بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه آمار

پایان نامه‌ی دکتری رشته‌ی آمار

بحثی در قابلیت اعتماد سیستم های متوالی k از n

استاد راهنما:
دکتر مجید اسدی

پژوهشگر:
ابراهیم صالحی طبس

مهرماه ۱۳۹۰

سپاسگزاری

"حمد و سپاس خدای را که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزیت نعمت. هر نفسی که فرو می‌رود ممد حیات است و چون بر آید مفرح ذات، پس بر هر نفس دو نعمت موجود است و بر هر نعمت شکری واجب."

اکنون که به لطف ایزد منان توفیق کسب علم و دانش و به پایان رساندن این مرحله از زندگی خود را یافته‌ام بر خود واجب می‌دانم، مراتب سپاس و امتنان خود را از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر مجید اسدی که در کلیه مراحل تدوین این پایان‌نامه مرا یاری نمودند، ابراز دارم. از اساتید بزرگوار آقایان دکتر جعفر احمدی، دکتر محمد حسین علامت‌ساز و دکتر افشین پرورده که داوری این رساله را پذیرفته و با پیشنهادات خود موجب ارتقای آن گردیدند، صمیمانه تشکر می‌نمایم. همچنین از همه‌ی اساتید گروه آمار دانشگاه اصفهان و دوستان دوران تحصیل که از نظرات ایشان بهره‌مند شده‌ام، تشکر می‌کنم و آرزوی مؤفقیت و کامیابی آنها را دارم.

در پایان از پدر ارجمند و مادر مهربانم که در تمامی مراحل زندگی مشوق و یاور من بوده و همواره در تمامی مراحل تحصیل از کمک‌ها و راهنمایی‌های ارزنده و مفیدشان بهره برده‌ام از صمیم قلب تشکر می‌نمایم.

تقدیم به:

پدر بزرگوارم، به پاس زحمات بی دریغش

و مادر مهربانم،

به پاس محبت‌های پاک و خالصانه‌اش

چکیده

در سال‌های اخیر، پژوهشگران متعددی قابلیت اعتماد سیستم‌های متوالی k از n را مورد مطالعه قرار داده‌اند. سیستم‌های متوالی k از n نوع مهمی از ساختارهای منسجمی هستند که کاربردهای زیادی در زمینه‌های متفاوت دارند. این قبیل سیستم‌ها از n واحد مرتب شده در یک خط (حالت خطی)، یا یک دایره (حالت دایره‌ای)، تشکیل شده‌اند، و از کار می‌افتند (کار می‌کنند) اگر یک الگوی ویژه‌ای از واحدهای از کار افتاده‌ی (سالم) متوالی، رخ دهد. این سیستم‌ها برای مدل بندی کردن سیستم‌های مهندسی مختلف به کار می‌روند؛ از این قبیل می‌توان ایستگاه‌های ریز موج از یک شبکه‌ی مخابرات، سیستم لوله‌های نفتی، سیستم‌های خلاء سازی در شتاب دهنده‌ها، ایستگاه‌های تقویت کننده سفینه‌های فضایی و سیستم‌های سری- موازی در طراحی مدارهای الکترونیکی را نام برد.

این پایان‌نامه یک مطالعه‌ای بر روی سیستم‌های متوالی از منظرهای متفاوت است. در این رساله روی سیستم‌های متوالی k از n بویژه سیستم‌های متوالی خطی و دایره‌ای k از n متمرکز می‌کنیم. میانگین طول عمر باقیمانده تعمیم یافته (MGRL) و میانگین طول عمر گذشته تعمیم یافته (MGPL) سیستم که در گذشته برای سیستم‌های k از n مورد مطالعه قرار گرفته است، را برای این سیستم‌ها مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم. اکثر نتایج بدست آمده در متون برای حالتی است که واحدها مستقل و هم توزیع (IID) هستند. اما در بسیاری از موقعیت‌های واقعی سیستم از واحدها مستقل ولی غیر هم توزیع (INID) تشکیل شده است. در این رساله نتایج بدست آمده را تحت مدل INID برای سیستم‌های متوالی k از n (خطی و دایره‌ای) بسط می‌دهیم. علاوه بر این، مقایسه‌های تصادفی میان سیستم‌های متفاوت انجام می‌دهیم.

در فصل اول، مفاهیم پایه، تعاریف و قضایایی که در طول پایان‌نامه از آنها استفاده خواهیم کرد را بیان می‌کنیم.

در فصل ۲، بعد از ارائه تعاریف و ساختارهای متفاوت سیستم‌های متوالی، مروری از نتایج موجود بر روی سیستم‌های متوالی ارائه می‌دهیم. در این بخش، ابتدا، به ارائه روش‌های محاسبه دقیق قابلیت اعتماد سیستم‌های متوالی خطی و دایره‌ای k از $F{:}n$ پرداخته که این روش‌ها بیشتر به دو روش معادلات بازگشتی و روش‌های ترکیبی معروفند. در بسیاری از کاربردها، نیازی به قابلیت اعتماد دقیق سیستم نیست. در این مواقع، معمولاً کران‌های مناسبی که به راحتی قابل محاسبه باشند کافی خواهند بود. کران‌های قابل دسترس پائین و بالایی را برای سیستم‌های متوالی خطی و دایره‌ای k از n در بخش ۲،۳ ارائه می‌دهیم. در بخش ۲،۴، درباره‌ی قابلیت اعتماد پویای سیستم‌های متوالی بحث می کنیم. در این بخش، توزیع طول عمر سیستم متوالی خطی و دایره‌ای k از n را در یک فرم بسته بدست می‌آوریم.

با توجه به اینکه میانگین طول عمر باقیمانده (MRL) و میانگین طول عمر گذشته (MPL) و صورت‌های تعمیم یافته‌ی آنها (MGRL) و (MGPL)، کاربردهای فراوانی درقابلیت اعتماد و آزمون طول عمر دارند، در فصل ۳، به مطالعه‌ی این معیارها برای سیستم‌های متوالی خطی و دایره‌ای k از n تحت شرط اینکه واحدها مستقل و هم توزیع باشند، می‌پردازیم. این فصل را با مطالعه روی ویژگی‌های تصادفی و سالخوردگی طول‌عمر باقیمانده سیستم‌های k از n با فرض اینکه $r \leq n$ ،$n\text{-}k+1$، از واحدهای سیستم در زمان t در حال کار باشند، شروع می کنیم. اینجا سیستم‌های متوالی خطی و دایره‌ای k از n را در نظر گرفته و MGRL این سیستم‌ها را ارائه می‌دهیم. ویژگی‌های متعددی از MGRL را بررسی می‌کنیم. با توجه به بردار علامت سیستم، یک فرم آمیخته‌ای از MGRL سیستم بدست می‌آوریم. سیستم‌های متوالی وجود دارند که بعضی از واحدهای سیستم تا هر زمانی مانند t، سالم باقی

می‌مانند. در ادامه، ویژگی‌های طول عمر باقیمانده واحدهای سالم سیستم با فرض اینکه سیستم در زمان t، در حال کار باشد را مطالعه می‌کنیم. در پایان، همچنین MGPL واحدهای از کار افتاده‌ی سیستم را با فرض اینکه سیستم در زمان مفروض t، از کار افتاده را بررسی می‌کنیم.

در فصل ۴، نتایج فصل ۳ را برای حالتی که طول عمر واحدهای سیستم مستقل باشند، اما توزیع‌های احتمالی آنها یکسان نباشند، بسط داده‌ایم. سیستم‌های متوالی خطی و دایره‌ای k از n در نظر گرفته و به مطالعه‌ی ویژگی‌های قابلیت اعتماد طول عمر باقیمانده‌ی این سیستم با فرض اینکه حداقل $(n\text{-}k+1)$، $r \le n$، تا از واحدهای سیستم در حال کار باشند، پرداخته‌ایم. همچنین، احتمال اینکه تعداد معینی از واحدهای سیستم در زمان t ، $t > 0$، تحت فرض اینکه سیستم در زمان t کار کند، مورد بررسی قرار داده‌ایم.

در فصل ۵، سیستم $(n\text{-}k+1)$ از $G{:}n$ (که حالت خاص سیستم‌های متوالی k از n است) را با واحدهای مستقل و غیر هم توزیع در نظر گرفته‌ایم. با فرض اینکه در زمان t سیستم از کار افتاده باشد، طول عمر گذشته واحدهای سیستم را مطالعه کرده‌ایم. MPL واحدها تعریف شده و بعضی از خواص آن بررسی شده است. همچنین مقایسه‌های تصادفی میان طول عمر گذشته‌ی سیستم‌های متفاوت انجام گرفته است.

کلید واژه: آماره‌های ترتیبی، طول عمر باقیمانده تعمیم یافته، طول عمر گذشته تعمیم یافته، سانسور چپ، IFR (DFR)، ترتیب جزئی، میانگین طول عمر باقیمانده، نرخ خطر، نرخ خطر معکوس، قابلیت اعتماد.

فهرست مطالب

۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی ۱

۱ـ۱ مقدمه ۱

۱ـ۲ مفاهیم پایه‌ای در قابلیت اعتماد ۲

۱ـ۲ـ۱ توابع و معیارهای قابلیت اعتماد ۳

۱ـ۲ـ۲ کلاس توزیع‌های طول عمر ۶

۱ـ۲ـ۳ ترتیب بندی‌های تصادفی ۷

۱ـ۳ سیستم‌های منسجم ۹

۱ـ۴ بردار مسیر و بردار قطع کننده ۱۲

۱ـ۵ بردار علامت سیستم ۱۴

۱ـ۶ پرمانِنت ۱۵

۲ سیستم‌های متوالی k از n ۱۸

۲ـ۱ مقدمه ۱۸

۲ـ۲ محاسبه قابلیت اعتماد سیستم‌های متوالی k از n ۲۳

۲ـ۲ـ۱ محاسبه قابلیت اعتماد به روش معادلات بازگشتی ۲۴

۲ـ۲ـ۲ محاسبه قابلیت اعتماد با دیدگاه ترکیبی ۲۹

۲ـ۳ کران‌هایی برای قابلیت اعتماد سیستم‌های متوالی ۳۳

۲—۴ توزیع طول عمر سیستم‌های متوالی k از n ۳۸

۲—۵ سیستم‌های تعمیم یافته متوالی k از n ۴۴

۳ قابلیت اعتماد شرطی سیستم‌های متوالی k از n با واحدهای IID ۴۸

۳—۱ مقدمه ۴۸

۳—۲ طول عمر باقیمانده تعمیم یافته‌ی سیستم‌های متوالی k از n ۴۹
۳—۲—۱ سیستم‌های متوالی خطی k از n : $2k \geq n$ ۵۱
۳—۲—۲ سیستم‌های متوالی دایره‌ای k از n : $k+1 \leq n \leq 2k+1$ ۶۴
۳—۲—۳ سیستم‌های متوالی k از n : $1 \leq k \leq n$ ۶۷

۳—۳ طول عمر واحدهای سالم تحت فرضیاتی روی وضعیت سیستم متوالی k از n ۷۴

۳—۴ طول عمر گذشته تعمیم یافته‌ی سیستم‌های متوالی k از n ۸۱

۴ طول عمر باقیمانده تعمیم یافته‌ی سیستم‌های متوالی k از n با واحدهای INID ۸۸

۴—۱ مقدمه ۸۸

۴—۲ سیستم‌های متوالی خطی k از n : $2k \geq n$ ۸۹

۴—۳ سیستم‌های متوالی دایره‌ای k از n : $k+1 \leq n \leq 2k+1$ ۹۶

۴—۴ کاربردهایی تحت مدل PH ۹۸

۴—۵ سیستم‌های متوالی k از n : $1 \leq k \leq n$ ۱۰۰

۴—۶ توزیع شرطی تعداد واحدهای در حال کار سیستم متوالی k از n ۱۰۳

۵ طول عمر گذشته سیستم‌های $(n-k+1)$ از $n:G$ تحت مدل INID ۱۰۹

۵—۱ مقدمه ۱۰۹

۵—۲ طول عمر گذشته‌ی تعمیم یافته واحدهای سیستم ۱۱۰

۵–۳ ویژگی‌های سالخوردگی سیستم ۱۱۷

۶ نتیجه‌گیری ۱۲۳

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۱۲۶

منابع ۱۳۰

فهرست شکل‌ها

۱—۱ سیستم سری ۱۱

۱—۲ سیستم موازی ۱۲

۲—۱ نمودار یک سیستم متوالی خطی ۳ از ٦ : F ۲۲

۲—۲ نمودار یک سیستم متوالی دایره‌ای ۲ از ۸ : G ۲۳

۲—۳ نمودار سیستم ایستگاه تقویت کننده‌ی مخابرات در مثال ۱.۲ . . . . ۲۳

۳—۱ نمودار $M^{k,r}_{n,G}(t)$ برای مثال ۱.۳ . . . . ٦۱

۴—۱ نمودار$E(S_n(t) \mid T > t)$ برای سیستم های متوالی خطی ۲ از ۳ : G و ۲ از ۳ : F . ۱۰۸

۵—۱ نمودار نرخ خطرهای معکوس توزیع‌های طول عمر واحدها در مثال ٦.۵ . . . . ۱۲۰

۵—۲ نمودار MPLهای توزیع‌های طول عمر واحدها در مثال ٦.۵ . . . . ۱۲۱

۵—۳ نمودار $M^{l,۲}_{۳}(t)$ در مثال ٦.۵ . . . . ۱۲۱

۵—۴ نمودار $M^{l,۳}_{۳}(t)$ در مثال ٦.۵ . . . . ۱۲۲

فهرست جدول‌ها

۳–۱ بردار علامت سیستم‌های متوالی k از n ۷۵

مخفف‌ها

IFR: Increasing Failure Rate	نرخ شکست صعودی
DFR: Decreasing Failure Rate	نرخ شکست نزولی
IID: Independent and Identical	مستقل و هم توزیع
INID: Independent and Non-Identical	مستقل و غیر هم توزیع
GRL: General Residual Lifetime	طول عمرباقیمانده تعمیم یافته
GPL: General Past Lifetime	طول عمر گذشته تعمیم یافته
GIT: General Inactivity Time	طول عمر از کار افتادگی تعمیم یافته
MRL: Mean Residual Lifetime	میانگین طول عمر باقیمانده
MPL: Mean Past Lifetime	میانگین طول عمر گذشته
MGRL: Mean General Residual Lifetime	میانگین طول عمرباقیمانده تعمیم یافته
MGPL: Mean General Past Lifetime	میانگین طول عمر گذشته تعمیم یافته
MGIT: Mean General Inactivity Time	میانگین مدت از کار افتادگی تعمیم یافته
Lin/Con/k/n:F(G)	سیستم متوالی خطی k از $n : F(G)$
Cir/Con/k/n:F(G)	سیستم متوالی دایره‌ای k از $n : F(G)$

علامت‌ها و نمادها

آماره‌ی ترتیبی iام نمونه‌ی تصادفی n تایی	$T_{i:n}$
تابع نرخ خطر متغیر تصادفی T	$h(t)$
تابع نرخ خطر تجمعی متغیر تصادفی T	$\Lambda(t)$
تابع نرخ خطر معکوس متغیر تصادفی T	$r(t)$
میانگین طول عمر باقیمانده متغیر تصادفی T	$m(t)$
میانگین طول عمر گذشته (مدت از کار افتادگی) متغیر تصادفی T	$m^*(t)$
طول عمر سیستم متوالی خطی k از n : $F(G)$	$T_{k\|n:F}$ $(T_{k\|n:G})$
طول عمر سیستم متوالی دایره‌ای k از n : $F(G)$	$T^C_{k\|n:F}$ $(T^C_{k\|n:G})$
میانگین طول عمر باقیمانده سیستم متوالی خطی k از n : $F(G)$	$m_{k\|n:F}(t)(m_{k\|n:G}(t))$
میانگین طول عمر باقیمانده سیستم متوالی دایره‌ای k از n : $F(G)$	$m^C_{k\|n:F}(t)(m^C_{k\|n:G}(t))$
طول عمر باقیمانده تعمیم یافته سیستم متوالی خطی k از n : $F(G)$	$T^{k,r}_{n,F}(t)(T^{k,r}_{n,G}(t))$
طول عمر باقیمانده تعمیم یافته سیستم متوالی دایره‌ای k از n : $F(G)$	$T^{k,r}_{n,F,C}(t)(T^{k,r}_{n,G,C}(t))$
میانگین طول عمر باقیمانده تعمیم یافته سیستم متوالی خطی k از n : $F(G)$	$M^{k,r}_{n,F}(t)(M^{k,r}_{n,G}(t))$
میانگین طول عمر باقیمانده تعمیم یافته سیستم متوالی دایره‌ای k از n : $F(G)$	$M^{k,r}_{n,F,C}(t)(M^{k,r}_{n,G,C}(t))$
طول عمر گذشته تعمیم یافته سیستم $(n-k+1)$ از n : G	$X^{l,k,n}_t$
میانگین طول عمر گذشته تعمیم یافته سیستم $(n-k+1)$ از n : G	$M^{l,k}_n(t)$
قابلیت اعتماد سیستم متوالی خطی (دایره‌ای) k از n : F	$R_L(k,n)$ $(R_C(k,n))$
تابع قابلیت اعتماد سیستم متوالی خطی k از n : $F(G)$	$R_{k\|n:F}(t)$ $(R_{k\|n:G}(t))$

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱ — ۱ مقدمه

در چند دهه‌ی گذشته علاقه‌ی زیادی در بهبود کیفیت، سودمندی، و قابلیت اعتماد محصولات به وجود آمده است. رقابت جهانی و تقاضای بالای مشتری برای محصولات سالم و قابل اعتماد، از دلایل مهم این علاقه بوده است. بدین منظور بسیاری از کارخانجات و شرکت‌ها، مهندسین طراح و مهندسین تولیدات خود را در استفاده‌ی مناسب از آزمایشات و تجربیات طراحی و کنترل فرایند آماری، آموزش داده‌اند. امروزه قابلیت اعتماد در خصوصیات و ویژگی‌های محصول نهفته است که پتانسیل به وجود آوردن یک رقابت خوب و سالم جهانی را دارد.

سرعت پیشرفت در تکنولوژی، گسترش محصولات سطح بالا و پیچیده، رقابت شدید جهانی و افزایش تقاضای مشتریان، تولید کنندگان را برای تولید محصولات با کیفیت بالا تحت فشارهای جدی قرار داده است. مشتریان انتظار دارند که محصولات خریداری شده قابل اعتماد و سالم باشند. سیستم‌ها، وسایل، ماشین‌ها، دستگاه‌ها و غیره باید با احتمال بالا قادر به انجام دادن هدفشان تحت شرایط کارکرد معمولی برای یک دوره‌ی زمانی معین باشند.

اغلب قابلیت اعتماد به عنوان احتمال اینکه سیستم، وسیله، ماشین، دستگاه و غیره هدف کاری‌شان را تحت شرایط کارکرد معمولی برای یک دوره‌ی زمانی معین انجام دهند، تعریف می‌شود. بهبود قابلیت اعتماد قسمت مهمی از بهبود کیفیت محصول به حساب می‌آید. هم برای تولید کننده هم برای خریدار، قابلیت اعتماد یکی از مهمترین مشخصه‌های تعریف شده از کیفیت یک محصول یا سیستم می‌باشد. قابلیت اعتماد

بالا از طریق تلاش برای طراحی‌های بهینه، انتخاب مواد اولیه و ورودی‌های دیگر، خط تولید، کیفیت بیمه یا گارانتی (خدمات بعد از فروش)، روش‌های نگهداری مناسب، و بسیاری از تصمیمات و فعالیت‌های مربوطه، بعلاوه با در نظر گرفتن هزینه‌های تولید، خرید و حق مالکیت محصول، بدست می آید. تعاریف زیادی از کیفیت وجود دارد، اما نظر کلی بر این است که یک محصول با عدم قابلیت اعتماد یک محصول با کیفیت بالا نیست. کندرا[۱] (۱۹۹۳) تاکید می کرد که "قابلیت اعتماد کیفیت در زمان است".

این فصل به صورت زیر مرتب شده است. ابتدا در بخش ۱—۲ به بیان و تعاریف مفاهیم قابلیت اعتماد، از جمله توابع و معیارهای قابلیت اعتماد، کلاس‌های توزیع طول عمر و ترتیب بندی‌های تصادفی، می‌پردازیم. خلاصه‌ای از سیستم‌های منسجم[۲] و بردارهای میسر[۳] و بردار قطع کننده[۴] سیستم را به ترتیب در بخش‌های ۱—۳ و ۱—۴ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش ۱—۵ مفهوم بردار علامت[۵] را بیان کرده و به همراه آن، بعضی نتایج بدست آمده برای بردار علامت سیستم منسجم ارائه می‌دهیم. سرانجام، فصل را با توصیف پرمانِنت[۶] و بررسی چند ویژگی آن به پایان می‌بریم.

۱—۲ مفاهیم پایه‌ای در قابلیت اعتماد

فرض کنید متغیر تصادفی T روی تکیه گاه (L,U) که U,L حقیقی مقدار هستند، دارای تابع توزیع F_T و تابع چگالی f_T باشد. معمولاً در مطالعات قابلیت اعتماد T را متغیر زمان یا طول عمر یک واحد (یا مولفه) یا سیستم در نظر می‌گیرند، لذا T نامنفی با تکیه گاه $(0,\infty)$ است. در این بخش چند تابع مهم در قابلیت اعتماد را معرفی می‌کنیم.

---

[۱] Condra
[۲] Coheren systems
[۳] Path vector
[۴] Cut vector
[۵] Signature
[۶] Permanent

۱—۲—۱ توابع و معیارهای قابلیت اعتماد

فرض کنید T یک متغیر تصادفی طول عمر با فضای مقادیر $[\circ, \infty)$، دارای تابع توزیع (به طور مطلق پیوسته) F و تابع چگالی احتمال f باشد. آنگاه تابع بقا یا قابلیت اعتماد[۷] T به صورت زیر

$$\bar{F}(t) = P(T > t) = 1 - F(t),$$

تعریف می‌شود. واضح است که $\bar{F}$ تابعی نزولی از t است و $\bar{F}(\circ) = 1$ و $\bar{F}(\infty) = \circ$.

در سراسر این رساله عبارت صعودی را به جای ناکاهشی و عبارت نزولی را به جای ناافزایشی استفاده می‌کنیم.

تابع بقا احتمال خرابی یا از کار افتادگی را در زمانی بعد از زمان داده شده بیان می‌کند. برای بررسی سالخوردگی در هر لحظه از زمان، تابع نرخ خطر[۸] استفاده می‌شود. این معیار نقش اساسی در مطالعات قابلیت اعتماد و تحلیل بقا ایفا می‌کند.

تعریف ۱.۱ تابع نرخ خطر متغیر تصادفی T که با $h(t)$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(t) = \lim_{\delta \to \circ} \frac{P(t < T \leq t + \delta | T > t)}{\delta} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)},$$

برای هر t در تکیه‌گاه T که $\bar{F}(t) > \circ$.

در حقیقت مفهوم تابع نرخ خطر بیان ریاضی تاثیر سن و گذر زمان بر بقای واحد زنده است. یعنی اگر واحدی تا زمان t زنده بماند، می‌خواهیم بدانیم چقدر احتمال دارد در بازه‌ی زمانی کوچک بعد از t، از بین برود. باید توجه کرد که تابع نرخ خطر یک احتمال نیست و فقط نرخ شکست آنی سیستم را بیان می‌کند.

به تابع $h(t)$، نرخ شکست[۹]، نیروی مرگ[۱۰] و نرخ شدت[۱۱] نیز می‌گویند. در ادامه و در طول این پایان‌نامه نام نرخ خطر را برای تابع $h(t)$ به کار خواهیم برد.

انتگرال تابع نرخ خطر روی بازه‌ی $[\circ, t)$ یعنی

$$\Lambda(t) = \int_{\circ}^{t} h(x) dx,$$

[۷] Reliability function
[۸] Hazard rate function
[۹] Failure rate
[۱۰] Force of mortality
[۱۱] Intensity rate

را تابع نرخ خطر تجمعی[۱۲] می‌نامند.

معیار دیگری که در مطالعات طول عمر به کار می‌رود، تابع نرخ خطر معکوس[۱۳] $r(t)$ است. این تابع معمولاً در مطالعه‌ی زمان سپری شده از کار افتادن یک واحد و در آزمون‌های طول عمر ظاهر می‌شود.

تعریف ۲.۱ تابع نرخ خطر معکوس متغیر تصادفی T برای هر t که $F(t) > 0$، به صورت

$$r(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{P(t - \delta < T < t | T \leq t)}{\delta} = \frac{f(t)}{F(t)}$$

تعریف می‌شود.

مفهوم تابع نرخ خطر معکوس این است که با فرض اینکه سیستم قبل از زمان t از کار افتاده باشد چقدر احتمال دارد که این از کارافتادگی بلافاصله قبل از t بوده باشد.

در مسائل طول عمر اغلب با حالاتی رو به رو می‌شویم که طول عمر واحد زنده بیشتر از t است و علاقه‌مندیم خواص متغیر را با دانستن این مطلب بررسی کنیم. یکی از شاخص‌های اصلی برای بررسی رفتار طول عمر متغیر، باقیمانده‌ی عمر است که به صورت $T_t = \{T - t | T > t\}$، بیان می‌شود و تابع قابلیت آن برابر است با:

$$\bar{F}_t(x) = P(T > x + t | T > t) = \frac{\bar{F}(x + t)}{\bar{F}(t)}.$$

تابع میانگین طول عمر باقیمانده[۱۴] (MRL) از جمله معیارهای مهم و پرکاربرد قابلیت اعتماد است که متوسط زمان باقیمانده تا از کار افتادن یک واحد را نشان می‌دهد.

تعریف ۳.۱ فرض کنید T متغیر طول عمر یک واحد با میانگین متناهی و تابع توزیع $F(t)$ باشد. تابع میانگین طول عمر باقیمانده که با $m(t)$ نمایش می‌دهیم، برای t هایی که $\bar{F}(t) > 0$، به صورت زیر

$$m(t) = E(T - t \mid T > t) = \frac{\int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(t)}$$

تعریف می‌شود. واضح است که $m(0) = E(T)$.

[۱۲] Cumulative hazard rate function
[۱۳] Reversed hazard rate function
[۱۴] Mean residual lifetime function

معیار دیگری که متوسط زمان سپری شده از کار افتادن یک واحد را نشان می‌دهد، تابع میانگین مدت از کار افتادگی[۱۵] (MIT) یا تابع میانگین گذشته‌ی عمر [۱۶] (MPL) می‌باشد.

تعریف ۴.۱ فرض کنید T متغیر طول عمر یک واحد با میانگین متناهی و تابع توزیع $F(t)$ باشد. تابع میانگین مدت از کار افتادگی که با $m^*(t)$ نمایش می‌دهیم، برای t هایی که $F(t) > 0$، به صورت زیر

$$m^*(t) = E(t - T \mid T \leq t) = \frac{\int_0^t F(x)dx}{F(t)}$$

تعریف می‌شود.

برای پیشینه و جزئیات بیشتر این تابع، به ارتگا[۱۷] (۲۰۰۹) و اسدی[۱۸] و برد[۱۹] (۲۰۱۱) مراجعه کنید.

تابع نرخ خطر، نرخ خطر معکوس، میانگین طول عمر باقیمانده و میانگین گذشته‌ی عمر توزیع جامعه را به طور یکتا تعیین می‌کنند. خواص تابع MRL در گس[۲۰] و پروشان[۲۱] (۱۹۸۸) مورد مطالعه قرار گرفته است.

در اینجا لازم است که مفهوم تبادل‌پذیری[۲۲] را تعریف کنیم.

تعریف ۵.۱ یک دنباله از متغیرهای طول عمر $T_1, T_2, \ldots, T_n$، را تبادل پذیر گوییم اگر برای هر n،

$$Pr(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \ldots, T_n \leq t_n) = Pr(T_{\pi(1)} \leq t_1, T_{\pi(2)} \leq t_2, \ldots, T_{\pi(n)} \leq t_n),$$

برای هر جایگشت $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ از $\{1, 2, \ldots, n\}$، یعنی توزیع توام (تابع بقا) $T_1, T_2, \ldots, T_n$ در $t_1, t_2, \ldots, t_n$ متقارن باشد.

سیستم‌ها با واحدهای تبادل پذیر به طور گسترده در متون مختلف مطالعه شده‌اند. برای مثال باسان[۲۳] و اسپیزیچینوُ[۲۴] (۲۰۰۵)، ناوارو[۲۵] و ریچلیک[۲۶] (۲۰۰۷) و ناوارو و بالاکریشنان[۲۷] (۲۰۱۰) را ببینید.

[۱۵] Mean inactivity time function
[۱۶] Mean past lifetime function
[۱۷] Ortega
[۱۸] Asadi
[۱۹] Berred
[۲۰] Guess
[۲۱] Proschan
[۲۲] Exchangeability
[۲۳] Bassan
[۲۴] Spizzichino
[۲۵] Navarro
[۲۶] Rychlik
[۲۷] Balahrishnan

۱–۲–۲ کلاس توزیع‌های طول عمر

در نظریه قابلیت اعتماد، به منظور توصیف متغیرهای تصادفی طول عمر و بر مبنای مفاهیم طول عمر، کلاس‌های مختلفی از توزیع‌ها تعریف شده‌اند که یکی از مهمترین آنها، کلاس توزیع‌های دارای نرخ خطر صعودی[۲۸] (IFR) است. یک مفهوم دوگان در برابر توزیع‌های IFR، توزیع‌هایی با نرخ خطر نزولی[۲۹] (DFR) می‌باشند که در تعریف زیر هر دوی این کلاس توزیع‌ها را توصیف می‌کنیم.

تعریف ۶.۱ گوییم توزیع متغیر تصادفی طول عمر با تابع بقای $\bar{F}$ متعلق به کلاس IFR (DFR) است اگر برای هر $x > ۰$، $\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}$ تابعی نزولی (صعودی) از t باشد. در صورتی که F دارای تابع چگالی f باشد این تعریف معادل است با اینکه $h(t)$ تابع صعودی (نزولی) از t باشد.

لازم به ذکر است که همه‌ی نرخ خطرها یکنوا[۳۰] نیستند، به طور مثال توزیع لگ نرمال دارای تابع نرخ خطری است که ابتدا صعود می‌کند تا به نقطه‌ی ماکزیمم خود برسد و سپس نزول می‌کند. تابع نرخ خطر برخی پدیده‌ها وانی شکل است. تعریف کلی این نوع توابع نرخ خطر که اصطلاحاً U– شکل[۳۱] (یا وانی شکل) نامیده می‌شوند به صورت زیر بیان می‌شود:

تعریف ۷.۱ گوییم توزیع متغیر تصادفی طول عمر با تابع بقای به طور مطلق پیوسته $\bar{F}$ متعلق به کلاس نرخ خطر U– شکل است اگر نرخ خطر $h(t)$ در فاصله‌ی $[s_۰, \infty)$ دارای شکل U باشد. یعنی اگر مقادیر $s_۰$، $t_۱$ و $t_۲$ وجود داشته باشند به طوری که $۰ \leq s_۰ \leq t_۱ \leq t_۲ \leq \infty$، و داشته باشیم:

$$h(t)\begin{cases} \text{اکیدا نزولی باشد}, & s_۰ \leq t < t_۱; \\ \text{ثابت باشد}, & t_۱ \leq t < t_۲; \\ \text{اکیدا صعودی باشد}, & t_۲ \leq t. \end{cases}$$

$t_۱$ و $t_۲$ را نقاط تغییر $h(t)$ می‌نامند.

کلاس توزیع‌های متعددی وجود دارد که برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به بارلو[۳۲] و پروشان (۱۹۸۱) مراجعه کنید.

[۲۸] Increasing failur rate
[۲۹] decreasing failur rate
[۳۰] Monotone
[۳۱] Bathtub-shaped
[۳۲] Barlow