دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

عنوان:

حل معادلات دیفرانسیل پخش (انتشار) وابسته زمانی از مرتبه کسری به‌وسیله‌ی روش‌های بدون شبکه

پژوهشگر:

طاهره رحیم‌پور جلالوند

استاد راهنما:

دکتر کمال شانظری

استاد مشاور:

دکتر فردین ساعدپناه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

بهمن ماه ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده

در این پایان‌نامه، دو روش بدون شبکه‌بندی برای حل معادله‌ی پخش (انتشار) با مشتق کسری کاپاتو نسبت به زمان ارائه شده است. در هر دو روش از تقریب تفاضل پیشرو برای گسسته‌کردن مشتق کسری کاپاتو استفاده می‌شود. در روش اول با استفاده از روش کانسا به حل معادله‌ی پخش (انتشار) کسری می‌پردازیم، که این روش اولین پژوهش در مورد حل این دسته از معادلات با استفاده از روش کانسا می‌باشد. در روش دوم بین مقادیر تابع مجهول در نقاط دلخواه و مقادیر آن در نقاط درونیابی رابطه‌ای را به‌دست می‌آوریم، که با استفاده از رابطه‌ی به‌دست آمده به حل معادله خواهیم پرداخت. در هر دو روش جواب به‌صورت ترکیب خطی از توابع پایه‌ای شعاعی در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از هم‌محلی در نقاط مرزی و دامنه‌ای به حل معادله می‌پردازیم. در نهایت دستگاه معادلاتی حاصل خواهد شد که با به‌دست آوردن ضرایب مجهول در هر پله‌ی زمانی و جایگذاری آن‌ها می‌توان مقادیر تابع مجهول را در هر نقطه‌ی دلخواه و در هر گام زمانی تعیین کرد.

کلمات کلیدی: *روش بدون شبکه، توابع پایه‌ای شعاعی، حسابان کسری، معادلات دیفرانسیل جزیی از مرتبه کسری*

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

مقدمه

مشتق و انتگرال کسری به عنوان تعمیمی از مشتق و انتگرال مرتبه‌ی صحیح از مدت‌ها قبل مورد توجه ریاضیدانان بوده است. تاریخ پیدایش آن را می‌توان به لایبنیتس[۱] نسبت داد. در سال ۱۶۹۵ هوپیتال[۲] طی نامه‌ای به لایبنیتس می‌نویسد که $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ برای $n = \frac{۱}{۲}$ چگونه توجیه می‌شود؟ لایبنیتس در پاسخ او به رابطه‌ی بین مشتقات و سری‌های نامتناهی اشاره می‌کند و این را یک تناقض آشکار از چیزی می‌داند که روزی نتایج مفیدی دربرخواهد داشت. بعد از لایبنیتس تعمیم مشتق و انتگرال مرتبه‌ی صحیح به غیرصحیح (کسری) مورد توجه ریاضیدان‌های بسیاری از جمله اویلر[۳] (۱۷۳۰)، لاگرانژ[۴] (۱۷۷۲)، لاپلاس[۵](۱۸۱۲)، فوریه[۶] (۱۸۲۲)، لیوویل[۷] (۱۸۳۲)، ریمان (۱۸۴۷)،[۸] گرونوالد[۹] (۱۸۶۷)، لتنیکوف[۱۰] (۱۸۶۸)، ویل[۱۱] (۱۹۱۷) و کاپاتو[۱۲] (۱۹۶۷) قرار گرفت. از میان تعاریف مختلفی که برای مشتق و انتگرال مرتبه‌ی غیرصحیح ارائه شده است تعاریف گرونوالد-لتنیکوف، ریمان-لیوویل و کاپاتو از اهمیت بیشتری برخوردار هستند. بحث کلی در مورد این تعاریف را می‌توان در کتب مرجع [۹, ۱۹, ۳۰, ۳۲, ۳۳, ۳۵] دنبال کرد. امروزه مشتق و انتگرال مرتبه‌ی غیرصحیح تحت عنوان "حسابان کسری" شناخته شده است. با الهام گرفتن از حسابان کسری، معادلات دیفرانسیل جزیی از مرتبه‌ی کسری برای توصیف و مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، شیمیایی و غیره ظاهر شدند. فرمول‌بندی بسیاری از مسائل در مهندسی و علوم می‌تواند به‌وسیله معادلات دیفرانسیل معمولی کسری [۱۳] $(FODE)$ یا معادلات دیفرانسیل جزیی کسری [۱۴] $(FPDE)$ بیان شود. از آن‌جا که بسیاری از پدیده‌ها در مهندسی و فیزیک توسط $FPDEs$ معین می‌شوند، مدل‌های عددی و شبیه‌سازی برای حساب دیفرانسیل کسری، توجه محققان

[۱] Leibnitz
[۲] Hopital
[۳] Euler
[۴] Lagrange
[۵] Laplace
[۶] Fourier
[۷] Liouville
[۸] Reiman
[۹] Grunwald
[۱۰] Letnikov
[۱۱] Wyle
[۱۲] Caputo
[۱۳] Fractional ordinary differential equations
[۱۴] Fractional partial differential equations

را به خود جلب کرده است [۱, ۳, ۱۸]. در حال حاضر این یک موضوع جدید در محاسبات مکانیکی و محاسبات ریاضی می‌باشد [۴۲]. معادلات جنبشی کسری [۱۵] مانند معادله انتشار کسری[۱۶]، معادله پخش-وزش کسری [۱۷]، معادله فوکر-پلانک کسری [۱۸] ، معادله کابل کسری [۱۹] معادلاتی مفید و مناسب برای توصیف دینامیک حمل‌ونقل می‌باشند [۲۷, ۲۸, ۳۶, ۴۱]. با توجه به نقش اساسی معادلات دیفرانسیل جزیی کسری حل این‌گونه معادلات از اهمیت زیادی برخوردار است. برای برخی از این‌گونه معادلات جواب‌های تحلیلی با استفاده از تبدیلات لاپلاس و فوریه به‌دست آمده است [۲]. اما همیشه یافتن جواب تحلیلی برای چنین معادلاتی ممکن نیست. از این‌رو برای حل آن‌ها باید به روش‌های عددی روی آورد. برخلاف معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه صحیح، مرتبه‌ی مشتق (در مورد زمان یا فضا یا هر دو) در $FPDE$ یک عدد صحیح نیست. به عبارت دیگر، یک مرتبه‌ی کسری (مثلا مرتبه ۰/۵ یا ۱/۵) است. که منجر به مشکلاتی در شبیه‌سازی عددی می‌شود. زیرا روش‌های شبیه‌سازی عددی موجود برای PDE با مرتبه مشتق صحیح هستند. در حال حاضر، $FPDEs$ به‌وسیله روش تفاضلات متناهی[۲۰] (FDM) [۲۴, ۲۶] و روش عناصر متناهی[۲۱] (FEM) [۱۲, ۱۳, ۳۴] به‌صورت عددی حل می‌شوند. این روش‌ها متعلق به رده‌ی روش‌های شبکه‌بندی دامنه‌ای بوده و نیازمند شبکه‌بندی روی مرز و دامنه‌ی معادله هستند. این شبکه‌بندی‌ها سبب می‌شوند که حجم محاسبات زیاد شده و خصوصا باعث افزایش حجم ماتریس‌های حاصل از پیاده‌سازی روش‌ها می‌شود. همچنین به‌کارگیری این شبکه‌بندی‌ها بر روی نواحی هندسی نامنظم کاری دشوار است. این مشکلات و کاستی‌ها مانعی برای توسعه روش‌های شبکه‌بندی محسوب می‌شود. اکثر پژوهش‌های انجام شده در این زمینه مربوط به مسائل یک بعدی و دو بعدی با دامنه‌های ساده (به‌عنوان مثال مربع و مستطیل) و شرایط مرزی دیریکله محدود می‌باشند. در سال‌های اخیر برای جلوگیری از مشکلات فوق، روش‌های بدون‌شبکه به‌وجود آمده و توسعه یافته‌اند. در این روش‌ها نیازی به گسسته‌سازی دامنه و مرز وجود ندارد و فقط با استفاده از تعدادی نقاط پراکنده به حل معادلات دیفرانسیل می‌پردازند. روش‌های بدون‌شبکه اولین بار در سال ۱۹۹۰ توسط کانسا [۲۲]ارائه گردید [۱۷]. مزیت‌های روش‌های بدون‌شبکه را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه نمود:

- به گسسته‌سازی دامنه و مرز نیازی ندارد.
- فرمول‌بندی آن‌ها برای مسائل در دوبعد و سه‌بعد مشابه است.
- برنامه‌نویسی برای این روش‌ها ساده‌تر از برنامه‌نویسی برای روش‌های شامل شبکه‌بندی است.
- قادر به حل مسائل در نواحی هندسی نامنظمی می‌باشند که برای روش‌های متداول FDM و FEM پیچیده است.

با توجه به مزایای گفته شده، روش‌های بدون‌شبکه برای حل عددی $FPDE$ مناسب‌تر است. در حال حاضر پژوهش‌های محدودی در مورد بررسی $FPDEs$ به‌وسیله‌ی روش‌های بدون شبکه گزارش شده است و این مساله همچنان در حال توسعه است.

[۱۵] Fractional kinetic equation
[۱۶] Fractional diffusion equation
[۱۷] Fractional advection-diffusion equation
[۱۸] Fractional Fokker-Planck equation
[۱۹] Fractional cable equation
[۲۰] Finite differnce method
[۲۱] Finite element method
[۲۲] Kansa

این پایان‌نامه مشتمل بر شش فصل است. در فصل اول مقدمات مورد نیاز برای آشنایی با معادلات دیفرانسیل جزیی[۲۳] و همچنین سه نوع مهم از توابع خاص[۲۴] در ریاضی (گاما[۲۵]، بتا[۲۶] و میتاگ-لفلر[۲۷]) که نقش کلیدی در حسابان کسری دارند، بیان می‌شود. در فصل دوم به معرفی روش‌های بدون شبکه پرداخته و دو روش بدون شبکه‌ی هم‌محلی نامتقارن[۲۸] و هم‌محلی متقارن[۲۹] شرح داده می‌شود. در فصل سوم به توضیح روش بدون شبکه برای حل معادلات وابسته‌ی زمانی پرداخته می‌شود و برای معادلات سهموی[۳۰] و هذلولوی[۳۱] شرح داده می‌شود. همچنین یک روش بدون شبکه برای حل معادله‌ی هذلولوی با شرایط انتگرالی نیز بیان می‌شود. در فصل چهارم مفهوم مشتق و انتگرال مرتبه‌ی صحیح به مفهوم مشتق و انتگرال مرتبه‌ی کسری تعمیم داده می‌شود و تعاریف گرونوالد-لتنیکوف، ریمان-لیوویل و کاپاتو برای مشتق و انتگرال مرتبه کسری ارائه می‌شود. همین‌طور به بیان خواصی از این تعاریف و رابطه‌ی آن‌ها با یکدیگر پرداخته می‌شود. در فصل پنج دو روش بدون شبکه برای حل معادله‌ی پخش با مشتق مرتبه‌ی کسری روی زمان ارائه می‌شود. در فصل شش با ارائه‌ی چند مثال و نتایج عددی حاصل از آن‌ها کارایی این دو روش برای حل این نوع معادلات بررسی می‌شود.

---

[۲۳] Partial differential equation
[۲۴] Special functions
[۲۵] Gamma function
[۲۶] Beta function
[۲۷] Mittag-leffler function
[۲۸] Unsymmetric collocation method
[۲۹] Symmetric collocation method
[۳۰] Parabolic
[۳۱] Hyperbolic

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل به بیان مفاهیمی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی از آن‌ها استفاده می‌کنیم. ابتدا معادله دیفرانسیل جزیی و انواع آن معرفی می‌شود، در ادامه توابع گاما، بتا و میتاگ-لفلر معرفی می‌شود و برخی خواص این توابع را که نقش مهمی در حسابان کسری دارند، یادآوری می‌کنیم.

۱.۱ معادله دیفرانسیل جزیی

یک معادله دیفرانسیل جزیی، معادله‌ای است شامل یک تابع مجهول و مشتقات جزیی آن نسبت به متغیرهای مستقل. شکل کلی یک معادله دیفرانسیل جزیی به‌صورت زیر می‌باشد

$$f(x, y, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, ..., \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}, \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}, ...) = ۰$$

این معادله شامل متغیرهای مستقل $x, y, \ldots$ و تابع مجهول u از متغیرهای مستقل است، همچنین $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^۲ u}{\partial^۲ x}, \ldots$ مشتقات جزیی u می‌باشند.

این معادله خطی است هرگاه متغیر وابسته‌ی u و همه‌ی مشتقات آن به‌صورت خطی در معادله ظاهر شوند، در غیراین‌صورت معادله دیفرانسیل را غیرخطی گویند. آن دسته از معادلات که تنها نسبت به بالاترین مرتبه‌ی موجود خطی هستند را معادلات شبه‌خطی گویند. مرتبه‌ی یک معادله دیفرانسیل جزیی، بالاترین مرتبه‌ی مشتق جزیی موجود در معادله است.

یک معادله دیفرانسیل جزیی مرتبه دوم دو متغیره‌ی خطی معادله‌ای به شکل زیر است

$$a\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + b\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = ۰ \qquad (۱.۱)$$

که ضرایب f, e, d, c, b, a و g ثابت‌ها یا توابعی از متغیرهای مستقل x وy هستند. هرگاه تابع $g(x, y)$ به‌ازای هر x وy برابر صفر باشد، معادله (۱.۱) را همگن گویند و در غیر این‌صورت معادله را ناهمگن گویند.

در حالت کلی معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه‌ی دوم دو بعدی به سه دسته‌ی زیر تقسیم می‌شوند:

۱)اگر $b^2 - 4ac < 0$ باشد معادله را بیضوی [۱] می‌نامند.

۲)اگر $b^2 - 4ac = 0$ باشد معادله را سهموی می‌نامند.

۳)اگر $b^2 - 4ac > 0$ باشد معادله را هذلولوی می‌نامند.

معروف‌ترین معادلات بیضوی دو بعدی معادله پواسون[۲]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g = 0,$$

و معادله‌ی لاپلاس [۳]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

هستند که در ارتباط با مسائل تعادل [۴]یا مسائل حالت پایدار [۵]مطرح می‌شوند. به عنوان مثال پتانسیل سرعت شارش پایدار یک مایع تراکم ناپذیر غیرچسبناک در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند. مسائلی که t را به عنوان یک پارامتر مستقل دربرمی‌گیرند، معادلات سهموی یا هذلولوی را ایجاد می‌کنند. این مسائل را معادلات وابسته به زمان[۶]می‌گویند. معادله‌ی $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ساده‌ترین معادله‌ی سهموی است که از تئوری رسانایی گرمایی ناشی می‌شود. به‌طور کلی پدیده‌های شارش و پخش گرما توسط معادلات سهموی توصیف می‌شوند. معادلات هذلولوی از مسائل ارتعاش یا مسائلی که ناپیوستگی در زمان ایجاد می‌کنند سرچشمه می‌گیرند. راحت‌ترین معادله هذلولوی مرتبه‌ی دو، معادله موج یک بعدی $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ است. به‌طور کلی دستگاه‌های مرتعش و حرکت موج توسط معادلات هذلولوی توصیف می‌شوند.

برای حل معادلات دیفرانسیل جزیی دو روش کلی وجود دارد: روش‌های تحلیلی و روش‌های عددی. از آن‌جایی که حل این معادلات با استفاده از روش‌های تحلیلی در اکثر موارد پیچیده یا غیرممکن است، در عمل از روش‌های عددی استفاده می‌شود.

۲.۱ توابع خاص در حسابان کسری

توابع خاص به آن دسته از توابعی گفته می‌شود که از نظر کاربردی در فیزیک و ریاضی مورد توجه می‌باشند. توابع خاص یکی از موضوع‌های قدیمی در ریاضیات است و در مدل‌سازی جواب معادلات دیفرانسیل معمولی و جزیی ظاهر می‌شوند.

۱.۲.۱ تابع گاما

در مطالعه‌ی توابع خاص ریاضی، تابع گاما از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. تابع گاما، تابع فاکتوریل $n!$ را تعمیم می‌دهد، به‌طوری‌که n می‌تواند مقادیر غیرصحیح و حتی مقادیر مختلط را بپذیرد. تابع گاما در تعریف بعضی از توابع

[۱]Elliptic

[۲]Poisson's equation

[۳]Laplace's equation

[۴]Equilibrium Problems

[۵]Steady-State Problems

[۶]Time dependent equation

خاص ریاضی ظاهر می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t, \quad z \in \mathbb{C}$$

می‌توان به سادگی نشان داد که تابع گاما در نیمه‌ی راست صفحه مختلط $(Re(z) > 0)$ همگراست [۳۳].
در ادامه به بیان برخی از خواص تابع گاما می‌پردازیم:
۱) مهم‌ترین خاصیت تابع گاما عبارت است از

$$\Gamma(1 + z) = z\Gamma(z). \tag{۲.۱}$$

۲) برای هر عدد طبیعی n داریم

$$\Gamma(1 + n) = n!.$$

۳) تابع گاما در $z = -n$ برای $n = 0, 1, 2, \ldots$ دارای قطب ساده[۷] است.
۴) تابع گاما همواره مخالف صفر است.
۵) نمایش حدی تابع گاما به‌صورت زیر است

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}.$$

۶) برای هر عدد غیرصحیح z داریم

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

۷) رابطه‌ی زیر، که به فرمول لژاندر[۸] معروف است، برای $z \neq 0, -\frac{1}{2}, -1, \ldots$ برقرار است

$$\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z). \tag{۳.۱}$$

۸) برای هر a و b دلخواه تابع گاما در خاصیت مجانبی زیر صدق می‌کند

$$z^{b-a}\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = 1 + O(z^{-1}).$$

۹) تابع گاما به‌صورت زیر نیز قابل تعریف است

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{1} \big(\ln(\frac{1}{t})\big)^{z-1}\mathrm{d}t.$$

اثبات خواص فوق در [۳۳] ارائه شده‌است.
با قرار دادن $z = n + \frac{1}{2}$، که n یک عدد صحیح است، در رابطه‌ی (۳.۱) رابطه‌ی مفید زیر به‌دست می‌آید

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}. \tag{۴.۱}$$

[۷] Simple pole
[۸] Legendre formula

با قرار دادن $n = ۰$ در رابطه‌ی (۴.۱) داریم

$$\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}.$$

همچنین به ازای $z = -\frac{۱}{۲}$ در رابطه‌ی (۲.۱) خواهیم داشت

$$\Gamma(-\frac{۱}{۲}) = -۲\Gamma(\frac{۱}{۲}) = -۲\sqrt{\pi}.$$

ضرایب بسط دوجمله‌ای $\binom{\alpha}{k}$ به‌ازای مقادیر حقیقی، نقش مهمی در حسابان کسری دارند. این تعمیم با استفاده از تابع گاما به‌صورت زیر بیان می‌شود:

ضرایب بسط دوجمله‌ای $\binom{\alpha}{k}$ به‌طوری که $\alpha \in \mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{Z}^+$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{(-۱)^k\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+۱)} = \frac{\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۲)\ldots(\alpha-k+۱)}{k!}.$$

۲.۲.۱ تابع بتا

تابع بتا یکی دیگر از توابع خاص ریاضی است که در مشتق و انتگرال مرتبه‌ی کسری برخی از توابع ریاضی ظاهر می‌شود. این تابع ارتباط مستقیمی با تابع گاما دارد.

$$B(z,w) = \int_۰^۱ t^{z-۱}(۱-t)^{w-۱}\mathrm{d}t, \quad (Re(z) > ۰, Re(w) > ۰).$$

تابع بتا به‌صورت زیر نیز تعریف می‌شود که بیانگر رابطه‌ی آن با تابع گاما است

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad (Re(z) > ۰, Re(w) > ۰).$$

حال به بیان برخی خواص تابع بتا می‌پردازیم:

۱) تابع بتا را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$B(z,w) = \int_۰^۱ t^{z-۱}(۱-t)^{w-۱}\mathrm{d}t = \int_۰^{+\infty} \frac{t^{z-۱}}{(۱+t)^{z+w}}\mathrm{d}t = ۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (\sin t)^{۲z-۱}(\cos t)^{۲w-۱}\mathrm{d}t.$$

۲) نمایش دیگری از تابع بتا به‌صورت زیر است

$$B(z,w) = \int_۰^۱ t^z(۱-t)^w\mathrm{d}t.$$

۳) برابری‌های زیر در مورد تابع بتا برقرار است

$$B(z,w) = B(w,z),$$
$$B(z,w) = B(z+۱,w) + B(z,w+۱),$$
$$B(z,w+۱) = \frac{w}{z}B(z+۱,w) = \frac{w}{z+w}B(z,w).$$

اثبات خواص فوق در [۳۳] ارائه شده‌است.

۳.۲.۱ تابع میتاگ-لفلر

جواب‌های تحلیلی معادلات دیفرانسیل با مشتق کسری اغلب برحسب تابعی به‌نام میتاگ-لفلر بیان می‌شود. تابع میتاگ-لفلر به‌عنوان تابع ویژه یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری نیز معرفی می‌شود و در معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری همان نقش را دارد که تابع نمایی در معادلات دیفرانسیل معمولی ایفا می‌کند. این تابع در سال ۱۹۰۳ توسط میتاگ-لفلر [۹] ریاضیدان سوئدی به شکل زیر برای $z \in \mathbb{C}$ معرفی شده‌است.

تابع میتاگ-لفلر $E_\alpha(z)$ برای $\alpha > ۰$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=۰}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + ۱)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

همچنین تابع تعمیم یافته‌ی میتاگ-لفلر برای $\alpha, \beta > ۰$ به‌صورت زیر است

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=۰}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

حال برخی خواص تابع میتاگ-لفلر را بیان می‌کنیم

۱) برای $|z| < ۱$ تابع تعمیم یافته‌ی میتاگ-لفلر در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$\int_۰^{+\infty} e^{-t} t^{\beta-۱} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha z)\mathrm{d}t = \frac{۱}{۱-z}.$$

۲) تبدیل لاپلاس [۱۰] تابع میتاگ-لفلر به‌صورت زیر است

$$\mathcal{L}\{E_\alpha(at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-۱}}{s^\alpha - ۱}, \quad s > |a|^{\frac{۱}{\alpha}}.$$

۳)برای برخی مقادیر خاص α، تابع میتاگ-لفلر به‌صورت زیر است

$$E_۰(z) = \frac{۱}{۱-z},$$

$$E_۱(z) = e^z,$$

$$E_۲(z^۲) = \cosh(z),$$

$$E_۲(-z^۲) = \cos(z).$$

۴) برای تابع تعمیم یافته‌ی میتاگ-لفلر رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\int_۰^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k+\beta-۱} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha)\mathrm{d}t = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \mp a}, \quad s > |a|^{\frac{۱}{\alpha}}.$$

برای اثبات خواص فوق به [۳۳] مراجعه شود.

[۹] Mittag-Leffler
[۱۰] Laplace transform

فصل ۲

روش‌های بدون شبکه

به‌طور کلی روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل جزیی را به دو دسته‌ی روش‌های با شبکه‌بندی و روش‌های بدون شبکه‌بندی تقسیم می‌کنند. روش‌های شبکه‌بندی نیز به دو دسته‌ی دامنه‌ای و مرزی تقسیم می‌شوند. از جمله روش‌های شبکه‌بندی دامنه‌ای می‌توان روش تفاضلات متناهی و روش عناصر متناهی را نام برد. استفاده از این روش‌ها نیازمند سطح بالایی از گسسته‌سازی دامنه می‌باشد که این امر افزایش حجم محاسبات و طولانی شدن زمان حل مساله را باعث می‌شود. از این رو روش عناصر مرزی [۱] (BEM) که یک روش شبکه‌بندی مرزی است در سال ۱۹۷۸ توسط بربیا [۲]پایه‌گذاری شد که در این روش نیازی به گسسته‌سازی دامنه وجود ندارد و گسسته‌سازی فقط روی مرز انجام می‌شود [۳۱]. این امر منجر به کاهش بعد مساله به اندازه یک واحد شده و همچنین دستگاه معادلات نسبتا کوچکتری حاصل می‌شود. در روش عناصر مرزی ابتدا معادله دیفرانسیل با استفاده از توابع خاصی تحت عنوان جواب اساسی[۳] به یک معادله انتگرال تبدیل می‌شود، سپس معادله انتگرال به‌دست آمده با روش‌های عددی حل می‌شود. مهم‌ترین اشکال این روش این است که به دلیل شکل خاص جواب‌های اساسی، انتگرال‌های منفردی به‌وجود می‌آید که محاسبه‌ی آن‌ها برای مسائل سه بعدی و بالاتر کاری پرهزینه است. علاوه بر این یافتن جواب‌های اساسی برای معادلات گوناگون همواره امکان‌پذیر نمی‌باشد. با توجه به مشکلات فوق‌الذکر در روش‌های شبکه‌بندی، در سال‌های اخیر روش‌های بدون شبکه به عنوان روشی جایگزین مطرح شده و توسعه یافته است. روش‌های بدون شبکه اولین بار در سال ۱۹۹۰ توسط کانسا ارائه گردید. در این روش‌ها نیازی به هیچ‌گونه گسسته‌سازی دامنه و مرز وجود نداشته و فقط با استفاده از تعدادی نقاط پراکنده به حل معادلات دیفرانسیل جزیی می‌پردازند. روش‌های بدون شبکه‌بندی نیز به دو دسته‌ی دامنه‌ای و مرزی تقسیم می‌شود. در روش‌های بدون شبکه دامنه‌ای نقاط پراکنده درون دامنه و روی مرز انتخاب می‌شوند. در روش‌های بدون شبکه مرزی نقاط پراکنده فقط روی مرز انتخاب می‌شوند. یک روش بدون شبکه دامنه‌ای که در سال‌های اخیر پیشرفت‌های چشمگیری داشته است، روش توابع پایه‌ای شعاعی [۴]است. استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی اولین بار توسط هاردی [۵]در سال ۱۹۷۱ به عنوان یک روش برای مدل‌بندی جغرافیای زمین به کار برده شد و سپس توسط کانسا در سال

[۱] Boundary Element Method

[۲] Brebbia

[۳] Fundamental Solution

[۴] Radial Basis Function

[۵] Hardy

۱۹۹۰ به وسیله‌ی روش هم‌محلی توابع پایه‌ای شعاعی، مخصوصا تقریب‌های مولتی کوادریک (MQ) توسعه پیدا کرد. در این روش تابع جواب به‌صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه‌ای شعاعی بیان می‌شود. از انواع روش‌های بدون شبکه دامنه‌ای می‌توان روش هم‌محلی متقارن و روش هم‌محلی نامتقارن که به روش کانسا معروف است را نام برد، که در این فصل به توضیح این دو روش می‌پردازیم. به دلیل نیاز این روش‌ها به توابع پایه‌ای شعاعی، قبل از توضیح روش‌ها به معرفی این رده از توابع می‌پردازیم.

۱.۲ توابع پایه‌ای شعاعی

توابع پایه‌ای شعاعی دسته‌ای از توابع برای درونیابی داده‌های پراکنده چند بعدی در دامنه‌های منظم و نامنظم هستند. مهم‌ترین خاصیت این توابع کاربردشان در تقریب توابع چند متغیره است. از آن‌جا که توابع پایه‌ای شعاعی فقط تابعی از فاصله هستند بنابراین به آسانی قابل تعمیم به مسائل با بعد بالاتر می‌باشند و در نتیجه به‌کارگیری توابع پایه‌ای شعاعی نسبت به سایر توابع آسان‌تر است. مزایای دیگر درونیابی به‌وسیله‌ی توابع پایه‌ای شعاعی عبارت است از: دقت، سادگی در پیاده‌سازی، کارایی و کاهش حافظه مورد نیاز کامپیوتر. توابع پایه‌ای شعاعی را معمولا به عنوان تعمیمی از توابع اسپلاین یک متغیره به چند متغیره معرفی می‌کنند.

فرض کنیم نقاط متمایز $\{x_j | j = ۱, ۲, \dots, N\}$ و مقادیر تابع حقیقی f در این نقاط یعنی $\{f(x_j) | j = ۱, ۲, \dots, N\}$ داده شده‌اند، همان‌طور که می‌دانیم اسپلاین خطی برای درونیابی f در این نقاط به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$s_j(x) = \frac{(x_{j+۱} - x)f(x_j) + (x - x_j)f(x_{j+۱})}{x_{j+۱} - x_j}, \quad x_j \leq x \leq x_{j+۱}, \tag{۱.۲}$$

به ازای $j = ۱, ۲, \dots, N - ۱$.

تابع تقریبی $s(x)$ در شرایط درونیابی صدق می‌کنند، یعنی

$$s(x_j) = f(x_j), \quad j = ۱, ۲, \dots, N. \tag{۲.۲}$$

شکل دیگری از این معادله را می‌توان به‌صورت یک تابع درونیاب کلی به‌صورت زیر بیان کرد

$$s(x) = \sum_{j=۱}^{N} \alpha_j |x - x_j|, \quad x_۱ \leq x \leq x_N, \tag{۳.۲}$$

که ضرایب α_j طوری تعیین می‌شوند که شرایط درونیابی (۲.۲) برقرار باشد.

در حالت یک متغیره (۱.۲) و (۲.۲) با هم معادلند. در حالت چند متغیره، فضای چند بعدی باید به نواحی مناسبی افراز شود و مساله پیچیده خواهد شد. عبارت (۳.۲) برای تعمیم اسپلاین خطی به حالت چند متغیره مناسب است. با در نظر گرفتن یک تابع n متغیره f یک تعمیم از (۳.۲) به‌صورت زیر است

$$s(x) = \sum_{j=۱}^{N} \alpha_j \|x - x_j\|, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{۴.۲}$$

یا

$$s(x) = \sum_{j=۱}^{N} \alpha_j r_j. \tag{۵.۲}$$

که در آن $r_j = \|x - x_j\|$ و نرم به‌کار رفته اقلیدسی می‌باشد. برای تعمیم تابع درونیاب خطی (۵.۲) به مراتب بالاتر شکل کلی

$$s(x) = \sum_{j=۱}^{N} \alpha_j \varphi(r_j),$$

پیشنهاد شده است، که φ یک تابع پایه‌ای شعاعی نامیده می‌شود. در جدول ۱.۲ تعدادی از توابع پایه‌ای شعاعی که غالبا مورد استفاده قرار می‌گیرند معرفی شده‌اند

.

جدول ۱.۲: تعدادی از توابع پایه‌ی شعاعی معروف

تابع شعاعی پایه	نام
$۱ + cr$	تابع خطی
$۱ + c_۱ r + c_۲ r^۲ + \ldots + c_n r^n$	تابع چندجمله‌ای ($p_n(r)$)
$r^۲ log(r)$	اسپلاین‌های صفحه نازک (TPS)
$r^{۲k} log(r)$	اسپلاین‌های صفحه نازک تعمیم‌یافته ($GTPS$)
$e^{-r^۲}$	تابع گاوس
$e^{-c^۲ r^۲}$	تابع گاوس تعمیم‌یافته
$(r^۲ + c^۲)^{۱/۲}$	تابع مولتی کوادریک (MQ)
$(r^۲ + c^۲)^{-۱/۲}$	معکوس تابع مولتی کوادریک (IMQ)
$(r^۲ + c^۲)^{-۳/۲}$	شبه‌معکوس تابع مولتی کوادریک ($Q - IMQ$)

۱.۱.۲ یکتایی جواب مساله درونیابی

با انتخاب یک تابع پایه‌ای شعاعی مناسب و با به‌کار بردن شرط درونیابی (۲.۲)، دستگاه معادلات خطی به فرم زیر حاصل می‌شود

$$f(x_i) = \sum_{j=۱}^{N} \alpha_j \varphi(\|x_i - x_j)\|, \quad ۱ \leq i \leq N,$$

که در آن α_jها ضرایب مجهول‌اند. دستگاه معادلات فوق دارای جواب منحصر به فرد است اگر و تنها اگر ماتریس ضرایب

$$A = \begin{bmatrix} \varphi(\|x_۱ - x_۱\|) & \dots & \varphi(\|x_۱ - x_N\|) \\ \varphi(\|x_۲ - x_۱\|) & \dots & \varphi(\|x_۲ - x_N\|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\|x_N - x_۱\|) & \dots & \varphi(\|x_N - x_N\|) \end{bmatrix},$$

نامنفرد باشد. این ماتریس را ماتریس درونیابی می‌نامند. یکی از ویژگی‌های مفید بسیاری از توابع پایه‌ای شعاعی این است که بدون اعمال محدودیت در مورد نحوه‌ی انتخاب نقاط درونیابی، ماتریس درونیابی آن‌ها نامنفرد است [۳۹]. یک شرط کافی برای نامنفرد بودن ماتریس درونیابی، معین مثبت بودن ماتریس متقارن A است، که برای تضمین یکتایی جواب مساله درونیابی برای بعضی از توابع پایه‌ای شعاعی به‌کار برده می‌شود. تابع پایه‌ای شعاعی که ماتریس درونیابی آن معین مثبت باشد، یک تابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت نامیده می‌شود.

۲.۱.۲ تقریب به‌وسیله‌ی توابع پایه‌ای شعاعی

در حالت کلی تقریب تابع u به‌وسیله‌ی درونیابی RBFها و داده‌های پراکنده[۶] به‌صورت زیر می‌باشد

$$u(x) \simeq \sum_{j=۱}^{N} \alpha_j \varphi(r_j), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d.$$

که در آن N تعداد کل نقاط داده شده می‌باشد، $x = (x_۱, x_۲, \dots, x_d)$ و d بعد مساله است، α_jها ضرایب درونیابی‌اند که باید تعیین شوند، φ یک تابع پایه‌ای شعاعی است و $r_j = \|x - x_j\|$.
با توجه به شرط درونیابی خواهیم داشت

$$u(x_i) \simeq \sum_{j=۱}^{N} \alpha_j \varphi(r_{ij}), \quad i = ۱, ۲, \dots, N,$$

که در آن $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$ و همان‌طور که گفته شد این دستگاه جواب یکتا خواهد داشت اگر و فقط اگر ماتریس ضرایب A نامنفرد باشد. اگر تابع پایه‌ای شعاعی φ معین مثبت باشد (مانند گاوسی و معکوس مولتی کوادریک) آن‌گاه دستگاه معادلات دارای جواب یکتا خواهد بود. اگر تابع پایه‌ای شعاعی φ به‌طور مشروط معین مثبت باشد (مانند مولتی کوادریک و TPS) آن‌گاه برای اطمینان از قابل حل بودن دستگاه معادلات معمولا یک چندجمله‌ای به‌نام $\psi(x)$

[۶] Scattered Data

به‌صورت زیر به تابع پایه‌ای شعاعی اضافه می‌شود

$$u(x) \simeq \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi(r_j) + \psi(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d.$$

که در آن $\psi(x)$ چندجمله‌ای مورد نظر است.

فرض کنیم $\mathcal{P}$ فضای چندجمله‌ای‌های در $\mathbb{R}^d$ باشد که درجه‌شان حداکثر q است. حال اگر $P_1, ..., P_m$ پایه‌ای برای $\mathcal{P}$ در $\mathbb{R}^d$ باشد، $\psi(x)$ معمولا به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i P_i(x),$$

که در آن

$$m = \frac{(q-1+d)!}{d!(q-1)!}.$$

بنابراین

$$u(x) \simeq \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varphi(r_j) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i P_i(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d. \tag{۶.۲}$$

توجه می‌کنیم که دستگاه حاصل از این رابطه دارای N معادله و $N+m$ مجهول خواهد بود. برای به‌دست آوردن جواب یکتا برای این دستگاه معادلات، m معادله زیر به معادلات حاصل از شرایط درونیابی اضافه می‌شود

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j P_i(x_j) = 0 \quad i = 1, \dots, m. \tag{۷.۲}$$

در این‌صورت دستگاه معادلات حاصل از (۶.۲) و (۷.۲) تواما با هم دارای $N+m$ معادله و $N+m$ مجهول خواهد بود، که در صورت نامنفرد بودن ماتریس ضرایب جواب یکتا خواهد داشت [۷]. استفاده از RBFها معایبی را نیز به همراه دارد. در حالت کلی ماتریس ضرایب حاصل از درونیابی به‌وسیله‌ی RBFها به ماتریس‌های درونیابی چگال منجر می‌شود که عدد شرطی آن‌ها خصوصا برای مسائل با اندازه بزرگ به سرعت افزایش می‌یابد. یک راه غلبه بر بدوضعی، استفاده از CS-RBF [۷]ها می‌باشد که دسته‌ی خاصی از توابع هستند که به‌صورت موضعی بر حسب تعدادی از نقاط همجوار تعریف می‌شوند و در نتیجه منجر به تشکیل ماتریس‌های درونیابی تنک می‌شوند.

۲.۲ روش هم‌محلی نامتقارن

روش هم‌محلی نامتقارن یک روش بدون شبکه دامنه‌ای می‌باشد که توسط کانسا در سال ۱۹۹۰ پیشنهاد گردید [۱۷]. برای توضیح این روش، فرم کلی معادله دیفرانسیل جزیی زیر را با شرایط مرزی در نظر بگیرید

$$\mathcal{L}u = F, \tag{۸.۲}$$

[۷] Compactly Supported Radial Basis Function