفی از فضاهای هیلبرت C^*ـمدول می‌آوریم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر و $\mathcal{M}$ یک فضای خطی باشد. گوییم $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$ـمدول راست است اگر یک نگاشت $(a,m) \to ma$ از $\mathcal{A} \times \mathcal{M}$ به $\mathcal{M}$ وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

۱. به ازای هر $a \in \mathcal{A}$، نگاشت $m \to ma$ روی $\mathcal{M}$ خطی باشد،

۲. به ازای هر $m \in \mathcal{M}$، نگاشت $m \to ma$ روی $\mathcal{A}$ خطی باشد،

۳. به ازای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ و $m \in \mathcal{M}$، رابطه $(ma_۱)a_۲ = m(a_۱a_۲)$ برقرار باشد.

به طریق مشابه می‌توان $\mathcal{A}$ـمدول چپ تعریف کرد.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*ـجبر باشد. یک پیش هیلبرت $\mathcal{A}$ـمدول (راست) عبارتست از یک $\mathcal{A}$ـمدول راست $\mathcal{X}$ به انضمام یک ضرب داخلی $\mathcal{A}$ـمقداری $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathcal{A}$ به طوری که به ازای هر $x,y,z \in \mathcal{X}$، $\lambda \in \mathbb{C}$ و $a \in \mathcal{A}$،

(۱) $\langle x, y+\lambda z\rangle = \langle x,y\rangle + \lambda\langle x,z\rangle$؛

(۲) $\langle x, ya\rangle = \langle x,y\rangle a$؛

(۳) $\langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle^*$؛

(۴) $\langle x,x\rangle \geq ۰$ و $\langle x,x\rangle = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$؛

توجه شود که بنا به شرط (۱) ضرب داخلی نسبت به مؤلفه دوم خطی است و با توجه به (۳) نسبت به مؤلفه اول مزدوج خطی است. همچنین به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم $\langle xa, y\rangle = a^*\langle x,y\rangle$.

تذکر ۳.۲.۱. فضاهای پیش هیلبرت مدول چپ نیز به طریق مشابه تعریف می‌شوند.

گزاره ۴.۲.۱. اگر $\mathcal{X}$ یک پیش هیلبرت $\mathcal{A}$ـمدول باشد و $x, y \in \mathcal{X}$، آنگاه

$$\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle \leq \|\langle x, x\rangle\|\langle y, y\rangle. \qquad (۱.۲.۱)$$

برهان. فرض کنید $\|\langle x, x\rangle\| = ۱$. اگر $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$\begin{aligned} ۰ &\leq \langle xa - y, xa - y\rangle \\ &= a^*\langle x, x\rangle a - \langle y, x\rangle a - a^*\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle. \end{aligned}$$

چون $\langle x, x\rangle$ یک عضو مثبت در $\mathcal{A}$ است، با استفاده از قضیه ۸.۱.۱ برای C^*ـجبر تولید شده به وسیله ۱ و $\langle x, x\rangle$ داریم $۰ \leq \langle x, x\rangle \leq \|\langle x, x\rangle\|$. بنابراین $a^*\langle x, x\rangle a \leq a^*\|\langle x, x\rangle\|a$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} ۰ &\leq \|\langle x, x\rangle\|a^*a - \langle y, x\rangle a - a^*\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= a^*a - \langle y, x\rangle a - a^*\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle. \end{aligned}$$

اکنون با قرار دادن $a = \langle x, y\rangle$ در نامساوی فوق نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

اگر $x = ۰$، واضح است که حکم برقرار است. فرض کنید x عضو ناصفری از $\mathcal{X}$ باشد به طوری که $\lambda = \|\langle x, x\rangle\|$. بنابراین $\|\langle \frac{x}{\lambda^{۱/۲}}, \frac{x}{\lambda^{۱/۲}}\rangle\| = ۱$. بنا بر آنچه ثابت شد

$$\langle y, \frac{x}{\lambda^{۱/۲}}\rangle\langle \frac{x}{\lambda^{۱/۲}}, y\rangle \leq \|\langle \frac{x}{\lambda^{۱/۲}}, \frac{x}{\lambda^{۱/۲}}\rangle\|\langle y, y\rangle.$$

پس $\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle \leq \|\langle x, x\rangle\|\langle y, y\rangle$. □

نامساوی (۱.۲.۱)، نامساوی کوشی-شوارتز در فضاهای هیلبرت مدول نامیده می‌شود که ما آن را به اختصار نامساوی کوشی-شوارتز می‌خوانیم.

تذکر ۵.۲.۱. اگر یک تابعک خطی مثبت مانند φ روی یک C^*ـجبر $\mathcal{A}$ داشته باشیم، می‌توان یک فضای خارج قسمتی از هیلبرت $\mathcal{A}$ـمدول $\mathcal{X}$ ساخت به طوری که این فضا فضای ضرب داخلی باشد. برای این کار فرض کنید

$$N_\varphi = \{x \in \mathcal{X} : \varphi(\langle x, x\rangle) = ۰\}.$$

در این صورت N_φ یک زیر مدول بسته $\mathcal{X}$ است و

$$\langle x+N_\varphi, y+N_\varphi\rangle := \varphi(\langle y,x\rangle),$$

یک ضرب داخلی مختلط مقدار روی فضای خارج قسمتی $\frac{\mathcal{X}}{N_\varphi}$ تعریف می‌کند. در نتیجه بنا به نامساوی کوشی-شوارتز برای هر $x,y\in X$، داریم

$$|\varphi(\langle x,y\rangle)|^۲ \leq \varphi(\langle x,x\rangle)\varphi(\langle y,y\rangle).$$

اگر $x\in\mathcal{X}$، تعریف می‌کنیم $\|x\| = \|\langle x,x\rangle\|^{\frac{۱}{۲}}$ در گزاره ۴.۲.۱ چون طرفین نامساوی مثبت هستند، می‌توان از طرفین نرم گرفت. یعنی

$$\|\langle x,y\rangle\|^۲ = \|\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle\| \leq \|\langle x,x\rangle\|\|\langle y,y\rangle\|.$$

در نتیجه $\|\langle x,y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|$. از این نامساوی به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که اگر $\mathcal{X}$ یک پیش هیلبرت $\mathcal{A}$ -مدول باشد آنگاه $\|.\|$ یک نرم روی $\mathcal{X}$ تعریف می‌کند.

اگر پیش هیلبرت $\mathcal{A}$-مدول $\mathcal{X}$ نسبت به نرم تعریف شده در بالا کامل باشد، گوییم $\mathcal{X}$ یک هیلبرت $\mathcal{A}$-مدول (هیلبرت مدول روی $\mathcal{A}$) است.

مثال ۶.۲.۱. الف) هر فضای هیلبرت یک هیلبرت مدول چپ روی $\mathbb{C}$ است.

ب) اگر $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر باشد و $\mathcal{J}$ یک ایده‌آل بسته راست آن باشد، آنگاه $\mathcal{J}$ با ضرب داخلی $\langle a,b\rangle = a^*b$ یک هیلبرت $\mathcal{A}$-مدول است. بالاخص خود $\mathcal{A}$ یک هیلبرت $\mathcal{A}$-مدول است.

علاوه بر نرم معمولی، می‌توان روی هر هیلبرت $\mathcal{A}$-مدول $\mathcal{X}$ یک «نرم» $\mathcal{A}$-مقداری $|.|$ نیز به صورت $|x| = \langle x,x\rangle^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف کرد. از آنجایی که با گرفتن ریشه دوم از یک نامساوی در C^*-جبرها، نامساوی حفظ می‌شود، از گزاره ۴.۲.۱ می‌توان نتیجه گرفت

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\||y| \quad (x,y\in X). \tag{۲.۲.۱}$$

همچنین با گرفتن ریشه دوم از نامساوی $\langle xa,xa\rangle = a^*\langle x,x\rangle a \leq \|x\|^۲a^*a$ داریم

$$|xa| \leq \|x\||a| \quad (x\in\mathcal{X}, a\in\mathcal{A}).$$

باید توجه کرد که نرم $\mathcal{A}$ـمقداری روی یک هیلبرت $\mathcal{A}$ـمدول در واقع یک نرم نیست و خواص مربوط به نرم را ندارد. مهمترین تفاوت بین نرمهای معمولی و این نرم آن است که این نرم در نامساوی مثلثی صدق نمی‌کند.

هیلبرت مدولها از جهاتی شبیه فضاهای هیلبرت عمل می‌کنند. اما در واقع تفاوتهای اساسی بین این دو فضا وجود دارد.

مثال زیر نمونه‌ای از شباهتهای این دو فضا است.

مثال ۷.۲.۱. اگر $\mathcal{X}$ یک هیلبرت $\mathcal{A}$ـمدول و $x \in \mathcal{X}$ باشد، نشان می‌دهیم

$$\|x\| = \sup\{\|\langle x, y\rangle\| :\ y \in \mathcal{X},\ \|y\| \leq ۱\}.$$

اگر $\|y\| \leq ۱$، آنگاه $\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\|\|y\| \leq \|x\|$. از طرف دیگر

$$\|\langle x, \frac{x}{\|x\|}\rangle\| = \frac{۱}{\|x\|}\|\langle x, x\rangle\| = \|x\|,$$

بنابراین نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

مثال بعد یکی از تفاوتهای این دو فضا را بیان می‌کند.

مثال ۸.۲.۱. اگر $\mathcal{Y}$ یک زیر مدول بسته از هیلبرت $\mathcal{A}$ـمدول $\mathcal{X}$ باشد، تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{Y}^{\perp} = \{y \in \mathcal{X} :\ \langle x, y\rangle = ۰\ \forall x \in \mathcal{Y}\}.$$

در این صورت $\mathcal{Y}^{\perp}$ یک زیر مدول بسته از $\mathcal{X}$ است. اما $\mathcal{X} \neq \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^{\perp}$ و $\mathcal{Y}^{\perp\perp} \neq \mathcal{Y}$.

برای مثال فرض کنید $\mathcal{A} = C[۰, ۱]$، $\mathcal{X} = \mathcal{A}$ و $\mathcal{Y} = \{f \in \mathcal{A} :\ f(۱/۲) = ۰\}$. اگر $g \in \mathcal{Y}^{\perp}$ آنگاه به ازای هر $f \in \mathcal{Y}$ داریم $g\bar{f} = \langle g, f\rangle = ۰$ بالاخص $g(t)(t - \frac{۱}{۲}) = ۰$. بنابراین $g = ۰$ روی $[۰, ۱] \setminus \frac{۱}{۲}$، و چون g پیوسته است، پس $g = ۰$. بنابراین $\mathcal{Y}^{\perp} = ۰$ و هیچ یک از تساوی‌های $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^{\perp}$ و $\mathcal{Y}^{\perp\perp} = \mathcal{Y}$ اتفاق نمی‌افتد.

اکنون به معرفی یک دسته مهم از عملگرها روی هیلبرت مدول‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو هیلبرت $\mathcal{A}$ـمدول باشند. تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})=\{T:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}|\ \exists T^*:\mathcal{Y}\to\mathcal{X};\ \langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle\quad\forall x\in\mathcal{X},y\in\mathcal{Y}\}.$$

مجموعه $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ مجموعه نگاشتهای الحاق پذیر از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{Y}$ نامیده می‌شود.

به سادگی دیده می‌شود که هر عضو $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ یک نگاشت $\mathcal{A}$ـخطی است. یعنی اگر $T\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ آنگاه T خطی است و به ازای هر $x\in\mathcal{X}$ و $a\in\mathcal{A}$، $T(xa)=T(x)a$.

گزاره ۱۰.۲.۱. هر عضو $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ یک نگاشت $\mathcal{A}$ـخطی کراندار است.

برهان. فرض کنیم $T\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. به ازای هر x در گوی واحد بسته $\mathcal{X}_1$ از $\mathcal{X}$، تعریف می‌کنیم $f_x:\mathcal{Y}\to\mathcal{A}$ با ضابطه $f_x(y)=\langle Tx,y\rangle\ (y\in\mathcal{Y})$. بنابراین به ازای هر $x\in\mathcal{X}_1$، داریم $\|f_x(y)\|\leq\|T^*y\|$. بنا به قضیه باناخ‌ـاشتینهاوس مجموعه $\{\|f_x\|:x\in\mathcal{X}_1\}$ کراندار است، یعنی عددی مانند M وجود دارد که به ازای هر $x\in\mathcal{X}$ رابطه $\|f_x\|<M$ برقرار است. بنابراین

$$\|T\|=\sup_{x\in\mathcal{X}_1}\|T(x)\|=\sup_{\substack{x\in\mathcal{X}_1\\ y\in\mathcal{Y}_1}}\|\langle Tx,y\rangle\|=\sup_{\substack{x\in\mathcal{X}_1\\ y\in\mathcal{Y}_1}}\|f_x(y)\|=\sup_{x\in\mathcal{X}_1}\|f_x\|<M.$$

در نتیجه نگاشت T کراندار است. □

این گزاره بیان می‌کند $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\subseteq\mathbb{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ که در آن $\mathbb{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ فضای همه عملگرهای خطی کراندار از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{Y}$ است. هر چند باید توجه کرد که عکس این گزاره درست نیست. به عبارت دیگر، یک نگاشن $\mathcal{A}$ـخطی کراندار الزاماً الحاق پذیر نیست.

مثال ۱۱.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{Y}=\mathcal{A}=C([0,1])$ و $\mathcal{X}=\{f\in\mathcal{A}:f(0)=0\}$ و $i:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ نگاشت شمول باشد. اگر i الحاق پذیر باشد و ۱ تابع ثابت ۱ در $\mathcal{A}$ باشد، در این صورت به ازای هر $x\in\mathcal{X}$،

$$\langle x,i^*(1)\rangle=\langle i(x),1\rangle=\langle x,1\rangle.$$

بنابراین $i^*(1)=1$ که متعلق به $\mathcal{X}$ نیست. بنابراین i الحاق پذیر نیست.

واضح است که اگر $T\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ آنگاه $T^*\in\mathcal{L}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$. همچنین اگر $\mathcal{Z}$ هیلبرت $\mathcal{A}$ـمدول دیگری باشد و $S\in\mathcal{L}(\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ آنگاه $ST\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Z})$. به ویژه $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{X})$ (که ما آن را به اختصار با

$\mathcal{L}(\mathcal{X})$ نمایش می‌دهیم) یک $*$ـجبر است.

قضیه ۱۲.۲.۱. فضای $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ یک C^*ـجبر است.

برهان. ابتدا توجه کنید که بنا به تعریف به سادگی می‌توان نتیجه گرفت $\|T\| = \|T^*\|$. بنابراین $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ یک زیر مجموعه بسته از جبر همه عملگرهای کراندار روی $\mathcal{X}$ است. زیرا اگر $\{T_n\}$ یک دنباله از عملگرهای الحاق پذیر روی $\mathcal{X}$ باشد که به عملگر T میل می‌کنند، آنگاه دنباله $\{T_n\}$ یک دنباله کوشی است. پس $\{T_n^*\}$ نیز یک دنباله کوشی است و به عملگری مانند S میل می‌کند. اما

$$\langle Sx, y\rangle = \lim_n \langle T_n^* x, y\rangle = \lim_n \langle x, T_n y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

پس T الحاق پذیر با مزدوج S است.

همچنین بنا به تعریف، اگر S و T دو عملگر در $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ باشند، آنگاه $ST \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ و $(ST)^* = T^*S^*$. بنابراین $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ یک جبر باناخ است. به علاوه روابط

$$\begin{aligned}\|T^*T\| &\geq \sup\{\|\langle T^*Tx, x\rangle\| : x \in \mathcal{X}_۱\}\\ &= \sup\{\|\langle Tx, Tx\rangle\| : x \in \mathcal{X}_۱\} = \|T\|^۲,\end{aligned}$$

نشان می‌دهد که نرم عملگری در شرط C^*ـبودن صدق می‌کند. $\square$

هر هیلبرت $\mathcal{A}$ـمدول $\mathcal{X}$ را می‌توان در یک C^*ـجبر $\Lambda(\mathcal{X})$ نشاند. برای اینکار فرض کنید $\mathcal{F} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{A}$، جمع مستقیم هیلبرت $\mathcal{A}$ـمدولهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{A}$ با ضرب داخلی

$$\langle (x_۱, a_۱), (x_۲, a_۲)\rangle = \langle x_۱, x_۲\rangle + a_۱^* a_۲ \,.$$

باشد. اگر هر $x \in \mathcal{X}$ را با نگاشت $\mathcal{A} \to \mathcal{X}$، $a \mapsto xa$ یکی بگیریم، مزدوج این نگاشت عبارتست از $x^*(y) = \langle x, y\rangle$. قرار دهید

$$\Lambda(\mathcal{X}) = \left\{ \begin{bmatrix} T & x \\ y^* & a \end{bmatrix} : a \in \mathcal{A}, x, y \in \mathcal{X}, T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) \right\}.$$

در این صورت $\Lambda(\mathcal{X})$ یک C^*ـزیر جبر $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ است که به آن جبر اتصالی $\mathcal{X}$ گوییم. داریم

$$\mathcal{X} \simeq \begin{bmatrix} ۰ & \mathcal{X} \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \mathcal{A} \simeq \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & \mathcal{A} \end{bmatrix}, \mathcal{L}(\mathcal{X}) \simeq \begin{bmatrix} \mathcal{L}(\mathcal{X}) & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$