وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تربیت معلم آذربایجان

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

عنوان

حل عددی معادلات با مشتقات جزیی با استفاده از روشهای هم مکانی توابع پایه‌ای شعاعی نامتقارن

پژوهشگر

لیلا واحدی

استاد راهنما

دکتر مجتبی رنجبر

استادان مشاور

دکتر علی خانی و دکتر ناصر آقازاده

دی ۱۳۸۹

تبریز - ایران

بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوارم

قدردانی

بر خود وظیفه می‌دانم تا از تمامی عزیزانی که راهگشای این پروژه بوده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم.
امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.
استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مجتبی رنجبر که مرا در انجام این پروژه همراهی کردند.
سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام.
برادر گرامی‌ام که یاور و مشوق همیشگی من در زندگی و به ویژه در دوران تحصیلاتم بوده‌اند.
برای تمام این عزیزان، سربلندی و موفقیت و سلامتی در تمام مراحل زندگی آرزو می‌کنم.

لیلا واحدی

چکیده

در این پایان نامه جواب تقریبی معادلات با مشتقات جزئی [1] خطی و غیرخطی را مطالعه می‌کنیم که به صورت ترکیب خطی متناهی از RBF ها به صورت زیر نوشته می شود.

$$u^n(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^n \varphi(r_j) \qquad n = 1, 2...$$

معمولا از قیدهای اضافی برای بهبود جواب استفاده می شود. با استفاده از شرط اولیه‌ی $u(x_i, 0)\ , \quad i = 1, ..., N$ بردار اولیه λ^0 را محاسبه کرده بدین ترتیب λ^n برای تکرارهای پی در پی n محاسبه می شود که مبنای کار روش هم محلی می باشد. بدلیل بدحالتی ماتریس حاصل از روش بالا از روش حذفی گاوس استفاده می شود تا حل دستگاه آسان شود. همچنین با استفاده از برنامه نویسی در مطلب مثالهایی برای PDE های خطی و غیرخطی حل می شود.

واژه‌های کلیدی: شبکه آزاد ، RBF ، معادلات با مشتقات جزئی ، KDV ، ماتریس درونیاب ، نقاط هم محلی ، پارامتر شکلی

---

[1] partial differential equations

پیشگفتار

در دهه اخیر توسعه توابع پایه ای شعاعی یا به طور اختصار RBF ها به عنوان یک روش کاملا شبکه آزاد توجه بسیاری از محققین در علوم مهندسی و فیزیک را در زمینه تئوری تقریب به خود جلب کرده است. به خاطر پیچیدگی شبکه، در سالهای اخیر تلاش مطلوب به توسعه روشهای شبکه آزاد اختصاص یافته است. هدف از این روشها حذف ساختار شبکه و تقریب جواب با استفاده از نقاط تصادفی می باشد. یکی از مزیت های این روشها تبدیل مسائل چند بعدی به مسائل یک بعدی با استفاده از تابع نرم اقلیدسی می باشند. در سال ۱۹۹۰ ، کانسا [۲] [۱۵] و [۱۶] یک روش کاملا شبکه آزاد را مستقیما از روش هم محلی با استفاده از RBF ها توسعه داده است. به ویژه توابع پایه ای شعاعی MQ [۳] برای تقریب عددی معادلات با مشتقات جزئی ابتدا بوسیله هاردی [۴] [۱۳] در سال ۱۹۷۱ به عنوان یک روش درونیابی برای نقاط پراکنده در دامنه های چند بعدی در مدل بندی گرانش زمین مطرح شد ، ولی به وسیله اغلب محققان دانشگاهی به رسمیت شناخته نشد. تا اینکه فرانک یک مقاله در زمینه تخمین روشهای درونیابی دو بعدی منتشر کرد که MQ به عنوان بهترین تابع براساس دقت، حساسیت آن نسبت به پارامترها، زمان انجام آن و اجرای آسانش شناخته شد. اخیرا روش کانسا برای حل معادلات با مشتقات جزئی ومعادلات دیفرانسیل معمولی گوناکون گسترش داده شده است. بعدا $Fasshauer$ ،[۴] روش کانسا را به یک روش هم محلی از نوع هرمیتی برای برای حل پذیری ماتریس درونیاب تعمیم داد. معادلات با مشتقات جزئی معادلاتی مهم می باشند که اغلب

[۲] Kansa
[۳] Multi Quadric
[۴] Hardy

در واکنش های فیزیکی و محاسبات مهندسی به وجود می آیند و حل تحلیلی اکثر این معادلات مشکل می باشد. بنابراین محققین به دنبال حل عددی این معادلا ت هستند و روشهای عددی گوناگون برای حل این معادلات ارائه کرده اند در این پایان نامه از میان روشهای عددی به دنبال روشی هستیم که مستقل از ساختار شبکه بوده و در عین حال مرتبه دقت بالاتری داشته باشد که استفاده از RBF ها این خواسته را برآورده می کنند. چارچوب کلی این پایان نامه به صورت زیر می باشد. در فصل اول تعاریف و مقدمات لازم بیان شده است. در فصل دوم RBF ها را به طور کلی توضیح و روش های گوناگون حل معادلات با مشتقات جزئی خطی بااستفاده از RBF ها بیان کرده همچنین این روش با روشهای تفاضلات متناهی مقایسه می شود. در فصل سوم معادله غیر خطی KDV با استفاده از روشهای مختلف RBF حل و برای وضوح مطلب مثالهایی در این زمینه ارائه می گردد. فصل چهارم نیز اختصاص به RBF های متقارن و نامتقارن دارد در این فصل نیز با حل مثالهایی، دو روش متقارن و نامتقارن با هم مقایسه می شود. در بخش آخر برنامه های استفاده شده برای حل مثالها ارائه شده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ تعاریف و مفاهیم آنالیز

تعریف ۱.۱.۱ مجموعه نقاطی از دامنه ، که در آن تابع مورد نظر مخالف صفر باشد **محمل** [۱] یک تابع گویند به عبارت دیگر محمل یک تابع برابر با مجموعه ی $support(f) = \{x|f(x) \neq ۰\}$ است. محمل یک تابع بر دو نوع است : عمومی و موضعی ، که اگر تابع در کل دامنه مخالف صفر باشد در این صورت گویند محمل تابع عمومی در غیر این صورت موضعی است . برای مثال تابع $f(x) = \frac{۱}{۱+x^۲}$ یک تابع با محمل عمومی و تابع $f(x) = x$ یک تابع با محمل موضعی می باشد .

تعریف ۲.۱.۱ تابعی که مشتقات آن از هر مرتبه موجود باشد تابع **هموار** گویند. برای مثال تابع $e^{-ct^۲}$ تابع هموار است .

[۱] support

تعریف ۳.۱.۱ ماتریس مربعی A را معین مثبت گویند، هرگاه متقارن باشد و به ازای هربردار حقیقی $X \neq 0$، $X^T AX > 0$ باشد.به سادگی می توان نشان داد که اگر A معین مثبت باشد آنگاه معکوس پذیر خواهد بود.

تعریف ۴.۱.۱ تابع $g \in C^{\infty}$ بطور کامل یکنواخت است اگروتنها اگر برای $k = 0, 1, 2, \ldots$ داشته باشیم

$$(-1)^k \quad g^k(t) \geq 0 \qquad \forall t > 0$$

که g^k مشتق مرتبه ی k ام g است. برای مثال توابع $g(t) = e^{-\alpha t}$ برای $\alpha \geq 0$ و $g(t) = (t+c^2)^{-1/2}$ به ازای هر c به طورکامل یکنواخت اند .

همچنین برای تابع به طور کامل یکنواخت داریم .

تعریف ۵.۱.۱ تابع g به طور کامل یکنواخت است اگروتنهااگر g جواب تبدیل لاپلاس اندازه‌ی غیر نزولی μ به صورت زیر باشد.

$$g(t) = \int_0^{\infty} e^{-t\alpha} \mu(\alpha) d\alpha \qquad t > 0$$

اگر تابع g ثابت باشد از این حالت مستثنی می شود.

قضیه ۱.۱.۱ فرض کنید

$$g : R_+ \to R$$

یک تابع به طور کامل یکنواخت پیوسته باشد بنابراین به ازای هر E و n که $E \subset R^n$ مجموعه‌ای متناهی وشامل نقاط مجزاست ماتریس A به صورت $A_{ij} = \varphi(\|x_i - x_j\|)$ برای $\varphi(r) = g(r^2)$ معین مثبت است مگر اینکه g ثابت باشد.

برهان. فرض کنیم $X = (x_1, ...x_n)$ برداری دلخواه باشد نشان می‌دهیم X^TAX مثبت است داریم

$$X^TAX = \sum_i \sum_j x_i x_j g(\|x_i - x_j\|^2) = \int_0^\infty \sum_i \sum_j x_i x_j e^{-\alpha((\|x_i - x_j\|^2)} \mu(\alpha) d\alpha$$

میدانیم $e^{-\alpha((\|x_i - x_j\|^2)}$ مثبت است و μ تابع اندازه و مثبت است ، همچنین $X^T\ X$ اندازه بردار X می باشد یعنی مثبت است . بنابراین $X^TAX > 0$ یعنی A معین مثبت است. ■

تعریف ۶.۱.۱ عدد حالت ماتریس $A_{m\times n}$ برابربا

$$cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$$

می باشد ، که اگر $cond(A) > 1$ در این صورت ماتریس بدحالت و اگر $cond(A) < 1$ ماتریس خوش حالت است .

که در آن σ ، مقدار منفرد ماتریس [2] $A_{m\times n}$ می باشد و به صورت زیر تعریف می شود

$$if\ \ m\ \geq\ n \Rightarrow\ A^T\ A(u_i) = \lambda_i\ u_i\ ,\ \sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i}$$

$$if\ \ m\ < n \Rightarrow A\ A^T(u_i) = \lambda_i\ \ u_i\ ,\ \sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i}\ ,\quad 1\ \leq\ i\ \leq\ p$$

که $p = min(m,n)$ و λ_i ها مقادیر ویژه ماتریس های A^TA , $A\ A^T$ می باشند .

تعریف ۷.۱.۱ شعاع طیفی ماتریس مربعی A برابر با $1 \leq i \leq N$ $\rho(A) = max_i|\lambda_i|$ که λ_i ها مقادیرویژه ماتریس A می باشند . ثابت می شود که اگر ماتریس A و B سه قطری باشند. در این صورت $\rho(AB) = \rho(A)\rho(B)$ [1]. همچنین $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$ برای همه ماتریس ها برقرار است .

برای محاسبه ی اندازه یک بردار از نرم استفاده می کنیم که به صورت زیر تعریف می شود

---

[2] singular value

تعریف ۸.۱.۱ نرم، یک تابع پیوسته با ضابطه‌ی

$$\|.\| : R^n \to R^+ \bigcup \{0\}$$

می باشد که دامنه‌ی آن عناصر بردار دلخواه X به صورت $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ می باشد . نرم بردار در سه خاصیت زیر صدق می کند.

۱- $\|x\| > 0$ برای هر بردار $x \neq 0$ ۲- برای هر اسکالر λ ، $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

۳- برای هر بردار x, y ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ که نامساوی مثلثی می باشد .

تعریف ۹.۱.۱ اگر $x, y \in R^n$ در این صورت نرم اقلیدسی بین این دو بردار برابر با

$$\|x - y\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2)^{1/2}$$

نرم بی نهایت دو بردار برابر با

$$\|x - y\|_\infty = max|x_j - y_j| \qquad j = 1, ..., n$$

و نرم یک دو بردار نیز به صورت زیر تعریف می شود.

$$\|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

تعریف ۱۰.۱.۱ رابطه ی بین نرم های یک بردار مانند $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ به صورت زیر می باشد.

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

تعریف ۱۱.۱.۱ اگر $u \in R^{N+1}$ جواب تحلیلی یک معادله و $s \in R^{N+1}$ جواب عددی آن باشد در این صورت خطای L_2 به صورت $L_2 = \|u-s\|_2 = \sqrt{h\sum_{j=0}^{N}\|u_j - s_j\|}$ ، که h گام مکانی می باشد و خطای L_∞ نیز به صورت $L_\infty = \|u-s\|_\infty = \max_j |u_j - s_j|$ محاسبه می شود.

تعریف ۱۲.۱.۱ اگر V مجموعه‌ی متشکل از n بردار در R^n باشد این بردارها در دستگاه مختصات n تایی با نظم مشخصی کنار هم قرار دهیم ، در این صورت گوییم این n تایی هاتشکیل یک شبکه می دهند. به طور مثال اگر دامنه معادله دوبعدی باشد یعنی $0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1$ آنگاه شبکه تشکیل شده یک مستطیل است. اگر دامنه معادله سه بعدی باشد در این صورت شبکه تشکیل شده مکعب می باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنیم s مقدار تقریبی f باشد نقاط x_j را هم مکانی گویند هرگاه در این نقاط مقادیر تقریبی با مقادیر تحلیلی برابر باشند یعنی $s(x_j) = f(x_j)$ به ازای $j = 1, ..., N$ ، به عبارت دیگر خطا در این نقاط صفر است .

تعریف ۱۴.۱.۱ جواب مساله مقدار اولیه [3] (IVP) به فرم

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

به روش اویلر برابر

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y)$$

[3] $Initial\ Value\ Problem$

است که h گام مکانی است ، این مقدار با جایگذاری مقدار مشتق پیشرو به جای y' بدست می آید.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرمول روش رانگ کوتای مرتبه چهارم برای مساله ی مقدار اولیه‌ی $y' = f(x,y)$ برابر با

$$y_{n+1} = y_n + h[1/6k_1 + 1/3k_2 + 1/3k_3 + 1/6k_4]$$

است. به طوری که

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + 1/2h, y_n + 1/2hk_1) \\ k_3 &= f(x_n + 1/2h, y_n + 1/2hk_2) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{aligned}$$

که h اندازه گام می باشد.

تعریف ۱٦.۱.۱ بسط تیلور تابع دو متغیره $f(x,y)$ حول نقطه (x_0, y_0):
اگر $f(x,y)$ مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبه $n+1$ ام در بازه های $a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$ داشته باشد و $x_0 \in [a,b], \; y_0 \in [c,d]$ ، در این صورت $f(x,y) = P_n(x,y) + R_n(x,y)$ به طوری که $P_n(x,y)$ مقدار تقریبی تابع $f(x,y)$ و $R_n(x,y)$ خطای حاصل می باشد و بسط تیلور این تابع به صورت زیر تعریف می شود

$$P_n(x,y) = f(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}]^j f(x_0, y_0)$$

به طوری که

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}]^{n+1} f(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0))$$

و

$$[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}]^j f(x_0,y_0) =$$
$$\sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!(j-i)!}(x-x_0)^i (y-y_0)^{j-i} \frac{\partial}{\partial x^i \partial y^{j-i}} f(x_0,y_0)$$

به عنوان مثال برای $j=2$ داریم

$$[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}]^2 f(x_0,y_0) = (x-x_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0,y_0) +$$
$$2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0,y_0) + (y-y_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0,y_0)$$

۲.۱ روش تفاضلات متناهی

در این قسمت روش تفاضلات متناهی برای حل معادلات با مشتقات جزئی بیان می شود. فرم کلی معادلات با مشتقات جزئی مرتبه دوم خطی به شکل زیر می باشد.

$$A\ u_{xx} + B\ u_{xy} + C\ u_{yy} + D\ u_x + E\ u_y + F\ u = G$$

که A,B,C,D,E,F ضرایب ثابت اند و بسته به علامت B^2-4AC ، معادله‌ی بالا سهموی ، هذلولوی و بیضوی می باشد .
برای سهولت در بیان روش تفاضلات متناهی معادله گرما به فرم زیر

$$u_t = \alpha u_{xx} \quad , t > 0 \ , \ 0 \le x \le 1$$

با شرایط مرزی و اولیه داده شده را در نظر بگیرید

$$B.C\ ,\ I.C \begin{cases} u(\circ,t) = u(\text{۱},t) = \circ \\ u(x,\circ) = u_\circ(x) \end{cases}$$

تقریب u_t بر حسب عملگر پیشرو و تقریب u_{xx} بر حسب عملگر مرکزی بصورت

$$u_t(x,t) = \frac{u(x,t+\triangle t) - u(x,t)}{\triangle t}$$

$$u_{xx}|_i^n = \frac{u_{i-\text{۱}}^n - \text{۲}u_i^n + u_{i+\text{۱}}^n}{\triangle x^\text{۲}}$$

گسسته سازی می شوند. که در آن

$$t_{n+\text{۱}} = t_n + \triangle t\ ,\ x_{i+\text{۱}} = x_i + \triangle x$$

$$u_t(x_i,t_n) = u_t|_i^n = \frac{u_i^{n+\text{۱}} - u_i^n}{\triangle t}$$

با جایگذاری مقادیر تقریبی u_{xx}, u_t در معادله گرما داریم:

$$\frac{u_i^{n+\text{۱}} - u_i^n}{\triangle t} = \alpha[\frac{u_{i-\text{۱}}^n - \text{۲}u_i^n + u_{i+\text{۱}}^n}{\triangle x^\text{۲}}]$$

با فرض $s = \alpha\frac{\triangle t}{\triangle x^\text{۲}}$ جواب تقریبی معادله گرما به شکل زیر بدست می آید.

$$u_i^{n+\text{۱}} = s\ u_{i-\text{۱}}^n + (\text{۱} - \text{۲}\ s)\ u_i^n + s\ u_{i+\text{۱}}^n \quad i = \text{۱},...,M-\text{۱}$$

که در این روش (x,t) بر حسب شبکه گسسته سازی شده‌اند. به طور مثال اگر $x \in R$ در این صورت محور x ها را محور دامنه و محور y ها را محور زمان در نظر بگیرید در این صورت شبکه حاصل یک مستطیل است. اگر دامنه به M قسمت تقسیم شود در این صورت ماتریس حاصل از جواب بالا یک ماتریس سه قطری از بعد $(M-\text{۱}) \times (M-\text{۱})$ به صورت زیر است .

$$A = \begin{pmatrix} (\text{۱}-\text{۲}s) & s & & & & \\ s & (\text{۱}-\text{۲}\ s) & s & & & \\ & s & (\text{۱}-\text{۲}s) & s & & \\ & & & \dots & & \\ & & & s & (\text{۱}-\text{۲}s) & s \\ & & & & s & (\text{۱}-\text{۲}s) \end{pmatrix}$$

ثابت می شود [۲۳] اگر ماتریس A سه قطری با عناصر a,b,c باشد در این صورت مقادیر ویژه آن به صورت زیر بدست می آید :

$$\lambda_k = b + 2\sqrt{(ac)}\ \cos(\frac{k\pi}{M}) \qquad k = 1, ..., M-1$$

بنابراین با استفاده از فرمول بالا مقادیر ویژه ماتریس حاصل از حل معادله گرما به صورت زیر می باشد :

$$\lambda_k = 1 - 2s(1-\cos(\frac{k\pi}{M})) = 1 - 2\ s(2\ \sin^2(\frac{k\pi}{M})) = 1 - 4s\ \sin^2(\frac{k\pi}{2M})$$
$$k = 1, ..., M-1$$

معادله بالا پایدار می باشد اگر $\rho(A) \leq 1$ بنابراین

$$\rho(A) = \max_k |\lambda_k| = \max_k |1 - 4s\ sin^2(\frac{k\pi}{2\ M})|$$

چون برای پایداری روش باید $\rho(A) \leq 1$ باشد. با فرض اینکه ماکسیمم مقدار در $k = \tilde{k}$ رخ می دهد، داریم :

$$|1 - 4s\ sin^2(\frac{\tilde{k}\pi}{2M})| \leq 1 \rightarrow \quad -1 \leq 1 - 4s\sin^2(\frac{\tilde{k}\pi}{2M}) \leq 1$$

با استفاده از $\sin^2(\frac{\tilde{k}\pi}{2M}) \leq 1$ داریم :

$$-2 \leq -4s\sin^2(\frac{k^-\pi}{2M}) \leq 0 \rightarrow \ 0 \leq 4s \leq 2 \quad \rightarrow \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2}$$

بنابراین فقط به ازای $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ روش پایدار خواهد بود.

تفاضلات متناهی ضمنی

اگر در معادله گرما u_t با استفاده از عملگر پسرو گسسته سازی شود در این صورت جواب بدست آمده ضمنی یا همان غیر صریح بوده و فرمول آن به صورت زیر می باشد.

$$-su_{i-1}^{n+1} + (1+2s)u_i^{n+1} - su_{i+1}^{n+1} = u_i^n \qquad i = 1, ..., M-1 \ \ , \ \ n = 0, ..., N-1$$

که این روش را $Backward - Time\ Central\ Space$ یا به طور مخفف روش $BTCS$ می نامند. در این روش سه مقدار مجهول و یک مقدار معلوم وجود دارد برای همین، این روش را روش $BTCS(۳,۱)$ نیز می نامند.

ثابت می شود [۲۳] پایداری روش $BTCS(۳,۱)$ نامشروط است ، یعنی برای هر مقدار s این روش پایدار می باشد. بنابراین روش ضمنی بهتر از روش صریح عمل می کند.

روش کرانک نیکلسون [۴]

فرمول روش کرانک نیکلسون برای حل معادله گرما $u_t = \alpha\ u_{xx}$ با توجه به تقریب u_t و u_{xx} بصورت زیر می باشد

$$\frac{u_i^{n+۱} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{۲}\left(\frac{u_{i-۱}^n - ۲u_i^n + u_{i+۱}^n + u_{i-۱}^{n+۱} - ۲u_{i-۱}^{n+۱} + u_{i+۱}^{n+۱}}{(\Delta x)^۲}\right)$$

که به طور خلاصه می توان نوشت

$$-s\ u_{i-۱}^{n+۱} + (۲ + ۲\ s)\ u_i^{n+۱} - s\ u_{i+۱}^{n+۱} = s\ u_{i-۱}^n + (۲ - ۲\ s)\ u_i^n + s\ u_{i+۱}^n$$

$$i = ۱, ..., M - ۱, \quad n = ۰, ..., N - ۱$$

این روش را روش کرانک نیکلسون $(۳,۳)$ نیز نامند ، بدلیل اینکه در هر گام زمانی سه مقدار معلوم و سه مقدار مجهول وجود دارد. اگر این روش را به صورت ماتریسی بنویسیم، خواهیم داشت

$$A\ X^{n+۱} = b$$

که در آن

$$\begin{aligned} X^{n+۱} &= [u_۱^{n+۱}, u_۲^{n+۱}, ..., u_{M-۱}^{n+۱}]^t \\ b &= [b_۱, b_۲, ..., b_{M-۱}]^t \\ b_i &= s\ u_{i-۱}^n + (۲ - ۲\ s)\ u_i^n + s\ u_{i+۱}^n \quad ۲ \leq i \leq M - ۲ \end{aligned}$$

[۴] Crank Niclson