بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

نمودهایی از انتگرال‌گیری عددی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

محمد صادق حبری

استاد راهنما: دکتر جمال روئین

استاد مشاور: دکتر حسن داداشی

آذر ۱۳۸۹

تقدیم به مهربان‌ترین‌های زندگی

پدر و مادرم

قدردانی و تشکر

با سپاس از پروردگار به خاطر نعمت دانشی که در طول این دوره و دوره‌های قبل مرا از آن بهره‌مند گردانید. آن وجود بی‌همتا که تمام دانش نزد اوست و به هر که بخواهد و هر قدر که بخواهد ارزانی می‌دارد.

با تشکر فراوان از پدر و مادر مهربانم و به پاس زحمات ایشان این مجموعه را تقدیم آن دو بزرگ می‌نمایم.

از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر رویین که بهره‌مند از راهنمایی‌ها و دانش ایشان بوده‌ام کمال تشکر را دارم. از اساتید بخش ریاضی که از گنجینه دانش ایشان نیز بهره برده‌ام، قدردانی می‌نمایم.

از آقای مهدی حسنی که در استفاده بهینه از نرم افزارهای ریاضی به من کمک و راهنمایی نمودند کمال تشکر را دارم. از دوستان خوبم که لحظات و خاطرات فراموش نشدنی این دوره را آفریدند متشکرم و آرزوی موفقیت برای آنان دارم.

در پایان از این همه نعمت که پروردگار آشکار و پنهان در اختیار من قرار داده ممنونم.

چکیده

هدف اصلی این پایان نامه بررسی برخی روش‌های انتگرال‌گیری عددی همچون روش انتگرال‌گیری سیمپسون، روش ذوزنقه‌ای و روش نقطه میانی می‌باشد. در این راستا کران‌های مناسبی برای تقریب انتگرال تابع f بر بازه $[a,b]$ که به کمک روش‌های فوق الذکر به دست آمده‌اند ارائه نموده و نیز تابعک چبیشف و کران‌های مربوط به آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

در ادامه با ارائه تعاریف و قضایای مناسب به معرفی مفاهیم و روش‌های مورد نیاز پرداخته و با مثال‌هایی روش‌های مورد بحث را با هم مقایسه می‌کنیم. سپس قضایا و لم‌های مرتبط با روش‌های ذوزنقه‌ای و سمپسون را ارائه نموده و تابعک چبیشف و کران‌های جدید آن را به دست می آوریم.

در پایان نامساوی‌های نوع سیمپسون جدیدی را برای توابع $(\alpha, m)-$محدب به دست می آوریم. قضیه‌ها و لم‌های فصل چهارم به نوعی تعمیم قضایا و لم‌های معرفی شده در فصل اول برای نوع دیگری از توابع محدب به نام $s-$محدب می‌باشند.

فهرست

مقدمه

نخستین مساله تربیع مربوط به تربیع دایره می‌باشد که اولین نشانه مشخص از تقریب عدد π را در پاپیروس احمس [۱](ح ۱۵۵۰ پ م) می‌توان یافت. بقراط خیوسی[۲] (حدود ۴۶۰ پ م) اولین کسی بود که توانست یک شکل منحنی را واقعاً تربیع کند [۲۹].

دستاورد مهم بعدی در این حوزه از آن ارشمیدس[۳] (ح ۲۲۵ پ م) می‌باشد که پس از روزگار ارشمیدس نیز تقریب رضایت بخشی برای عدد π شناخته می‌شد[۲۹].

محاسبه تقریبی یک انتگرال به کمک روش‌های عددی به انتگرال‌گیری عددی معروف شده است. محاسبه عددی یک انتگرال را گاهی تربیع [۴] می‌نامند. آبرهیوبر[۵] و کرومر[۶] در [۳۲] و [۱۷] (۱۹۹۷ و ۱۹۹۸) واژه تربیع را برای محاسبه عددی انتگرال یگانه و واژه مکعب سازی[۷] را برای انتگرال‌های چندگانه به کار بردند.

فصل اول پایان نامه حاضر را به بیان تعاریف و قضایای اولیه و بنیادی آنالیز ریاضی و آنالیز حقیقی از مراجع [۲۴] و [۲۵] و [۳] و تحدب از مراجع [۲۳] و [۵] و مثال‌هایی از مرجع [۳۳] اختصاص داده‌ایم.

فصل دوم برگرفته از مرجع [۸] می‌باشد، که به تقریب انتگرال ریمان اشتیلیس می‌پردازد. در بخش اول با تعریف تابع ψ_g خطای روش ذوزنقه‌ای تعمیم یافته را به صورت یک انتگرال یگانه نمایش می‌دهیم. در بخش دوم کران‌هایی برای خطای روش ذکر شده در این فصل ارائه می‌کنیم. در بخش سوم انتگرال‌های ریمان وزن‌دار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فصل سوم به معرفی و بحث در مورد تابعک چبیشف اختصاص داده شده است، که با ارائه اتحادهایی کلیدی، کران‌هایی دقیق‌تر برای تابعک چبیشف ارائه می‌کند. در بخش اول این فصل با استفاده از لم‌های مورد نیاز از فصل اول، اتحادهایی برای تابعک چبیشف به دست می‌آوریم.

---

[۱] Ahmes Papyrus
[۲] Hippocrates Khyvsy
[۳] Archimedes
[۴] Quadrature
[۵] Ueberhuber
[۶] Krommer
[۷] Cubature

در بخش دوم به کاربردهایی که این تابعک و اتحادهای به دست آمده در بخش قبل در استنتاج سایر قضایا و لم‌ها دارند می‌پردازیم.

در فصل چهارم که آخرین فصل این پایان نامه می‌باشد به تعمیم قضایا و نتایج مراجع [۲۷] و [۲۶] که در خصوص نامساوی‌های انتگرالی نوع سیمپسون برای توابع s–محدب و محدب بیان شده‌اند، برای توابع (α, m)–محدب می‌پردازیم.

این فصل شامل نتایج جدید به دست آمده توسط مولف می‌باشد، که در دو بخش ارئه گردیده است. محاسبات مربوط به این فصل با استفاده از نرم افزار میپل [۸] انجام شده است. کران‌های جدید ارائه شده در قضایا و نتایج این فصل به صورت حدس با کمک نرم افزار و سپس اثبات مستقیم به دست آمده‌اند.

سایر مراجع عنوان شده در این پایان نامه نیز به طور مستقیم یا غیر مستقیم در اثبات قضایا و نتایج به دست آمده مورد استفاده بوده‌اند.

[۸] Maple software

فصل اول

مفاهیم وتعاریف بنیادی

هدف این فصل بیان تعاریف و قضایایی از مراجع [۳۳]، [٦]، [۳۰]، [۳]، [۲۴]، [۸] است که در فصل‌های آینده از آنها استفاده خواهیم کرد. همچنین با ارائه مثال‌هایی به معرفی برخی روش‌های انتگرال‌گیری عددی می‌پردازیم.

۱.۱ تعاریف و قضیه‌های مقدماتی

ابتدا به تعریف انتگرال ریمان اشتیلیس و توابع با تغییر کراندار و توابع لیپ شیتس می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ یک افراز $[a, b]$ و t_k نقطه‌ای در زیر بازه‌ی $[x_{k-1}, x_k]$ باشد. هر مجموع به شکل:

$$S(p, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k,$$

را یک مجموع ریمان اشتیلس f بر حسب α می‌نامیم. گوییم f بر حسب α بر $[a, b]$ انتگرال ریمان دارد در صورتی که عددی مانند A با این خاصیت وجود داشته باشد:

به ازای هر $\varepsilon > 0$، یک افراز $[a,b]$ مانند P_ε باشد به قسمی که به ازای هر افراز P ظریفتر از P_ε و هر انتخاب نقطه‌های t_k در $[x_{k-1},x_k]$ داشته باشیم $\left|S(P,f,\alpha) - A\right| < \varepsilon$. در این صورت می‌نویسیم $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$.

همچنین اگر $\alpha(x) = x$ آنگاه انتگرال ریمان اشتیلس به انتگرال ریمان تحویل می‌یابد.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم تابع f بر $[a,b]$ تعریف شده باشد. اگر $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ یک افراز $[a,b]$ باشد به ازای $k = 1,2\dots,n$ می‌نویسیم:

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}),$$

هرگاه عدد مثبتی مانند M وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر افراز $[a,b]$،

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| \leq M,$$

آنگاه گوییم f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است.

تعریف ۳.۱.۱ گوییم تابع f در شرط لیپ شیتس از مرتبه‌ی α صدق می‌کند وقتی که عددی مثبت مانند M و گویی یک بعدی چون $B(c)$ وجود داشته باشد به قسمی که هر گاه $x \in B(c)$ و $x \neq c$، آنگاه:

$$|f(x) - f(c)| < M|x-c|^\alpha,$$

تمرین. فرض کنید f تابعی باشد که در شرط لیپ شیتس از مرتبه‌ی α در نقطه‌ی c صدق کند. اگر $\alpha > 0$، f در c پیوسته است و اگر $\alpha > 1$، f در c مشتق دارد.

برهان. به تمرین ۱ فصل ۵ در مرجع [۳] مراجعه کنید. □

قضیه ۴.۱.۱ هرگاه f بر $[a,b]$ پیوسته و α بر این بازه با تغییر کراندار باشد، آنگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$.

برهان. به قضیه ۲۷ فصل ۷ از مرجع [۳] رجوع نمایید. □

لم ۵.۱.۱ با مفروضات قضیه‌ی فوق در مورد $\int_a^b f d\alpha$ می‌توان نوشت:

$$\left|\int_a^b f(t)d\alpha(t)\right| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \bigvee_a^b(\alpha)$$

که نماد $\bigvee_a^b(u)$ به معنی تغییر کل تابع u بر بازه $[a,b]$ می‌باشد.

برهان. فرض کنید $P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ افراز د لخواهی برای بازه‌ی $[a,b]$ باشد، که $\| P \| \to 0$ ، وقتی $n \to \infty$، با $\| P \| = \sup_{x\in\{1,2,\ldots,n\}} |x_i - x_{i-1}|$. حال اگر $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته و α بر این بازه با تغییر کراندار باشد داریم:

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha(x)\right| = \left|\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)]\right|$$

$$\leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \sup_{P\in P[a,b]} \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)|$$

$$\leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \bigvee_a^b(\alpha)$$

□

لم ۶.۱.۱ اگر α تابعی L–لیپ–شیتس و f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آنگاه $f \in R(\alpha)$.

برهان. به منظور اثبات اینکه $f \in R(\alpha)$ به بررسی شرط ریمان می‌پردازیم. مجموع ریمان بالایی و پایینی را تشکیل می‌دهیم و داریم:

$$U(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i \qquad M_i = \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$$

$$L(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i \qquad m_i = \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$$

$$
\begin{aligned}
|U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)| &= \left|\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta\alpha_i\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n}|M_i-m_i|\,|\Delta\alpha_i| \\
&\le \sum_{i=1}^{n}|M_i-m_i|\,L|x_i-x_{i-1}| \\
&\le L\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i \\
&\le L\varepsilon
\end{aligned}
$$

در نتیجه $f\in R(\alpha)$ $\square$

لم ۷.۱.۱ برای تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ اگر f' بر $(0,1)$ پیوسته و $f'\in L_1[0,1]$ آنگاه $f'_+(0)$ و $f'_-(1)$ موجودند و لذا f محدود می‌باشد.

برهان. تابع F را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$F(x)=\int_0^x f'(t)dt \qquad (0\le x\le 1)$$

چون f' انتگرال پذیر است، پس F پیوسته است.

چون در هر نقطه‌ی $x\in(0,1)$، f' موجود است لذا بنابه قضیه‌ی ۲۱ فصل هفتم مرجع [۲۴] داریم:

$$f(x)-f(\tfrac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{x} f'(t)dt(0<x<1)$$

$$F(x)-F(\tfrac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{x} f'(t)dt(0\le x\le 1)$$

$$\Rightarrow F(x)-F(\tfrac{1}{2})=f(x)-f(\tfrac{1}{2})\,, \qquad (0<x<1)$$

$$\Rightarrow f(x)=F(x)+f(\tfrac{1}{2})-F(\tfrac{1}{2})\,, \qquad (0<x<1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=F(0)+f(\tfrac{1}{2})-F(\tfrac{1}{2})=f(\tfrac{1}{2})-F(\tfrac{1}{2})$$

$f(\frac{1}{2}) - F(\frac{1}{2})$ موجود است پس $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ نیز موجود و متناهی می‌باشد.

همچنین داریم:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = F(1) + f(\frac{1}{2}) - F(\frac{1}{2})$$

چون $F(1) + f(\frac{1}{2}) - F(\frac{1}{2})$ موجود و متناهی است پس $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ نیز وجود دارد. $\square$

لم ۸.۱.۱ اگر تابع $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ پیوسته و $f \in R(\alpha)$، α در هرنقطه به غیر از نقطه‌ی x دارای مشتق پیوسته باشد، در این صورت $f\alpha' \in R$ وداریم:

$$\int_a^b f\alpha^{'} dx = \int_a^b f d\alpha + f(x)(\alpha(x+) - \alpha(x-))$$

که $\alpha(x+)$ و $\alpha(x-)$ به معنی حد راست و چپ تابع α در نقطه‌ی x می‌باشد.

برهان. به ازای افراز $p : x_0 = a < x_1 < \ldots < x_k = x < x_{k+1} < \ldots < x_n = b$ که حاوی نقطه‌ی x هست مجموع ریمان و ریمان—اشتیلس زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$S(p, f\alpha') = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\alpha'(t_i)\Delta x_i$$

$$S(p, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i$$

با تشکیل تفاضل این دو مجموع و با فرض اینکه t_k ما بین x_{k-1} و x_k باشد و با کمک قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$
\begin{aligned}
&S(p,f,\alpha)-S(p,f\alpha') \\
&\quad=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\left[\alpha'(t_i)\Delta x_i-\Delta\alpha_i\right] \\
&\quad=\sum_{i=1}^{k-1} f(t_i)\left[\alpha'(t_i)\Delta x_i-\Delta\alpha_i\right]+f(t_k)\left[\alpha'(t_k)\Delta x_k-\Delta\alpha_k\right] \\
&\qquad\qquad+f(t_{k+1})\left[\alpha'(t_{k+1})\Delta x_{k+1}-\Delta\alpha_{k+1}\right]+\sum_{i=k+1}^{n} f(t_i)\left[\alpha'(t_i)\Delta x_i-\Delta\alpha_i\right] \\
&\quad=\sum_{i=1}^{k-1} f(t_i)\left[\alpha'(t_i)-\alpha'(\nu_i)\right]\Delta x_i+f(t_k)\left[\alpha'(t_k)\Delta x_k-\Delta\alpha_k\right] \\
&\qquad\qquad+f(t_{k+1})\left[\alpha'(t_{k+1})\Delta x_{k+1}-\Delta\alpha_{k+1}\right]+\sum_{i=k+1}^{n} f(t_i)\left[\alpha'(t_i)-\alpha'(\nu_i)\right]\Delta x_i \\
&\quad=\sum_{i\neq k,k+1} f(t_i)\left[\alpha'(t_i)-\alpha'(\nu_i)\right]\Delta x_i+f(t_k)\alpha'(t_k)\Delta x_k+f(t_{k+1})\alpha'(t_{k+1})\Delta x_{k+1} \\
&\qquad\qquad-f(t_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]-f(t_{k+1})[\alpha(x_{k+1})-\alpha(x_k)]
\end{aligned}
$$

با اضافه کردن عبارت $f(x)[\alpha(x+)-\alpha(x-)]$ به طرفین رابطه‌ی فوق و قدر مطق گرفتن خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&|S(p,f,\alpha)-S(p,f\alpha')+f(x)[\alpha(x+)-\alpha(x-)]| \\
&\quad\leq\sum_{i\neq k,k+1}|f(t_i)|\,|[\alpha'(t_i)-\alpha'(\nu_i)]|\,\Delta x_i \\
&\qquad+|f(x)[\alpha(x+)-\alpha(x-)]-f(t_k)[\alpha(x)-\alpha(x_{k-1})]-f(t_{k+1})[\alpha(x_{k+1})-\alpha(x)]| \\
&\qquad\qquad+\ |f(t_k)|\,|\alpha'(t_k)|\,\Delta x_k+|f(t_{k+1})|\,|\alpha'(t_{k+1})|\,\Delta x_{k+1} \\
&\quad\leq\sum_{i\neq k,k+1}|f(t_i)|\,|[\alpha'(t_i)-\alpha'(\nu_i)]|\,\Delta x_i \\
&\qquad+|f(x)[\alpha(x+)-\alpha(x-)]-f(t_k)[\alpha(x)-\alpha(x_{k-1})]-f(t_{k+1})[\alpha(x_{k+1})-\alpha(x)]| \\
&\qquad+M_fM_{\alpha'}\Delta x_k+M_fM_{\alpha'}\Delta x_{k+1}
\end{aligned}
$$

با فرض $\Delta x_k,\Delta x_{k+1}\to 0$ می‌توان دید که:

$$
\begin{aligned}
&|f(x)[\alpha(x+)-\alpha(x-)]-f(t_k)[\alpha(x)-\alpha(x_{k-1})]-f(t_{k+1})[\alpha(x_{k+1})-\alpha(x)]| \\
&\qquad+M_fM_{\alpha'}\Delta x_k+M_fM_{\alpha'}\Delta x_{k+1}\longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

پس به ازاء ε داده شده $\delta_1>0$ هست که:

$$
\begin{aligned}
\Delta x_k,\Delta x_{k+1}<\delta_1\Rightarrow\ &|f(x)[\alpha(x+)-\alpha(x-)]-f(t_k)[\alpha(x)-\alpha(x_{k-1})]-f(t_{k+1})[\alpha(x_{k+1})-\alpha(x)]| \\
&+M_fM_{\alpha'}\Delta x_k+M_fM_{\alpha'}\Delta x_{k+1}<\varepsilon
\end{aligned}
$$

چون $\lim\limits_{t\to x-}\alpha'(t)$ و $\lim\limits_{t\to x+}\alpha'(t)$ موجودند لذا α' بر $[a,x)$ و $(x,b]$ پیوسته‌ی یکنواخت است. پس $\delta_2>0$ موجود هست که $u,v\in(x,b]$ یا $u,v\in[a,x)$ و داریم:

$$|u-v|<\delta_2 \Rightarrow |\alpha'(u)-\alpha'(v)|<\varepsilon$$

فرض کنیم $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ و گیریم p'_ε افرازی شامل x باشد که $\Delta x_i<\delta \quad \forall i$. به ازاء $p\supseteq p'_\varepsilon$ خواهیم داشت:

$$|S(p,f,\alpha)-S(p,f\alpha')+f(x)[\alpha(x+)-\alpha(x-)]| \le M_f\varepsilon\sum_{i\neq k,k+1}\Delta x_i+\varepsilon$$

$$\le M_f(b-a)\varepsilon+\varepsilon$$

حال گیریم p''_ε افرازی باشد که:

$$\left|S(p''_\varepsilon,f,\alpha)-\int_a^b fd\alpha\right|<\varepsilon$$

فرض کنیم $p_\varepsilon=p'_\epsilon\cup p''_\varepsilon$ و $p\supseteq p'_\varepsilon$ در این صورت داریم:

$$\left|S(p,f\alpha')-\int_a^b fd\alpha-f(x)[\alpha(x+)-\alpha(x-)]\right| \le \left|-\int_a^b fd\alpha+S(p,f,\alpha)\right|$$

$$+|-S(p,f,\alpha)+S(p,f\alpha')-f(x)[\alpha(x+)-\alpha(x-)]|$$

$$\le 2\varepsilon+M_f(b-a)\varepsilon$$

□

لم ۹.۱.۱ فرض کنید $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ نگاشتی به طور مطلق پیوسته روی I^o باشد، چنانکه $f'\in L_1[a,b]$ که $a,b\in I^o$ و $a<b$، آنگاه اتحاد زیر را خواهیم داشت:

$$\tfrac{1}{6}\left[f(a)+4f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)\right]-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$=\tfrac{b-a}{2}\int_0^1\left[\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right)f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right)f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right]dt$$

که I^o به مفهوم درون I می‌باشد.

برهان. با استفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\int_0^1\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right)f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)dt=\tfrac{2}{b-a}\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right)f\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)\Big|_0^1-\int_0^1\tfrac{1}{b-a}f\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)dt$$

(۱)

$$=\tfrac{2}{b-a}\left[\tfrac{1}{6}f(b)-(-\tfrac{1}{3})f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]-\int_0^1\tfrac{1}{b-a}f\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)dt$$

$$\int_0^1 \left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right)f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)dt = \left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right)\tfrac{2}{a-b}f\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \tfrac{1}{a-b}f\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)dt$$

$$= \tfrac{2}{a-b}\left[-\tfrac{1}{6}f(a)-\tfrac{1}{3}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]+\tfrac{1}{a-b}\int_0^1 f\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)dt \qquad (۲)$$

حال با جمع (۱) و (۲) داریم:

$$\int_0^1 \left[\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right)f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)+\int_0^1 \left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right)f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right]dt$$

$$= \tfrac{2}{b-a}\left[\tfrac{1}{6}f(b)+\tfrac{2}{3}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+\tfrac{1}{6}f(a)\right]-\tfrac{2}{(b-a)^2}\int_0^1 f(x)dx$$

□

قضیه ۱۰.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو زیر بازه R باشند، و تابع k تعریف شده بر $X\times Y$ بر این مجموعه پیوسته و کراندار باشد، مثلاً،

$$|k(x,y)| \leq M,$$

به ازای هر y,x در $X\times Y$. همچنین $f\in L_1(X)$ و $g\in L_1(Y)$. در این صورت:

آ) به ازای هر y در Y، انتگرال لبگ $\int_X f(x)k(x,y)dx$ وجود دارد، و تابع F تعریف شده بر Y با معادله

$$F(y)=\int_X f(x)k(x,y)dx$$

بر Y پیوسته است.

ب) به ازای هر x در X، انتگرال لبگ $\int_Y g(y)k(x,y)dy$ وجود دارد، و تابع G تعریف شده بر X با معادله

$$G(x)=\int_Y g(y)k(x,y)dy$$

بر X پیوسته است.

ج) دو انتگرال لبگ $\int_X f(x)G(x)dx$ و $\int_Y g(y)F(y)dy$ وجود دارند و با هم مساویند. یعنی،

$$\int_X f(x)\Big[\int_Y g(y)k(x,y)dy\Big]dx=\int_Y g(y)\Big[\int_X f(x)k(x,y)dx\Big]dy.$$

برهان. برای اثبات به قضیه ۴۰ فصل ۱۰ مرجع [۳]نگاه کنید. □

۲.۱ مفهوم اندازه‌پذیری

ابتدا مفهوم توپولوژی را بیان می‌کنیم و ارتباط فضای توپولوژیک با مجموعه‌ی باز و تابع پیوسته را توضیح می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱ الف) گردایه‌ی τ از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی X را یک توپولوژی در X گوییم هرگاه از سه خاصیت زیر بهره‌مند باشد:

(i) $X, \emptyset \in \tau$،

(ii) اگر به‌ازای $i = 1, \cdots, n$، $V_i \in \tau$، آنگاه $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \in \tau$،

(iii) هرگاه $\{V_\alpha\}$ گردایه‌ی دلخواهی از اعضای τ (متناهی، شمارش‌پذیر، یا شمارش ناپذیر) باشد، آنگاه $\cup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

ب) هرگاه τ یک توپولوژی در X باشد، آنگاه X را یک فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه‌های باز در X می‌نامند.

ج) هرگاه X و Y دو فضای توپولوژیک بوده و f نگاشتی از X به‌توی Y باشد، آنگاه گوییم f پیوسته است اگر به‌ازای هر مجموعهٔ باز V در Y، $f^{-1}(V)$ مجموعه‌ی بازی در X باشد.

تعریف ۲.۲.۱ اگر E یک مجموعه باشد، تابع زیر را تابع مشخصه‌ی E می‌نامیم:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

حال مفهوم $\sigma-$جبر را بیان می‌نماییم و ارتباط بین فضای اندازه‌پذیر، مجموعه‌ی اندازه پذیر و تابع اندازه‌پذیر را توضیح می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱ الف) گردایه‌ی $\mathfrak{M}$ از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی X را یک $\sigma-$جبر در X نامیم هرگاه $\mathfrak{M}$ از خواص زیر بهره‌مند باشد:

(i) $X \in \mathfrak{M}$،

(ii) اگر $A \in \mathfrak{M}$، آنگاه $A^c \in \mathfrak{M}$، که در آن A^c متمم A نسبت به X است،

(iii) اگر $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به‌ازای $n = 1, 2, \cdots$، $A_n \in \mathfrak{M}$، آنگاه $A \in \mathfrak{M}$.

ب) هرگاه $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$جبر در X باشد، آنگاه X را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathfrak{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم.

ج) هرگاه X یک فضای اندازه‌پذیر، Y یک فضای توپولوژیک و f نگاشتی از X به‌توی Y باشد، آنگاه گوییم f اندازه‌پذیر است اگر به‌ازای هر مجموعه‌ی باز V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر در X باشد.

قضیه ۴.۲.۱ اگر $\mathcal{F}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد، کوچکترین $\sigma-$جبر در X مانند $\mathfrak{M}^*$ وجود دارد به‌طوری که $\mathcal{F} \subset \mathfrak{M}^*$.

برهان. به (۱۰.۱) در [۲۴] مراجعه نمایید. □

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. بنابر قضیه‌ی بالا کوچک‌ترین $\sigma-$جبر مانند $\mathfrak{B}$ در X هست به‌طوری‌که هر مجموعه‌ی باز در X متعلق به $\mathfrak{B}$ است. این $\sigma-$جبر در واقع $\sigma-$جبر تولید شده به‌وسیله‌ی زیرمجموعه‌های باز X است که آن را $\sigma-$جبر بورل[۱] در X و عناصر آن را مجموعه‌های بورل می‌نامیم. این $\sigma-$جبر را با $\mathfrak{B}_x$ یا به اختصار با $\mathfrak{B}$ نمایش می‌دهیم.

در این‌صورت $(X, \mathfrak{B})$ فضای اندازه‌پذیر بورل است و مجموعه‌های بورل نقش مجموعه‌های اندازه‌پذیر را دارند.

[۱] Borel

تعریف ۱.۲.۶ هر گاه $f : X \to Y$ تابعی اندازه‌پذیر از فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathfrak{B})$ به‌توی فضای توپولوژیک Y باشد، آنگاه f را اندازه‌پذیر بورل یا به‌اختصار تابع بورل گوییم.

هرگاه $f : X \to Y$ یک نگاشت پیوسته از فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathfrak{B})$ به‌توی فضای توپولوژیک Y باشد، از تعریف توابع پیوسته روشن است که به‌ازای هر مجموعه‌ی باز V در Y، $f^{-1}(V) \in \mathfrak{B}$. به‌عبارت دیگر هر نگاشت پیوسته از $(X, \mathfrak{B})$ اندازه پذیر بورل است.

۱.۳ خواص مقدماتی اندازه‌ها

ابتدا تعریفی از اندازه‌ی مثبت و فضای اندازه ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۱ الف) یک اندازه‌ی مثبت تابعی مانند μ بر یک $\sigma-$جبر مانند $\mathfrak{M}$ با مقادیر در $[0, \infty]$ است که شمارا جمعی نیز باشد. یعنی اگر $\{A_i\}$ گردایه‌ای شمارش‌پذیر و از هم جدای اعضای $\mathfrak{M}$ باشد، آنگاه:

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

برای پرهیز از بدیهی بودن فرض می‌کنیم دست‌کم یک $A \in \mathfrak{M}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\mu(A) < \infty$.

ب)هر فضای اندازه عبارت است از یک فضای اندازه‌پذیر به‌انضمام یک اندازه‌ی مثبت که بر $\sigma-$جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر تعریف شده است.

ج) اندازه‌ی مختلط یک تابع با مقادیر مختلط است که شمارا جمعی و تعریف شده بر یک $\sigma-$جبر می‌باشد.