بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر

نیم گروه های فازی (سمارانداچ)

مؤلف:

صغری اثنی عشری

استاد راهنما:

دکتر عباس حسنخانی

شهریور ماه ۱۳۹۱

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: صغری اثنی عشری — امضاء:

استاد راهنما: دکتر عباس حسنخانی — امضاء:

داور اول : — امضاء:

داور دوم: — امضاء:

نماینده تحصیلات تکمیلی: — امضاء:

تقدیم به

تقدیم به مادر و پدرم:

که آفتاب مهرشان در آستانه قلبم، همچنان پابرجاست

و هرگز غروب نخواهد کرد.

تقدیم به همسرم:

دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج است و وجودش برایم همه مهر .

و تقدیم به تمامی عزیزان و دوستانی که تا به امروز، به بهار زندگی ام وسعت بخشیدند ودر قلبم جاودانه اند.

تشکر و قدردانی

سپاس خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را، عشق را

و سپاس از تمام آزاد مردانی که نیک می اندیشند و عقل و منطق را پیشه خود نموده و جز رضای الهی و پیشرفت و سعادت جامعه، هدفی ندارند.

در اینجا لازم می دانم از زحمات استاد گرانقدر جناب آقای دکتر عباس حسنخانی که با سعه صدر همواره راهنما و مشوق من در این دوره بودند کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

در پایان از زحمات همسر گرامی ام که در مقطع ارشد مرا یاری کرد سپاسگزاری می کنم و برایش آرزوی موفقیت روزافزون می نمایم.

چکیده

در این پایان نامه هدف ما مطالعه نیم گروههای فازی (سمارانداچ) است. به این منظور ابتدا مجموعه و گروههای فازی را تعریف و قضایایی برای شناخت بهتر آنها بیان می شود. در ادامه نیم گروههای سمارانداچ، نیم گروههای فازی سمارانداچ و هم مجموعه های چپ و راست فازی و S -زیرنیم گروههای فازی نرمال، S - بخشپذیر، S - خالص و خواص آنها ارائه خواهد شد. سپس قضایایی درباره روابط بین نقاط فازی اثبات می شود و برخی از ویژگی های ضرب آزاد و ضرب روی تراز ماقبل آخر بررسی خواهد شد.

و در پایان $S-(\in,\in\vee q)$ - زیرنیم گروه های نرمال فازی و شبه نرمال فازی معرفی و بعضی قضایای مربوط به آنها اثبات می شود.

مقدمه

در مطالعه مجموعه های فازی، بحث سماراندناچ نقش بسیار مهمی دارند. یک نوآوری قابل ملاحظه ای که اخیرا در علوم جبری اتفاق افتاده است، استفاده از نیم گروه های است که در واقع گروه نیستند اما زیرمجموعه های حداقل دو عضوی دارند که گروه می باشند. در این پایان نامه سعی بر این شده که یک تعریف جامع از نیم گروه های سماراندناچ و کاربردهایش بیان شود. مفهوم سماراندناچ اولین بار توسط کانداسمی [1] در سال ۲۰۰۳ ارائه شد. [۱۰] در این پایان نامه قصد داریم بحث سماراندناچ را روی مقالات اجمل [2]، بهاکات [3] و مالیک [4] پیاده کرده و کلیه ی قضایای آنها را روی نیم گروه های سماراندناچ اثبات کنیم. و مفاهیمی مانند انواع S - نیم گروه های فازی، هم مجموعه های چپ و راست فازی، ضرب بین S - نیم گروه های فازی، $S-(\in,\in\vee q)$ - نیم گروه های نرمال و شبه نرمال فازی را مطرح کنیم.

[1] Vasantha Kandasamy

[2] Ajmal N

[3] Bhakat S.K

[4] Malik D.S

فهرست مطالب

۱ مقدمات و پیش نیازها ۱

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ مجموعه و روابط فازی ۱

۳.۱ زیرگروههای فازی ۶

۴.۱ نیم گروههای سمارانداچ ۱۰

۲ نیم گروههای فازی سمارانداچ، ترکیب و ضرب بین S - زیرنیم گروههای فازی ۱۵

۱.۲ تعاریف و مثالها ۱۵

۲.۲ هم مجموعه های چپ و راست فازی سمارانداچ ۲۰

۳.۲ ترکیب S - زیرنیم گروه های فازی ۴۳

۴.۲ ضرب آزاد و ضرب روی تراز ما قبل آخر ۴۸

۳ $S-(\in,\in\vee q)$ - زیرنیم گروه های فازی ۵۵

۱.۳ $S-(\in,\in\vee q)$ - زیرنیم گروه نرمال فازی ۵۵

۲.۳ $S-(\in,\in\vee q)$ - زیرنیم گروه شبه نرمال فازی ۶۹

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۸۰

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۳

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

۱.۱ مقدمه

در این فصل پیش نیازهای لازم و قضایای مورد نیاز در فصول بعدی اعم از (زیرمجموعه فازی، مجموعه فازی نرمال، رابطه های فازی و...)به طور خلاصه و بدون اثبات ارائه می شوند. برای درک بیشتر و بهتر مفاهیم و قضایا می توانید به [۹] و [۱۰] مراجعه کنید.

۲.۱ مجموعه و روابط فازی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم Xمجموعه ای ناتهی باشد. به تابع $\mu : X \longrightarrow [0, 1]$ زیرمجموعه (مجموعه)فازی X گفته می شود.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم $0 < t \leq 1$ و $x \in X$ باشد. در این صورت به تابعی که مقدار آن در نقطه x برابر t و در سایر نقاط صفر باشد، نقطه فازی گفته می شود و آن را با x_t نشان می دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم μ زیرمجموعه فازی از X باشد. در این صورت تابع $\mu^c : X \longrightarrow [0, 1]$ با ضابطه $\mu^c(x) = 1 - \mu(x)$ را متمم μ می نامیم.

تعریف ۴.۲.۱. تابع ثابت با ضابطه $\mu(x) = 0$ برای هر $x \in X$ را مجموعه فازی تهی نامیده و آنرا با Φ_X نشان می دهیم.

تعریف ۵.۲.۱. تابع ثابت با ضابطه $\mu(x) = 1$ برای هر $x \in X$ را مجموعه فازی عام می نامیم و آنرا با 1_X نشان می دهیم. به وضوح $\Phi_X^c = 1_X$.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم μ زیرمجموعه فازی X و $t \in [0, 1]$ باشد. در این صورت به مجموعه $\mu_t = \{x \in X | \mu(x) \geq t\}$، t - تراز μ و به مجموعه $\mu_t^> = \{x \in X | \mu(x) > t\}$، t - تراز قوی μ گفته می شود.

بوضوح $\mu_t^> \subseteq \mu_t$.

مثال ۷.۲.۱. فرض کنیم A زیرمجموعه ناتهی از X باشد.در این صورت تابع مشخصه روی A، زیرمجموعه ای فازی از X است. اگر $A^c = X - A$ آنگاه$\chi_{A^c} = \chi_A^c$. همچنین برای هر $0 < t \leq 1$ داریم $(\chi_A)_t = A$.

اگر $A = \{x\}$ آنگاه χ_A همان نقطه فازی x_1 است.

مثال ۸.۲.۱. تابع $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1]$ با ضابطه $\mu(n) = \frac{1}{n}$ یک زیرمجموعه فازی $\mathbb{N}$ است. برای هر $0 < t \leq 1$ ، μ_t مجموعه ای متناهی است.

تعریف ۹.۲.۱. زیرمجموعه های فازی μ و λ از X را مجزا نامیم هرگاه برای هر $x \in X$، $\mu(x) \neq \lambda(x)$.

قضیه ۱۰.۲.۱. *فرض کنیم μ زیرمجموعه فازی X باشد. در این صورت μ و μ^c مجزا هستند اگروتنهااگر برای هر $x \in X$، $\mu(x) \neq \frac{1}{2}$.*

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم μ و λ زیرمجموعه های فازی X باشند. گوییم $\lambda \subseteq \mu$ هرگاه برای هر $x \in X$، $\lambda(x) \leq \mu(x)$باشد و $\mu = \lambda$ هرگاه برای هر $x \in X$، $\mu(x) = \lambda(x)$.

مثال ۱۲.۲.۱. فرض کنیم A و B زیرمجموعه هایی از X باشند. در این صورت $\chi_A \subseteq \chi_B$ اگروتنهااگر $A \subseteq B$.

تعریف ۱.۲.۱۳. فرض کنیم μ و λ زیرمجموعه های فازی X باشند. در این صورت اجتماع و اشتراک μ وλ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(\mu \cup \lambda)(x) = max\,\{\mu(x), \lambda(x)\} \qquad \forall x \in X$$

$$(\mu \cap \lambda)(x) = min\,\{\mu(x), \lambda(x)\} \qquad \forall x \in X$$

به وضوح $\mu, \lambda \subseteq \mu \cup \lambda$ و همچنین $\mu \cap \lambda \subseteq \mu, \lambda$.

مثال ۱.۲.۱۴. اگر A و B زیرمجموعه هایی از X باشند، آنگاه:

$$\chi_A \cup \chi_B = \chi_{A\cup B} \qquad , \qquad \chi_A \cap \chi_B = \chi_{A\cap B}$$

قضیه ۱.۲.۱۵. *فرض کنیم μ و λ زیرمجموعه های فازی X باشند. در این صورت μ و λ مجزا هستند اگروتنهااگر برای هر $x \in X$، $(\mu \cup \lambda)(x) \neq (\mu \cap \lambda)(x)$.*

ملاحظه ۱.۲.۱۶ . با توجه به اینکه برای هر زیرمجموعه فازی μ از X، $Im\mu \subseteq [۰, ۱]$ است لذا سوپریمم و اینفیمم زیرمجموعه های فازی موجود و در بازه $[۰, ۱]$ می باشند.

تعریف ۱.۲.۱۷. زیرمجموعه فازی μ از X را نرمال گوییم هرگاه $sup\mu = ۱$. و آنرا نرمال شده گوییم هرگاه x ی در X باشد که $\mu(x) = ۱$.

مثال ۱.۲.۱۸. اگر A زیرمجموعه ناتهی از X باشد، در این صورت χ_A مجموعه فازی نرمال شده است.

واضح است که هر مجموعه فازی نرمال شده، نرمال نیز هست ولی عکس این مطلب درست نیست. مثال زیر بیانگر این موضوع است:

مثال ۱.۲.۱۹. تابع $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow [۰, ۱]$ با ضابطه $\mu(n) = \frac{n-۱}{n}$ یک مجموعه فازی نرمال است، در حالی که نرمال شده نیست.

تعریف ۱.۲.۲۰. فرض کنیم μ زیرمجموعه فازی X باشد. به مجموعه $\{x \in X | \mu(x) > ۰\}$ تکیه گاه X میگوییم و آنرا با $supp\mu$ نشان می دهیم. در واقع $supp\mu = \mu_۰^>$.

تعریف ۲۱.۲.۱. اگر μ زیرمجموعه فازی X باشد. به سوپریمم μ، ارتفاع μ گوییم و آنرا با $h(\mu)$ نشان می دهیم.

$$h(\mu) = sup\mu(x)$$

تعریف ۲۲.۲.۱. به مجموعه تمام زیرمجموعه های فازی X، مجموعه توانی فازی X گفته و آنرا با $F(X)$ نشان می دهیم. پس

$$F(X) = \{\mu \big| \mu : X \longrightarrow [۰, ۱]\}$$

تعریف ۲۳.۲.۱. می گوییم زیرمجموعه فازی μ از X دارای خاصیت کوچکترین کران بالاست هرگاه برای هر زیرمجموعه A از X، عضوی از A مثل $x_۰$ باشد که

$$\mu(x_۰) = sup\left\{\mu(x) \big| x \in A\right\}.$$

مثال ۲۴.۲.۱. هر تابع مشخصه ای دارای خاصیت کوچکترین کران بالاست.

مثال ۲۵.۲.۱. فرض کنیم تابع $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow [۰, ۱]$ با ضابطه $\mu(n) = \frac{۱}{n}$ باشد. در این صورت μ زیرمجموعه فازی $\mathbb{N}$ با خاصیت کوچکترین کران بالاست. زیرا هر زیرمجموعه از $\mathbb{N}$ دارای کوچکترین عضو است.

ملاحظه ۲۶.۲.۱ . مثال۱۹.۲.۱ زیرمجموعه ای فازی است که دارای خاصیت کوچکترین کران بالا نمی باشد.

تعریف ۲۷.۲.۱. فرض کنیم $f : X \rightarrow Y$ یک تابع باشد. برای زیرمجموعه فازی μ از Y و برای زیرمجموعه فازی λ از X تعریف می کنیم:

$$(f^{-۱}(\mu))(x) = \mu(f(x)) \qquad \forall x \in X$$

$$(f(\lambda))(y) = \begin{cases} sup\lambda(x) & \text{اگر } x \text{ ی در} X \text{ باشد که: } f(x) = y \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در اینجا مفاهیم اشتراک و اجتماع دو زیرمجموعه فازی را به خانواده ای از زیرمجموعه های

فازی یک مجموعه تعمیم می دهیم:

تعریف ۲۸.۲.۱. فرض کنیم $\{\mu_i\}_{i\in I}$ خانواده دلخواهی از زیرمجموعه های فازی X باشد. در این صورت:

$$(\bigcap_i \mu_i)(x) = \inf_{i\in I} \mu_i(x) \qquad \forall x \in X$$

$$(\bigcup_i \mu_i)(x) = \sup_{i\in I} \mu_i(x) \qquad \forall x \in X$$

باید توجه داشت که $\bigcap_i \mu_i$ بزرگترین زیرمجموعه فازی مشمول درهر μ_i است و $\bigcup_i \mu_i$ کوچکترین زیرمجموعه فازی شامل هر μ_i است.

قضیه ۲۹.۲.۱. *اگر μ و $\{\mu_i\}_{i\in I}$ زیرمجموعه های فازی X باشند، آنگاه:*

۱. $\mu \cup [\bigcap_i \mu_i] = \bigcap_i (\mu \cup \mu_i)$

۲. $\mu \cap [\bigcup_i \mu_i] = \bigcup_i (\mu \cap \mu_i)$

۳. $[\bigcup_i \mu_i]^c = \bigcap_i \mu_i^c$

۴. $[\bigcap_i \mu_i]^c = \bigcup_i \mu_i^c$

قضیه ۳۰.۲.۱. *فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد. در این صورت:*

۱. *برای هر زیرمجموعه فازی λ از Y،* $f^{-1}(\lambda^c) = (f^{-1}(\lambda))^c$

۲. *برای هر زیرمجموعه فازی μ از X، اگر f پوشا باشد آنگاه* $(f(\mu))^c \subseteq f(\mu^c)$

۳. *اگر μ_1 و μ_2 زیرمجموعه های فازی X بوده و $\mu_1 \subseteq \mu_2$ آنگاه* $f(\mu_1) \subseteq f(\mu_2)$

۴. *اگر λ_1 و λ_2 زیرمجموعه های فازی Y بوده و $\lambda_1 \subseteq \lambda_2$ آنگاه* $f^{-1}(\lambda_1) \subseteq f^{-1}(\lambda_2)$

۵. *برای هر زیرمجموعه فازی λ از Y،* $f(f^{-1}(\lambda)) \subset \lambda$

۶. *برای هر زیرمجموعه فازی μ از X،* $\mu \subseteq f^{-1}(f(\mu))$

۷. *برای هر تابع* $g : Y \to Z$ *و هر زیرمجموعه فازی* η *از* Z *:*

$$(gof)^{-1}(\eta) = f^{-1}(g^{-1}(\eta)).$$

قضیه ۳۱.۲.۱. *فرض کنیم* $f : X \longrightarrow Y$ *یک تابع باشد و* μ *و* $\{\mu_i\}_{i\in I}$ *زیرمجموعه های فازی* X *و* λ*،* $\{\lambda_j\}_{j\in I}$ *زیرمجموعه های فازی* Y *باشند. در این صورت:*

۱. *اگر* f *پوشا باشد آنگاه* $f(f^{-1}(\lambda)) = \lambda$

۲. $f(\bigcap_i \mu_i) \subseteq \bigcap_i f(\mu_i)$

۳. $f^{-1}(\bigcap_j \lambda_j) = \bigcap_j f^{-1}(\lambda_j)$

۴. $f(\bigcup_i \mu_i) = \bigcup_i f(\mu_i)$

۵. $f^{-1}(\bigcup_j \lambda_j) = \bigcup_j f^{-1}(\lambda_j)$

۶. $f(f^{-1}(\lambda) \cap \mu) = \lambda \cap f(\mu)$

با توجه به اینکه یک زیرمجموعه فازی تابعی است که برد آن زیرمجموعه ای از بازه $[0, 1]$ است و یکی از بارزترین ویژگی های برد این تابع مشبکه بودن آن است لذا اگر به جای بازه $[0, 1]$ هر مشبکه دیگری قرار گیرد، بسیاری از خواص مجموعه های فازی حفظ خواهند شد و این روند به تعریف زیرمجموعه های L - فازی منجر خواهد گردید. که در این پایان نامه فقط به زیرمجموعه های فازی در بازه $[0, 1]$ می پردازیم.

۳.۱ زیرگروههای فازی

در این بخش زیرگروههای فازی یک گروه را مورد مطالعه قرار می دهیم. در تمام این بخش G یک گروه و e عنصر همانی آن است.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم G یک گروه و μ زیرمجموعه فازی آن باشد. μ را نیم گروه فازی G می نامیم هرگاه:

$$\mu(xy) \geq min\,\{\mu(x), \mu(y)\} \qquad \forall x, y \in G$$

و μ را زیرگروه فازی G می نامیم هرگاه علاوه بر شرط فوق داشته باشیم:

$$\mu(x^{-1}) = \mu(x) \qquad \forall x \in G.$$

مثال ۲.۳.۱. هر تابع ثابت از G به $[0, 1]$ یک زیرگروه فازی G است.

تعریف ۳.۳.۱. یک زیرگروه فازی را ناسره گوییم هرگاه ثابت باشد. در غیر این صورت آنرا سره می نامیم.

قضیه ۴.۳.۱. *اگر μ زیرگروه فازی G باشد آنگاه برای هر $x \in G$ داریم: $\mu(e) \geq \mu(x)$.*

قضیه ۵.۳.۱. *زیرمجموعه فازی μ از G یک زیرگروه فازی G است اگروتنهااگر برای هر $x, y \in G$، $\mu(xy^{-1}) \geq min\,\{\mu(x), \mu(y)\}$.*

قضیه زیر محک مناسبی است برای تعیین اینکه کدام زیرمجموعه های فازی یک گروه، زیرگروه فازی آن می باشند.

قضیه ۶.۳.۱. *فرض کنیم μ زیرمجموعه فازی گروه G باشد. در این صورت μ زیرگروه فازی G است اگروتنهااگر برای هر $t \in [0, \mu(e)]$ ، μ_t زیرگروه G باشد.*

تعریف ۷.۳.۱. زیرگروه فازی μ از G را نرمال نامیم هرگاه برای هر $x, y \in G$ داشته باشیم: $\mu(x) = \mu(yxy^{-1})$.

قضیه ۸.۳.۱. *زیرگروه فازی μ از G را نرمال است اگروتنهااگر برای هر $a, b \in G$، $\mu(ab) = \mu(ba)$.*

قضیه ۹.۳.۱. *فرض کنیم μ زیرگروه فازی G بوده و $x \in G$. دراین صورت برای هر $y \in G$، $\mu(xy) = \mu(y)$ اگروتنهااگر $\mu(x) = \mu(e)$.*

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنیم μ زیرگروه فازی G بوده و $a \in G$ تابع $a\mu$ تعریف شده با ضابطه $(a\mu)(x) = \mu(a^{-1}x)$ برای هر $x \in G$، را هم مجموعه فازی G القا شده با a و μ می نامیم.

قضیه ۱۱.۳.۱. *فرض کنیم μ زیرگروه فازی G بوده و $x \in G$. در این صورت برای هر $t \in [0, 1]$،*

$$x(\mu_t) = (x\mu)_t.$$

تعریف ۱۲.۳.۱. فرض کنیم μ زیرگروه فازی G و $a, b \in G$ باشند. تعریف می کنیم :

$$(a\mu b)(x) = \mu(a^{-1}xb^{-1}) \qquad \forall x \in G.$$

$a\mu b$ را هم مجموعه میانی فازی μ می نامیم.

قضیه ۱۳.۳.۱. *اگر μ زیرگروه فازی G بوده و $a \in G$ آنگاه هم مجموعه میانی فازی $a\mu a^{-1}$ نیز زیرگروه فازی G است.*

اگر گروه G آبلی باشد آنگاه $a\mu a^{-1} = \mu$. ولی عکس این مطلب درست نیست. مثال بعد نشانگر این موضوع است:

مثال ۱۴.۳.۱. زیرمجموعه μ از S_3 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0/7 & x = e \\ 0/5 & x = (123), x = (132) \\ 0/1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بوضوح μ زیرگروه فازی S_3 است(همه t - ترازهای آن زیرگروههای S_3 می باشند.)از طرفی براحتی قابل بررسی است که برای هر$a \in S_3$، $a\mu a^{-1} = \mu$. در حالی که S_3 آبلی نیست.

مثال زیر نشان می دهد که در حالت کلی هم مجموعه میانی فازی یک زیرگروه فازی، زیرگروهی فازی نیست:

مثال ۱۵.۳.۱. گروه $G = \{۱, -۱, i, -i\}$ را با ضرب معمولی در نظر می گیریم و تعریف می کنیم:

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱ \\ ۰/۵ & x = -۱ \\ ۰ & x = +i, -i \end{cases}$$

بوضوح μ زیرگروه فازی G است. حال برای $a = -۱$ و $b = -i$ داریم:

$$(a\mu b)(x) = \begin{cases} ۰ & x = +۱, -۱ \\ ۰/۵ & x = -i \\ ۱ & x = i \end{cases}$$

$(a\mu b)_{۰/۷} = \{i\}$ ولذا طبق قضیه ۶.۳.۱، $a\mu b$ زیرگروه فازی G نیست.

۴.۱ نیم گروههای سماراندا‌چ

مفهوم نیم گروههای سماراندا‌چ در سال ۱۹۹۸ بوسیله پادیلا رائول (Raul Padilla) در مقاله ای با عنوان ساختارهای جبری سماراندا‌چ معرفی گردید. به طور خلاصه میتوان گفت که یک ساختار جبری سماراندا‌چ ساختاری است که زیر ساختار کامل تری دارد.

تعریف ۱.۴.۱. یک نیم گروه سماراندا‌چ، نیم گروهی است مانند S، که گروه نیست ولی دارای زیرمجموعه ای حداقل دو عضوی است که با همان عمل S، گروه است.

از این به بعد نیم گروه سماراندا‌چ را به طور خلاصه با S - نیم گروه نشان می دهیم.

مثال ۲.۴.۱. فرض کنیم $S(۳)$ مجموعه تمام توابع از $\{۱, ۲, ۳\}$ به خودش باشد. $S(۳)$ همراه با عمل ترکیب نیم گروه است و گروه متقارن $S_۳$ زیرمجموعه اکید آن است. لذا $S(۳)$ یک S - نیم گروه است.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنیم S یک S - نیم گروه باشد. اگر هر زیرمجموعه S که گروه است جابجایی باشد می گوییم که S یک نیم گروه سماراندا‌چ جابجایی است.

باید توجه داشته باشیم که ممکن است نیم گروه سماراندا‌چ جابجایی S، خودش جابجایی نباشد. مثال زیر بیانگر این موضوع است:

مثال ۴.۴.۱. فرض کنیم $S(۲)$ مجموعه تمام توابع از $\{۱, ۲\}$ به خودش باشد. $S(۲)$ همراه با عمل ترکیب نیم گروهی ناجابجایی است. (چون اگر f و g به ترتیب توابع ثابت ۱ و ۲ باشند آنگاه $fog \neq gof$). ولی زیرمجموعه های آن که گروه هستند همگی جابجایی اند. لذا $S(۲)$ یک نیم گروه سماراندا‌چ جابجایی است که خودش جابجایی نیست.

تعریف ۵.۴.۱. فرض کنیم S یک S - نیم گروه باشد. اگر حداقل یک زیرمجموعه حداقل دوعضوی S، گروهی جابجایی باشد آنگاه S را نیم گروه سماراندا‌چ جابجایی ضعیف می نامیم.

تعریف ۶.۴.۱. فرض کنیم S یک S - نیم گروه باشد. اگر هر زیرمجموعه S که گروه است دوری باشد می گوییم که S یک نیم گروه سماراندا‌چ دوری است.

واضح است که یک S - نیم گروه دوری، S - نیم گروهی جابجایی است.

تعریف ۷.۴.۱. فرض کنیم S یکS - نیم گروه باشد. اگر حداقل یک زیرمجموعه حداقل دوعضوی S، گروهی دوری باشد آنگاه S را نیم گروه سمارانداچ دوری ضعیف می نامیم.

مثال ۸.۴.۱. مجموعه $\mathbb{Z}_6 = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\right\}$ همراه با عمل ضرب به پیمانه ۶، یک S - نیم گروه دوری است زیرا زیرمجموعه های حداقل دوعضوی آن H_1 و H_2 هستند که گروهند و توسط جداول زیر مشخص شده اند و هر دو آنها دوری اند:

×	۱	۵
۱	۱	۵
۵	۵	۱

جدول ۱.۱: $H_1 =< 5 >$

×	۲	۴
۲	۴	۲
۴	۲	۴

جدول ۲.۱: $H_2 =< 2 >$

ضمنا قابل توجه است که در H_1 عدد یک عنصر همانی است و در H_2 عدد ۴.

مثال ۹.۴.۱. فرض کنیم $\mathbb{Z}_{12} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{11}\right\}$ نیم گروه با عمل ضرب به پیمانه ۱۲ باشد. زیرمجموعه های غیر تک عضوی $\mathbb{Z}_{12}$ که تشکیل گروه می دهند در جدولهای زیر مشخص شده اند:

دیده می شود H_1 و H_2 و H_3 و H_4 و H_5 همگی دوری اند ولی H_6 دوری نیست. بنابراین $\mathbb{Z}_{12}$ همراه با ضرب به پیمانه ۱۲ یک S - نیم گروه دوری ضعیف است.

×	۱	۵
۱	۱	۵
۵	۵	۱

جدول ۳.۱: $H_1 =< 5 >$

×	۱	۷
۱	۱	۷
۷	۷	۱

جدول ۴.۱: $H_2 =< 7 >$

×	۱	۱۱
۱	۱	۱۱
۱۱	۱۱	۱

جدول ۵.۱: $H_3 =< 11 >$

×	۴	۸
۴	۴	۸
۸	۸	۴

جدول ۶.۱: $H_4 =< 8 >$

×	۹	۳
۹	۹	۳
۳	۳	۹

جدول ۷.۱: $H_5 =< 3 >$