بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

استفاده از روش هم‌محلی و چندجمله‌ایهای مانس-لژاندر برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری

توسط:

سحر شهریاری

استاد راهنما:

دکتر کاظم نوری هفت چشمه

استاد مشاور:

دکتر جواد دمیرچی

مهر ۱۳۹۳

تقدیم به پدر و مادر عزیزم:

چشمه های جوشان محبت
جلوه های مهر و عطوفت الهی
لبخندهای پر مهر زندگیم

تقدیم به همسرم:

به پاس قدردانی از قلبی آکنده از عشق و معرفت
که محیطی سرشار از سلامت و امنیت و آرامش و آسایش
برای من فراهم آورده است.

و

تقدیم به برادران و خواهران خوبم
که وجودشان شادی بخش و صفایشان مایه آرامش من است.

قدردانی

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده ی کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه ی اندیشه های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه سار بنده نوازی هایش پایان نامه ی حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان نامه به انجام نمی رسید.

ابتدا از استاد عالی قدرم جناب آقای دکتر کاظم نوری که با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده داشتند، کمال سپاس را دارم.

از استاد گران قدرم جناب آقای دکتر جواد دمیرچی که زحمت مشاوره ی این پایان نامه را متحمل شدند، صمیمانه تشکر می کنم.

از اساتید فرزانه جناب آقای دکتر باقر کرامتی و جناب آقای دکتر سعید محمدیان که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند، کمال تشکر را دارم.

سپاس آخر را به مهربانترین همراهان زندگیم، به پدر، مادر و همسر عزیزم تقدیم می کنم که حضورشان در فضای زندگیم مصداق بی ریای سخاوت بوده است.

پروردگارا:

نه میتوانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دستهای پینه بسته شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که هر لحظه شکرگزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذرانم.

سحر شهریاری

مهر ۱۳۹۳

چکیده

در این پایان‌نامه روشی عددی برای یافتن جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل کسری بر اساس روش هم‌محلی و چندجمله‌ای‌های مانس ارائه می‌شود. نمایش مناسب از جواب توسط چندجمله‌ای‌های مانس رفتار عددی آن را به جوابی از سیستم معادلات جبری کاهش می‌دهد. مزیت اصلی روش مذکور دقت بالای آن و همگرایی سریع می‌باشد، در نتیجه با بکارگیری تعداد کمی از نقاط هم‌محلی نتایج خوبی بدست می‌آید. همچنین با عنایت به اینکه مشتق کسری چندجمله‌ای‌های مانس نیز چندجمله‌ای مانس خواهد بود، این امر موجب استفاده از آنها به عنوان پایه‌های مناسب در روش هم‌محلی است. دقت و کارایی روش پیشنهاد شده با تعدادی از مثال‌های عددی آزموده شده است.

واژه‌های کلیدی: مشتقات کسری، معادلات دیفرانسیل کسری، چندجمله‌ای‌های متعامد، چندجمله‌ای‌های مانس، تربیع گاوس.

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

پیشگفتار

در سال‌های اخیر استفاده از معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری جذابیت قابل توجهی در علوم مختلف از جمله فیزیک، شیمی و حتی امور مالی و علوم اجتماعی بدست آورده‌اند[۸, ۱۹, ۲۵].
حساب دیفرانسیل مرتبه‌ی غیر صحیح را از جهتی مطلبی قدیمی می‌نامند، زیرا مطالعات اولیه در این زمینه به اواخر قرن ۱۷ باز می‌گردد. از جهتی دیگر مطلبی بدیع و جدید نام می‌نهند، زیرا در چند دهه‌ی اخیر اولین کنفرانس‌ها و مقالات کاربردی در این موضوع مطرح شده است.
در طول دهه‌های اخیر، چندین روش برای حل معادلات دیفرانسیلی مرتبه‌ی کسری استفاده شده است. دیتهلم[1] و همکاران [۹] و فورد[2] و همکاران [۱۱] برخی از روش‌های موجود را بررسی کرده و نقاط ضعف و قوت آنها را توضیح دادند. از روش‌های دیگر می‌توان به روش عملیاتی [۱۸]، روش تجزیه و تحلیل هموتوپی [۱۶]، روش تبدیل دیفرانسیل [۱, ۲۳] و... اشاره کرد. برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری داشتن یک روش عددی مناسب نقش اساسی دارد.
در این پایان‌نامه به حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری

$$D_*^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad ۰ < \alpha \leq ۱$$

با شرایط اولیه‌ی $y(۰) = y_۰$ می‌پردازیم که در آن D_*^α مشتق مرتبه‌ی کسری کاپوتو[3] و f یک تابع دو متغیره است. در طول دهه‌های گذشته چندین روش عددی برای حل معادلات از این نوع ارائه شده است.
در این پایان‌نامه از روش هم‌محلی بدین منظور استفاده می‌کنیم. روش هم‌محلی از جمله روش‌های طیفی است که برای بدست آوردن جواب عددی از معادلات دیفرانسیل غیر خطی دقت خوبی ارائه می‌دهد و از ویژگی‌های برجسته‌ی آن همگرایی نمایی می‌باشد. در اکثر مواقع چندجمله‌ای‌های متعامد را به عنوان توابع پایه‌ای در روش هم‌محلی در نظر می‌گیرند، بنابراین ما از چندجمله‌ای‌های مانس-لژاندر که خانواده‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد تعمیم یافته هستند استفاده می‌کنیم. این چندجمله‌ای‌ها خواص بسیار مهمی دارند که استفاده از آنها خطای به وجود آمده را کاهش می‌دهد.

[1] Diethelm

[2] Ford

[3] M. Caputo

این پایان‌نامه بصورت زیر تنظیم شده است:

- در فصل اول، ابتدا تاریخچه‌ای کوتاه از حساب دیفرانسیل مرتبه‌ی دلخواه بیان می‌کنیم. سپس به معرفی توابع خاص که کاربرد زیادی در نظریه‌ی مشتق‌گیری از مرتبه‌کسری دارند، می‌پردازیم. در ادامه سه نمونه از رایج‌ترین مشتقات مرتبه‌ی کسری را معرفی می‌کنیم.

- در فصل دوم، مرور مختصری از چندجمله‌ای‌های متعامد و انتگرال‌گیری عددی گاوس ارائه می‌شود. سپس به معرفی روش‌های طیفی و تجزیه و تحلیل خطای این روش‌ها مبادرت خواهد گردید.

- در فصل سوم، چندجمله‌ای‌های مانس و مانس-لژاندر معرفی می‌شوند و بسیاری از خواص آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه روش هم‌محلی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری بکار گرفته می‌شود. نهایتا نتایج عددی بدست آمده با ارائه‌ی مثال‌های عددی نشان داده می‌شود.

فصل ۱

حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه کسری

۱-۱ تاریخچه

حساب کسری شاخه‌ای از ریاضی است که منظور از آن انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از مرتبه‌ی دلخواه می‌باشد، مرتبه‌ی دلخواه می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد.

در این بخش چگونگی پیدایش و توسعه‌ی حسابان کسری را بررسی می‌کنیم.

اولین بار لیبنیتز[۱] نماد $\frac{d^n y}{dx^n}$ را برای مشتق مرتبه‌ی صحیح nام معرفی کرد. در سال ۱۶۹۵ هوپیتال [۲] با ارسال نامه‌ای از وی خواست که تعبیری برای $\frac{d^n y}{dx^n}$ ($n = \frac{۱}{۲}$) ارائه کند. لیبنیتز در ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ در پاسخ به هوپیتال می‌نویسد:

" این یک تضاد ظاهری است اما روزی نتایج مفیدی را در پی خواهد داشت "

بعد از لایب نیتز، لاگرانژ[۳] در سال ۱۷۷۲ قاعده‌ی زیر را برای عملگر دیفرانسیل از مرتبه‌ی صحیح توسعه داد

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^n}{dx^n} = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}.$$

---

[۱] G. W. Leibniz

[۲] L’Hopital

[۳] J. L. Lagrange

چند سال بعد لاکرویس[1] مشتق صحیح تابع $y(x) = x^m$، $m \in \mathbb{N}$ را با استفاده از تابع گاما به مرتبه کسری تعمیم داد.

$$\frac{d^n(x^m)}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, (m \geq n)$$

اگر n غیر صحیح باشد:

$$\frac{d^n(x^m)}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+۱)}{\Gamma(m-n+۱)}x^{m-n}$$

تا سال ۱۸۲۳ عملگرهای کسری کاربرد خاصی در حل مسائل فیزیکی نداشتند. تا اینکه آبل[2] مسئله‌ی خم همزمانی را مطرح کرد.

مسئله‌ی خم همزمانی: این مسئله شامل تعیین یک منحنی در صفحه (x, y) می‌باشد به طوری که زمان لازم که ذره‌ی در حال لغزش به پایین‌ترین نقطه تحت نیروی جاذبه زمین می‌رسد، مستقل از نقطه‌ی شروع $(x_۰, y_۰)$ بر روی منحنی باشد.

طبق قوانین فیزیک انرژی پتانسیل از دست رفته با انرژی جنبشی که ذره بدست می‌آورد برابر است، یعنی

$$-\frac{۱}{۲}m(\frac{d\lambda}{dt})^۲ = mg(y_۰ - y), \tag{۱-۱}$$

که در آن m جرم ذره، λ فاصله ذره از نقطه‌ی شروع در طول منحنی و g شتاب گرانشی زمین است. از رابطه‌ی (۱-۱) داریم:

$$-\frac{d\lambda}{\sqrt{y_۰ - y}} = \sqrt{۲g}dt.$$

[1] S. F. Lacroix

[2] N. H. Abel

با انتگرال‌گیری از زمان $t=۰$ تا $t=T$ بدست می‌آوریم:

$$\sqrt{۲g}T = \int_{۰}^{y_۰} (y_۰ - y)^{-\frac{۱}{۲}} d\lambda.$$

با توجه به اینکه زمان لازم برای رسیدن ذره به پایین‌ترین نقطه‌ی منحنی ثابت در نظر گرفته می‌شود، سمت چپ عبارت فوق بایستی ثابت باشد که آن را k در نظر می‌گیریم. حال اگر طول مسیر λ را تابعی بر حسب ارتفاع در نظر بگیریم، یعنی $\lambda = F(y)$ داریم $\frac{d\lambda}{dy} = F'(y)$. با تغییر متغیرهای $y_۰ \to x$ ، $y \to t$ و با نمایش $F' = f$ معادله ی بالا تبدیل می شود به:

$$k = \int_{۰}^{x} (x-t)^{-\frac{۱}{۲}} f(t)dt. \qquad (۱-۲)$$

آبل برای یافتن تابع نامعلوم f در معادله انتگرالی (۱-۲) طرفین را در $\frac{۱}{\Gamma(\frac{۱}{۲})}$ ضرب کرد. لذا سمت راست به یک انتگرال کسری از مرتبه‌ی $\frac{۱}{۲}$ تبدیل شد:

$$\frac{k}{\Gamma(\frac{۱}{۲})} = \frac{۱}{\Gamma(\frac{۱}{۲})} \int_{۰}^{x} (x-t)^{-\frac{۱}{۲}} f(t)dt = \frac{d^{-\frac{۱}{۲}}}{dx^{-\frac{۱}{۲}}} f(x). \qquad (۱-۳)$$

با به کار بردن $\frac{d^{\frac{۱}{۲}}}{dx^{\frac{۱}{۲}}}$ به طرفین (۱-۳) داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{d^{\frac{۱}{۲}}}{dx^{\frac{۱}{۲}}} \frac{d^{-\frac{۱}{۲}}}{dx^{-\frac{۱}{۲}}} f(x) = \frac{۱}{\Gamma(\frac{۱}{۲})} \frac{d^{\frac{۱}{۲}}}{dx^{\frac{۱}{۲}}} k, \\ &\Rightarrow f(x) = \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{\frac{۱}{۲}}}{dx^{\frac{۱}{۲}}} k = \frac{k}{\pi\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

که برای آخرین تساوی مشتق مرتبه‌ی $\frac{۱}{۲}$ استفاده شده است.

در سال ۱۸۴۷ ریمان[۱]، تعریف انتگرال کسری از مرتبه‌ی α را برای تابع مفروض $f(x)$ به صورت زیر پیشنهاد کرد

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)} \int_{c}^{x} (x-t)^{\alpha-۱} f(t)dt + \psi(x).$$

[۱] Reimann

وجود تابع $\psi(x)$ به علت ابهام موجود در حد پایین انتگرال است. این معادله بدون تابع مکمل $\psi(x)$ امروزه رایج‌ترین تعریف انتگرال کسری می‌باشد، که انتگرال کسری ریمان-لیوویل نام گرفته است.
برای تعریف مشتق ریمان-لیوویل اگر علامت α را تغییر دهیم آنگاه $\int_c^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t)dt$ به طور کلی واگرا می‌شود. لذا مشتق کسری ریمان-لیوویل را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= D^{n-\beta} f(x) = D^n D^{-\beta} f(x) \\ &= \frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_c^x (x-t)^{\beta-1} f(t)dt), \end{aligned}$$

که در آن $n = \lceil \alpha \rceil$ کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی α است و $0 < \beta = n - \alpha < 1$.
همزمان با ریمان و لیوویل، گرونوالد[1] و لتنیکوف[2] پایه‌ی دیگری را برای تعریف مشتق مرتبه کسری معرفی کردند.
در مجموع تعداد زیادی از نتایج حساب کسری در قرن بیستم ارائه شده است. از جمله تعریف مشتق کاپوتو که در ادامه به معرفی آن می‌پردازیم.
حساب کسری را می‌توان به عنوان یک علم نو قلمداد کرد، زیرا در چند دهه‌ی اخیر اولین کنفرانس‌ها و مقالات کاربردی در این موضوع مطرح گردید. اولین کنفرانس کاربردی در این زمینه در سال ۱۹۷۴ توسط راس[3] تحت عنوان "*First conference on fractional calculus and its applications*" در دانشگاه نیوهاون[4] برگزار شد. اولین نگارش‌ها و یاداشت‌ها در این زمینه توسط الدهام[5] و اسپنیر[6] در سال ۱۹۶۸ آغاز گردید که منجر به تالیف کتاب "*Fractional Calculus*" در سال ۱۹۷۴ گردید.

---

[1] Grunwald

[2] Letnikov

[3] B. Ross

[4] New Haven

[5] K. B. Oldham

[6] J. Spanier

پژوهشگران متعددی از جمله پدلبنی[۱] در سال ۱۹۹۹، هیفر [۲] سال ۲۰۰۰، وست [۳]، بلوگنا[۴] و گریگلنی[۵] سال ۲۰۰۳، کیلباس[۶]، سریوستاوا[۷] و تروجیلو[۸] سال ۲۰۰۶ و اخیرا توسط مایناردی[۹] در سال ۲۰۱۰، مطالعات مختلفی در این زمینه داشته‌اند که نتایج آن منجر به ارائه‌ی مقالات و کتبی گردیده است [۱۹].

۱-۲ معرفی برخی از توابع خاص

در این بخش به معرفی توابع خاص مورد نیاز در نظریه‌ی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبه‌ی دلخواه می‌پردازیم. این توابع شامل تابع گاما، تابع بتا و تابع میتاگ-لفلر [۱۰] می‌باشند که نقش بسیار مهمی را در ارائه‌ی تعاریف مشتق و انتگرال از مرتبه‌ی دلخواه دارند. مطالب این بخش همگی از مرجع [۲۴] می‌باشند.

۱-۲-۱ تابع گاما

تابع گاما مفهوم $n!$ (n فاکتوریل) را برای هر عدد دلخواه n بیان می‌کند. در ادامه به ارائه‌ی تعریف تابع گاما و برخی از خواص آن می‌پردازیم.

[۱] Podlubny

[۲] Hilfer

[۳] B. West

[۴] M. Bologna

[۵] P. Grigolini

[۶] A. Kilbas

[۷] H. M. Srivastava

[۸] J. Trujillo

[۹] F. Mainardi

[۱۰] Mittag-Leffler

تعریف ۱-۲.۱. تابع گامای اویلر[۱] $\Gamma(z)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(z)=\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt,\ Re(z)>0.$$

که برخی از خواص آن عبارتند از [۲۴]:

(۱)

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\ z\in\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,-3,...\}$$

که با انتگرال‌گیری جز به جز اثبات می‌شود.

(۲) برای $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

(۳) تابع گاما را می‌توان به صورت حدی زیر نیز تعریف کرد

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{z}}{z(z+1)\dots(z+n)},\ Re(z)>0.$$

۱-۲-۲ تابع بتا

تعریف ۱-۲.۲. تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\beta(z,\omega)=\int_{0}^{1}t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}dt,\ (Re(z)>0,Re(\omega)>0).$$

که برخی خواص آن عبارتند از [۲۴]:

(۱) تابع بتا را با استفاده از رابطه ی زیر می‌توان به کل صفحه مختلط تعمیم داد.

$$\beta(z,\omega)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)},\ z,\omega\in\mathbb{C}.$$

[۱] Euler

تعریف بالا رابطه‌ی بین تابع بتا و تابع گاما را بیان می‌کند.

(۲)

$$\beta(z,\omega)=\beta(\omega,z)$$

با کمک تابع بتا می‌توان روابط زیر را برای تابع گاما بدست آورد:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{sin(\pi z)},\ 0<Re(z)<1,\ z=0,\pm 1,\pm 2,\ldots.$$

اگر در این رابطه $z=\frac{1}{2}$ قرار دهیم، $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ بدست می‌آید.

(۳)

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}2^{2z-1}\Gamma(2z),\ (2z\neq 0,-1,-2,...).$$

با قرار دادن $z=n+\frac{1}{2}$ داریم:

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\Gamma(n+1)}=\frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

۱-۲-۳ تابع میتاگ-لفلر

تابع میتاگ-لفلر فرم تعمیم یافته‌ی تابع e^z می‌باشد.

تعریف ۱-۲-۳. تابع تک پارامتری میتاگ-لفلر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\ \alpha>0 \qquad (۱-۴)$$

و تابع دو پارامتری آن به فرم زیر بیان می‌شود

$$E_{\alpha,\beta}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ (\alpha>0,\beta>0).$$

برخی از حالت‌های خاص آن به ازای مقدارهای مختلف α و β را بیان می‌کنیم [۲۴]