دانشگاه آزاد اسلامي
واحد تهران مركزي
دانشكده علوم پايه گروه رياضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.Sc)

گرایش:
آنالیز عددی

عنوان:

جواب کمترین مجموع مربعات با نرم می‌نیمم برای معادلات ماتریسی در حالت کلی

استاد راهنما:
دکتر مجید امیرفخریان

استاد مشاور:
دکترمحمدعلی‌فریبرزی‌عراقی

پژوهشگر:
معصومه عزیزی

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

تشکر و قدردانی:

به نام حضرت دوست

رسیدن به قلّه‌ها و دامن دامن واژه و آگاهی چیدن در گرو رهنمون‌های عالمانه‌ی آنانی است که خود، روزگاری جاده‌های دانایی را چابک نقش زده و در طی طریق پله‌های ترقی، صبورانه قلم رانده‌اند.

این سطور بهانه‌ای است تا سپاس‌گزار اساتید ارجمندم جناب آقای دکترمجید امیر فخریان که راهنمایی و جناب آقای دکترمحمد علی فریبرزی عراقی که مشاوره‌ی این رساله را بر عهده داشته‌اند، باشم.

هم‌آنانی که تا سرچشمه‌ی علم و آگاهی رهنمونم ساختند.

بر آستان عالمانه‌ی آنان سر فرود خواهم آورد و ستایش‌گر مقام معلمی‌شان خواهم بود.

به‌جاست قدردانی نمایم از پدر و مادر عزیزم که علم‌آموزی را برایم بخش کردند .

تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب معصومه عزیزی دانش آموخته مقطع کارشناسی ارشد ناپیوسته به شماره دانشجویی ۸۸۰۶۵۱۱۰۲۰۰ در رشته ریاضی کاربردی که در تاریخ

از پایان نامه خود تحت عنوان «جواب کمترین مجموع مربعات با نرم مینیمم برای معادلات ماتریسی در حالت کلی» با کسب نمره ۱۸ و درجه بسیار خوب دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم:

۱. این پایان نامه حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه ،کتاب ،مقاله و...) استفاده نموده ام ، مطابق ضوابط و رویه های موجود ، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست ذکر و درج کرده ام.

۲. این پایان نامه قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح ،پایین تر یا بالاتر)در سایر دانشگاهها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

۳. چنانچه بعد از فراغت ازتحصیل ، قصد استفاده و هر گونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و .... از این پایان نامه داشته باشم ، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

۴. چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود ، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی:

تاریخ و امضاء

بسمه تعالی

در تاریخ:

دانشجوی کارشناسی ارشد آقای/خانم معصومه عزیزی از پایان نامه خود دفاع نموده و با نمره ۱۸ بحروف هجده و با درجه بسیار خوب مورد تصویب قرار گرفت .

امضاء استاد راهنما :

بسمه تعالي

دانشكده علوم پايه

«این چکیده به منظور چاپ در پژوهش‌نامه دانشگاه تهیه شده است»

نام واحد دانشگاهي: تهران مرکزي کد واحد: ۱۰۱	کد شناسايي پايان‌نامه:
عنوان پایان‌نامه: جواب کمترین مجموع مربعات با نرم مینیمم برای معادلات ماتریسی در حالت کلی	
نام و نام خانوادگي دانشجو: معصومه عزیزی شماره دانشجوئي: ۸۸۰۶۵۱۱۰۲۰۰ رشته تحصیلی: ریاضی کاربردی	تاریخ شروع پایان‌نامه: ۱۳۸۹/۱۰/۲۹ تاریخ اتمام پایان‌نامه:
استاد / استادان راهنما: دکتر مجید امیرفخریان استاد/استادان مشاور: دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی	
آدرس و شماره تلفن: تهران ـ خیابان یوسف آباد ـ خیابان مدبر ـ پلاک ۶۲ ـ ۸۸۰۲۲۱۸۷	

چکیده پایان نامه (شامل خلاصه، اهداف، روش های اجرا و نتایج به دست آمده):

در این پایان نامه دو الگوریتم تکراری برای حل می‌نیمم نرم کمترین مجموع مربعات معادلات خطی ماتریس در حالت کلی از جمله معادله ماتریسی معروف سیلوستر و معادله ماتریسی لیاپانوف ارائه می‌شود. الگوریتم اول شامل روش جستجوی متکی بر گرادیان و الگوریتم دوم به شکل دوگان مشاهده می‌شود. شرط لازم و کافی برای طول گام در این دو الگوریتم به منظور تضمین همگرایی الگوریتم‌ها، با بررسی شرایط اولیه دلخواه ارائه می‌شود و شرط کافی که به آسانی محاسبه می‌شود داده شده است . علاوه بر این دو روش برای انتخاب طول گام بهینه به طوری که سرعت همگرایی را حداکثر کند ارائه می‌شود. در میان این دو روش، روش اول با به حداقل رساندن شعاع طیفی ماتریس تکراری و بیان صریح و روشنی برای طول گام ارائه می‌دهد و روش دوم ما به حداقل رساندن مجموع مربعات $F-$ نرم ماتریس خطای ایجاد شده توسط این الگوریتم است و نشان می‌دهیم که طول گام بهینه منحصر به فرد، درون بازه قرار می‌گیرد و چند مثال عددی برای نشان دادن سودمندی روش ارائه می‌شود.

نظر استاد راهنما براي چاپ در پژوهش‌نامه دانشگاه ——— مناسب است ☐ / مناسب نیست ☐ تاریخ و امضاء:

فهرست مطالب

لیست تصاویر

مقدمه

روش‌های تکراری اغلب در ریاضیات محاسباتی مورد استفاده قرار می‌گیرد. به طور مثال برای حل مسائلی که منجر به یافتن ریشه یک معادله یا جواب یک دستگاه معادلات خطی می‌شوند کاربرد دارد. این روش‌ها با شروع از یک حدس اولیه به سمت یافتن تقریب‌های بهتری، هرچه نزدیکتر به جواب اصلی پیش می‌روند. این روش‌ها متفاوت از روش‌های مستقیم هستند. مسائل در روش‌های مستقیم، با تعداد متناهی از اعمال ریاضی به جواب می‌رسند. اما در آن، خطا در هر مرحله افزایش می‌یابد. از این رو جواب بدست آمده جواب دقیقی نخواهد بود. آنچه در روش‌های تکراری بسیار با اهمیت است، پایداری آنهاست. روش‌های تکراری پایدار دستگاه‌های خطی را با استفاده از یک عملگر تقریبی تا حد ممکن به جواب اصلی نزدیک است، حل می‌کنند و با توجه به اندازه خطایی که در هر مرحله تولید می‌شود، یک جواب صحیح بدست می‌آورند. این روش‌ها معمولا در n مرحله همگرا می‌شوند که در آنn ، اندازه دستگاه است. اگرچه وجود خطای ممیز سیار در این روش‌ها را نباید نادیده گرفت. از مهمترین روش‌های تکراری پایدار، می‌توان به روش ژاکوبی، گاوس سایدل و روش فوق تخفیف متوالی [۱] اشاره نمود. از روش‌های تکراری متداول که برای حل دستگاه‌خطی بزرگ و تنک [۲] $Ax = b$ مورد استفاده قرار می‌گیرد روش گرادیان مزدوج است که یکی از شناخته شده‌ترین روش زیر فضای کرایلف[۳] است. با استفاده از روش‌های تکراری تلاش می‌کنیم تا جواب بهینه را با هزینه کمتر برای دستگاه‌های‌خطی به فرم $Ax = b$ بیابیم که در آن ماتریس ضرایب A بزرگ و اغلب تنک است. در حل دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرایب به روش کمترین مربعات، روش‌های تکراری نسبت به روش‌های مستقیم ارجح‌ترند. در روش‌های تکراری،

---

[۱] successive overrelaxation method(SOR)

[۲] Sparse

[۳] krylov

مقدار اولیه جواب تا رسیدن به نتیجه صحیح بهبود می‌یابد در عمل روش‌های تکراری برای حل دستگاه‌های معادلات‌خطی با دستگاه معادلات نرمال $A^TAx = A^Tb$ به‌کار گرفته می‌شود روش‌های تکراری نیاز به محاسبه مستقیم A^TA ندارند و در برگیرنده دو حسن ذیل است.

۱) جلوگیری از خطای محاسباتی که در محاسبه ماتریس A^TA ایجاد می‌شود در ضرب A^T در A با توجه به عملیات محاسباتی کامپیوتر، احتمال ایجاد خطا در محاسبه A^TA وجود دارد.

۲) جلوگیری از تولید ماتریس غیر تنک A^TA ، در بعضی مسائل دیگر مانند A تنک نیست در روش‌های تکراری جواب پایدار شده دستگاه معادلات نرمال، از طریق تشکیل یک دنباله جواب که به سمت جواب شبه معکوس ماتریس A میل می‌کند، قبل از رسیدن به جواب شبه معکوس ماتریس A قطع تکرار حاصل می‌گردد. بنابراین تعداد تکرار نقش پارامتر پایدار سازی را در روش‌های تکراری بازی می‌کند. روش‌های تکراری گرادیان ژاکوبی، گاوس سایدل از جمله روش‌هایی هستند که به طور عمده در حل مسائل کمترین مربعات مورد استفاده قرار می‌گیرد. نرخ همگرایی جواب در روش ژاکوبی و گاوس سایدل بسیار کند ولی روش گرادیان کمترین مربعات نرخ همگرایی سریع‌تری نسبت به سایر روش‌ها دارند. روش تکراری گرادیان مزدوج از روش‌های شناخته شده برای حل دستگاه معادلات تنک با ماتریس نرمال معین مثبت و متقارن است. مهمترین خصیصه یک کامپیوتر رقمی سریع، قابلیت آن در انجام عملیات تکراری به صورت کارا می‌باشد و برای بهره برداری از این خصوصیت اساسی، اغلب الگوریتم‌هایی که برای حل مسائل بزرگ بهینه‌سازی طراحی شده‌اند از نوع تکراری هستند. در روند جستجو برای یافتن برداری که جواب مسأله است معمولا یک بردار اولیه $x_۰$ انتخاب می‌شود و الگوریتم بردار بهتر $x_۱$ را تولید می‌کند. این فرآیند تکرار می‌شود و جواب مناسب‌تر $x_۲$ بدست می‌آید. با ادامه این روند دنباله‌ای از نقاط پی‌درپی بهتر $x_۰$، $x_۱$،...،x_k بدست می‌آید که به یک نقطه جواب x^* نزدیک می‌شود. لزوماً به دلیل وجود الگوریتمی که به جواب

دقیق همگراست نمی‌توان مسأله را حل شده انگاشت. زیرا ممکن است که الگوریتم برای کاهش خطا به مقدار قابل قبول، نیاز به زمان بسیار زیادی داشته باشد. مقوله سرعت همگرایی در نظریه الگوریتم‌های تکراری، ارزیابی کمی و مقایسه الگوریتم‌های مختلف را امکان پذیر می‌سازد و حداقل به طور تقریبی شاخصی از قابل مهار بودن یک مسأله را بدست می‌دهد. معادلات ماتریسی‌خطی نقش مهمی را در تئوری سیستم‌های‌خطی ایفا می‌کند. برای مثال معادلات ماتریسی سیلوستر [۴] $AX + XB = C$ برای حل مسائل کنترل مورد استفاده قرار می‌گیرد و شکل ویژه آن شامل معادلات‌ماتریسی‌لیاپانوف [۵] معروف $AX + XA^T = -C$ است که کاربرد بسیار مهمی در آنالیز پایداری سیستم‌های خطی دارد. بنابر کاربرد مهمی که این معادلات خطی دارد، روش‌های فراوانی که هر دو جواب عددی و تحلیلی را فراهم می‌نماید را تعمیم می‌دهیم. برای جواب‌های تحلیلی دسوزا [۱۱] [۶] از کنترل‌پذیری[۷]رویت‌پذیری[۸] برای ساختن جواب از این رده از معادلات استفاده می‌نماید. در کنار جواب‌های تحلیلی جواب‌های عددی برای حل معادلات ماتریسی خطی هم در این‌جا مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای مثال با استفاده از اصل شناسایی سلسله مراتبی الگوریتم تکراری [۱۲، ۱۴، ۱۵] برای حل معادلات ماتریسی خطی و زوج معادلات ماتریسی سیلوستر پیشنهاد می‌شود. برای ارجاعات بیشتر در این موضوع [۱۹، ۲۲، ۲۴، ۲۵، ۲۶] و مراجع آن‌ها را می‌توان ملاحظه نمود. معادله ماتریسی خطی کلی

$$\sum_{i=1}^{r} A_i X B_i + \sum_{j=1}^{s} C_j X^T D_j = E \qquad (1)$$

[۴] Sylvester

[۵] Lyapunov

[۶] Desouza

[۷] controlaibility

[۸] observaibility

که $A_i \in \mathbb{R}^{p\times m}$ و $B_i \in \mathbb{R}^{n\times q}$ و $C_j \in \mathbb{R}^{p\times n}$ و $D_j \in \mathbb{R}^{m\times q}$، $i = ۱, \ldots, r$ و $j = ۱, \ldots, s$ و $E \in \mathbb{R}^{p\times q}$ ماتریس‌های معلوم هستند و $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ماتریس مجهول است. فقط بعضی از موارد خاص (۱) اخیراً بررسی شده است. در [۲۷] معادله خطی

$$AXB + CX^TD = E \tag{۲}$$

بررسی شده است که یک مورد خاص آن به نام معادله ماتریسی $AX + X^TC = B$ به وسیله پیا، ژنگ، ونگ [۹] در [۲۳] بررسی شده است و روش وارون تعمیم‌یافته مور - پنروز [۱۰] در [۲۳] برای یافتن جواب صریح معادلات ماتریسی استفاده می‌شود گرچه مشکل است که این نتایج در یک مورد کلی تعمیم دهیم. در این‌جا روش کمترین مجموع مربعات با نرم می‌نیمم در معادلات ماتریسی کلی خطی (۱) با استفاده از روش‌های تکراری را بررسی می‌نماییم. در این پایان نامه سعی بر این است که مسأله حداقل مربعات زیر را حل نماییم.

$$\min_{X\in\mathbb{R}^{m\times n}} \left\| \sum_{i=۱}^{r} A_iXB_i + \sum_{j=۱}^{s} C_jX^TD_j - E \right\|_F$$

به طور کلی جواب مسأله بالا منحصر به فرد نیست، بنابراین جواب می‌نیمم نرم حداقل مجموع مربعات را جستجو می‌نماییم . به عنوان نمونه روش تابع علامت ماتریسی [۱۱] که در [۹] استفاده می‌شود که جواب‌های تکراری برای معادلات جبری ریکاتی [۱۲] را فراهم می‌کند. روش

[۹] Pia ,Zhang,Wang

[۱۰] Moore - Penrose

[۱۱] Matrix Sign Function Method

[۱۲] Riccati

شور دوری [۱۳] و شور هسنبرگ [۱۴] در [۷] برای حل معادلات سیلوستر و لیاپانوف متناوب مورد استفاده قرار می‌گیرد. اصل شناسایی سلسله مراتبی[۱۵]، ضرب هادامارد[۱۶] و ضرب ستاره‌ای [۱۷]در [۱۲] برای ساخت الگوریتم تکراری برای حل معادله ماتریسی سیلوستر و زوج معادله ماتریسی سیلوستر استفاده شده است و الگوریتم تکراری در [۲۸] برای حل زوج معادله ماتریسی لیاپانوف زمان گسسته پرش مارکوف [۱۸] مورد استفاده قرار می‌گیرد. گرچه همه روش‌های ذکر شده به طور مستقیم برای بدست آوردن می‌نیمم نرم معادلات ماتریس خطی در حالت کلی (۱) و (۲) کاربرد ندارد در این جا ما جواب‌های عددی از مسائل ذکر شده را با استفاده از تکرارها جستجو می‌نماییم.

دو الگوریتم تکراری پیشنهاد می‌شود. شرط لازم و کافی که طول‌های گام در الگوریتم برقرار باشد که تضمین‌کننده همگرایی الگوریتم‌ها است بیان می‌نماییم و دو روش را برای انتخاب طول الگوریتم بهینه در الگوریتم که نرخ همگرایی را حداکثر می‌کند فراهم می‌نماییم.

مزیت الگوریتم‌های پیشنهاد شده شامل موارد زیر است:

۱. به راحتی بدون هر نوع تجزیه روی ماتریس ضرایب ساخته می‌شود.

۲. فقط به ضرب ماتریس‌ها در تکرار نیاز داریم.

۳. همگرایی الگوریتم‌ها تضمین شده است و طول گام در الگوریتم کوچک است.

۴. طول گام بهینه در الگوریتم که نرخ همگرایی حداکثر شده به وضوح ارائه شده است.

[۱۳] Cyclic Schur

[۱۴] Schur Hessenberg

[۱۵] hierarchical identification principle

[۱۶] Hadamard product

[۱۷] Star product

[۱۸] Markovian jump

در فصل ۱ به تعاریف و مفاهیم مقدماتی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز خواهد بود می‌پردازیم. مطالب این فصل شامل تعریف واژه‌های کلیدی، مفاهیمی مانند تجزیه مقدار تکین و شبه معکوس مور- پنروز می‌باشد.

در فصل ۲ کاربرد بلوک جردن در پایداری و ضرب کرونکر و خواص آن، مسأله کمترین مربعات، الگوریتم گرادیان مزدوج و همگرایی آن را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

در فصل ۳ به معرفی نرم‌های سیگنال و سیستم پرداخته و فضای $\mathcal{H}_\infty$ را معرفی می‌نماییم سپس به بررسی مسأله کنترل بهینه $\mathcal{H}_\infty$ می‌پردازیم.

در فصل ۴ اصل جستجوی سلسله مراتبی را برای حل معادله ماتریسی سیلوستر(که به دوشکل $AX + XB = C$ و $AXB + X = C$ می‌باشد) و لیاپانوف به‌کار می‌بریم و از الگوریتم تکراری گرادیان برای حل معادلات با می‌نیمم کردن تابع معیار استفاده می‌نماییم و در الگوریتم تکراری، جواب تکراری به جواب دقیق همگرا می‌گردد. برای هر مقدار دلخواه و با انتخاب عامل همگرایی مناسب نرخ همگرایی مناسب از جواب تکراری بدست می‌آید . در جبر خطی روش‌های تکراری مانند ژاکوبی و گاوس سایدل به طور خاص مورد توجه قرار گرفته شده است برای مثال استارک و نیتامر[۱۹]روش فوق تخفیف بلوکی تکراری(SOR) را برای جواب معادله ماتریسی سیلوستر مورد مطالعه قرار داده‌اند و اخیراً کاگستروم-جانسون [۲۰] الگوریتم بلوکی بازگشتی برای حل معادلات ماتریسی سیلوستر و لیاپانوف ارائه داده‌اند و استایکل[۲۱] جواب عددی برای حل معادله لیاپانوف تعمیم یافته با استفاده از تابع علامت ماتریس ارائه داده است. اخیراً نویسندگانی جواب تکراری کمترین مربعات برای زوج معادله ماتریسی پیشنهاد کرده‌اند. الگوریتم تکراری جواب معادله ماتریسی به جواب دقیق نزدیک می‌شود گرچه جواب

[۱۹] Starke-Neithammer

[۲۰] $Kågström - Jonsson$

[۲۱] Stykel

دقیق مهم است ولی برای کاربردهای زیادی مانند آنالیز پایداری لازم نیست که جواب دقیق را محاسبه نماییم و با به کاربردن روش جستجوی سلسله مراتبی دستگاه را به دو زیر دستگاه تجزیه کرده الگوریتم تکراری گرادیان [۲۲](GI) خاصیت همگرایی مناسبی دارد و ماتریس ضرایب لزوماً نباید یکسان باشد و این روش برای حل معادلات ماتریسی غیرخطی (معادله ریکاتی)تعمیم می‌یابد. و در این فصل به حل انواع معادلات ماتریسی می‌پردازیم.
در فصل ۵ دو الگوریتم تکراری برای حل می‌نیمم نرم کمترین مجموع مربعات معادلات خطی ماتریس در حالت کلی از جمله معادله ماتریسی معروف سیلوستر و معادله ماتریسی لیاپانوف ارائه می‌شود. الگوریتم اول شامل روش جستجوی متکی بر گرادیان و الگوریتم دوم به شکل دوگان مشاهده می‌شود. شرط لازم و کافی برای طول گام در این دو الگوریتم به منظور تضمین همگرایی الگوریتم‌ها، با بررسی شرایط اولیه دلخواه ارائه می‌شود و شرط کافی که به آسانی محاسبه می‌شود داده شده است . علاوه بر این دو روش برای انتخاب طول گام بهینه به طوری که سرعت همگرایی را حداکثر کند ارائه می‌شود. در میان این دو روش، روش اول با به حداقل رساندن شعاع طیفی ماتریس تکراری و بیان صریح و روشنی برای طول گام ارائه می‌دهد و روش دوم ما به حداقل رساندن مجموع مربعات $F-$ نرم ماتریس خطای ایجاد شده توسط این الگوریتم است و نشان می‌دهیم که طول گام بهینه منحصر به فرد، درون بازه قرار می‌گیرد و چند مثال عددی برای نشان دادن سودمندی روش ارائه می‌شود.

[۲۲] gradient iterative