دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

میانگین پذیری جبر های اندازه

نگارش:

سعیده ندرلو

استاد راهنما: دکتر حبیب امیری

استاد مشاور: دکتر سعید مقصودی

مهر ۱۳۸۹

چکیده

فرض کنید A یک جبر باناخ و E یک $A-$ مدول باناخ دو طرفه باشد. نگاشت خطی $D:A\to E$ را یک مشتق می نامیم هرگاه $D(ab)=D(a)b+aD(b)$. مشتق D را داخلی نامیم هرگاه وجود داشته باشد $x\in E$ که $D(a)=ax-xa$ برای هر $a\in A$. جبرباناخ A را میانگین پذیر گوئیم هرگاه هر مشتق $D:A\to E^*$ داخلی باشد که در آن E^* دوآل $A-$ مدول باناخ دوطرفهٔ E می باشد. جبر باناخ A را میانگین پذیر ضعیف گوئیم هرگاه هر مشتق $D:A\to A^*$ داخلی باشد. گروه موضعاً فشرده G را میانگین پذیر گوئیم اگر یک میانگین چپ پایا روی $L^\infty(G)$ موجود باشد که در آن منظور از یک میانگین، تابعک خطی روی $L^\infty(G)$ است که $\|m\|=m(1)=\ <m,1>\ =1$ و پایایی یعنی

$$\forall a\in G, f\in L^\infty(G) \quad : \quad m(L_a f)=m(f)$$

که در آن $L_af:G\to G$ بصورت $L_af(x)=f(a^{-1}x)$ تعریف می شود.

اگر فرض کنیم G یک فضای توپولوژیک باشد مجموعهٔ تمام اندازه های بورل منظم مختلط مقدار μ را با $M(G)$ نشان می دهیم.

در این پایان نامه ثابت می کنیم جبر اندازهٔ $M(G)$ از یک گروه موضعاً فشردهٔ G بعنوان یک جبر باناخ میانگین پذیر است اگر و تنها اگر G گسسته و بعنوان یک گروه میانگین پذیر باشد. و همچنین در صورتیکه G یک گروه موضعاً فشردهٔ باشد $M(G)$ میانگین پذیر ضعیف است اگر و تنها اگر مشتق نقطه ای پیوسته و غیر صفر روی یک مشخصه از $M(G)$ موجود نباشد.

کلمات کلیدی : جبر اندازه، مشتق، مشتق داخلی، میانگین پذیری، میانگین پذیری ضعیف، مشخصه.

فهرست مندرجات

پیش گفتار

این پایان نامه متشکل از ۴ فصل می باشد که فصل اول حاوی تعاریف و قضایای مقدماتی است که در تجزیه و تحلیل مطالب در فصول بعد بسیار مهم می باشد. بیشتر مطالب این فصل از مرجع [۱۲] آورده شده اند.

در فصل دوم با تعریف مشتق و مشتق داخلی، میانگین پذیری و میانگین پذیری ضعیف را تعریف می کنیم. سپس قسمت هایی از مرجع [۱] را به تفضیل توضیح می دهیم و به یک نتیجهٔ مهم می رسیم و آن اینکه در صورتیکه گروه G غیر گسسته و آبلی باشد آنگاه یک مشتق نقطه ای غیر صفر و پیوسته روی یک مشخصهٔ معین از $M(G)$ موجود است.

در فصل سوم ۳ قضیهٔ مهم را بیان می کنیم و با اثبات چند لم و قضیهٔ مهم در این فصل، یک تابعک خطی مثبت انتقال پایا روی $M(G)$ می سازیم و در نهایت در فصل چهارم ۳ قضیهٔ مهم بیان شده در فصل سه را اثبات می کنیم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مورد نیاز

در این بخش تعاریف و قضایای مورد نیاز در پایان نامه که اکثراً از مرجع [۱۲] انتخاب شده اند را ارائه می دهیم. قضایا و لم های موجود در این بخش اکثراً بدون اثبات بوده و تنها در دو مورد مهم، لم (۱.۲۷) و قضیهٔ (۱.۲۸) اثبات را نیز ارائه کرده ایم.

تعریف ۱.۱ فرض کنیم X یک مجموعه باشد.

(الف) خانوادهٔ $\mathcal{M}$ از زیر مجموعه های X را یک $\sigma-$ جبر گوییم، هرگاه دارای خواص زیر باشد:

۱) $X \in \mathcal{M}$.

۲) اگر $E \in \mathcal{M}$، آنگاه $E^c \in \mathcal{M}$. در اینجا E^c متمم E نسبت به X است.

۳) اگر $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{M}$، آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$.

(ب) اگر $\mathcal{M}$ یک $\sigma-$ جبر در X باشد، آنگاه $(X, \mathcal{M})$ را یک فضای اندازه و اعضای $\mathcal{M}$ را

مجموعه های اندازه پذیر در X می‌نامیم.

(ج) هر گاه $(X,\mathcal{M})$ یک فضای اندازه باشد، نگاشت $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ را اندازه پذیر گوییم، اگر به ازای هر مجموعهٔ باز V در $\mathbb{C}$، $f^{-1}(V)$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر در X باشد.

(د) یک اندازهٔ مثبت، تابعی $[0,\infty]$ — مقدار مانند μ است که روی یک σ — جبر مانند $\mathcal{M}$ تعریف شده است به طوری که $\mu(\emptyset) = 0$ و μ جمعی شمارش پذیر است، یعنی برای دنبالهٔ E_i از عناصر دو به دو مجزای $\mathcal{M}$ داریم :

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

تعریف ۲.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد.

(الف) اگر $B(X)$ کوچکترین σ — جبر شامل تمام زیر مجموعه‌های باز X باشد، آنگاه $B(X)$ را σ — جبر مجموعه‌های بورل X و اعضای $B(X)$ را مجموعه‌های بورل گوییم.

(ب) اندازهٔ μ روی X را بورل می نامیم، اگر روی $B(X)$ تعریف شده باشد.

(ج) یک اندازهٔ مختلط بورل روی X یک تابع مختلط — مقدار μ تعریف شده روی $B(X)$ است به طوری که جمعی شمارش پذیر است.

متناظر به هر اندازهٔ مختلط μ روی X تابع $|\mu|: B(X) \longrightarrow [0,\infty)$ را تغییر کل μ می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$|\mu|(E) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|, (E \in B(X))\}.$$

که درآن سوپریمم روی همهٔ افرازهای متناهی $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ از E متشکل از مجموعه های بورل تغییر می کند. در این صورت $|\mu|$ یک اندازهٔ مثبت متناهی روی X است. (قضیه (۲.۶) از

[۲۳] را ببینید.)

(د) اندازهٔ مختلط μ را منظم می نامیم اگر $|\mu|$ منظم باشد، یعنی منظم درونی و بیرونی روی مجموعه های بورل باشد. یادآوری می کنیم که اندازهٔ مثبت ν منظم درونی روی زیر مجموعهٔ بورل E از X است اگر :

$$\nu(E) = \sup\{\nu(K) : \text{فشرده } K \subseteq E\}.$$

ومنظم بیرونی روی E است اگر :

$$\nu(E) = \inf\{\nu(V) : \text{باز } V \supseteq E\}.$$

(هـ) اندازهٔ بورل μ را رادون می نامیم اگر روی مجموعه های فشرده متناهی و روی مجموعه‌های بورل منظم بیرونی و روی مجموعه های باز منظم درونی باشد.

(و) برای هر عدد مختلط λ و اندازه های مختلط μ و ν تعریف می کنیم :

$$\begin{aligned}(\mu+\nu)(E) &= \mu(E)+\nu(E)\\ (\lambda\mu)(E) &= \lambda\mu(E)\\ \|\mu\| &= |\mu|(X).\end{aligned}$$

در این صورت مجموعهٔ $M(X)$ متشکل از تمام اندازه های بورل منظم مختلط مقدار μ است که همراه با عمل جمع برداری و ضرب اسکالر و نرم فوق یک فضای باناخ است. برای مشاهدهٔ جزئیات بیشتر می توان به فصل (۱۹) از [۱۲] مراجعه کرد.

(ز) فرض کنیم $L^\infty(X,\mu)$ مجموعهٔ همه توابع اندازه پذیر مختلط — مقدار f روی X باشد، به طوری که

$$\| f \|_\infty = \inf\{M \in \mathbb{R} \mid \mu(\{t \mid | f(t) | > M\}) = 0\} < \infty.$$

دوتابع $f,g \in L^\infty(X,\mu)$ را یکسان می گیریم اگر $\| f - g \|_\infty = 0$؛ یعنی f و g تقریباً[۴] همه جا برابر باشند و می نویسیم $f \equiv g$. در این صورت $L^\infty(X,\mu)$ همراه با عمل جمع معمولی توابع که همان جمع نقطه به نقطه است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$(f+g)(x) = f(x) + f(y)$$

و نرم $\| . \|_\infty$ یک فضای باناخ است. خانواده[۴] تمام توابع اندازه پذیر مختلط — مقدار f روی X با شرط

$$(\int_X | f |^p \, d\mu)^{1/p} < \infty.$$

را با $L^p(X,\mu)$ نشان می دهیم. فضای $L^p(X,\mu)$ با عمل جمع توابع و نرم زیر یک فضای باناخ است.

$$\| f \|_p = (\int_X | f |^p \, d\mu)^{1/p}, f \in L^p(X,\mu).$$

حال فرض کنیم μ اندازه[۴] شمارشی روی مجموعه[۴] X باشد. در این صورت فضای $L^p(X,\mu)$ را با نماد $l^p(X)$ نمایش می‌دهیم. بنابر این $l^p(X)$، فضای همه[۴] توابع $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که:

$$\| f \|_p = (\Sigma_{x \in X} \mid f(x) \mid^p)^{1/p} < \infty.$$

که در آن :

$$\Sigma_{x \in X} \mid f(x) \mid^p = \sup_F \{\Sigma_{x \in F} \mid f(x) \mid^p : \text{متناهی } F \subseteq X\}.$$

قضیه ۳.۱ (فوبینی) فرض کنیم μ و ν دو اندازهٔ مثبت به ترتیب روی فضاهای اندازهٔ X و Y باشند و f یک تابع مختلط − مقدار $\mu\times\nu$ − اندازه پذیر روی $X \times Y$ باشد که خارج از مجموعهٔ $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ تقریباً همه جا صفر می‌شود، که در آن هر E_n مجموعهٔ $\mu\times\nu$ − اندازه پذیر است و $(\mu\times\nu)(E_n) < \infty$. در این صورت سه انتگرال زیر: $\int_Y\int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y)$, $\int_X\int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x)$, $\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu)(x,y)$. متناهی و مساوی اند اگر و تنها اگر یکی از انتگرال های زیر متناهی باشد:

$$\int_Y\int_X \mid f(x,y)\mid d\mu(x)d\nu(y),$$

$$\int_X\int_Y \mid f(x,y)\mid d\nu(y)d\mu(x),$$

$$\int_{X\times Y} \mid f(x,y)\mid d(\mu\times\nu)(x,y).$$

برهان . به قضیهٔ ۸.۸ از [۲۳] رجوع کنید. □

تعریف ۴.۱ فرض کنید μ یک اندازهٔ مثبت بر σ − جبر $\mathcal{M}$ بوده و ν یک اندازهٔ دلخواه باشد. گوییم ν نسبت به μ پیوستهٔ مطلق است و می نویسیم

$$\nu \ll \mu.$$

اگر به ازای هر $E\in\mathcal{M}$ که $\mu(E)=0$، داشته باشیم $\mid\nu\mid(E)=0$.

تعریف ۵.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد.

(الف) مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط − مقدار روی X را با $C(X)$ نشان می

دهیم. $C(X)$ همراه با عمل های جمع معمولی توابع و ضرب اسکالر یک فضای برداری است. به علاوه برای $f \in C(X)$ محمل f به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$supp(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

(ب) مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط — مقدار کراندار روی X را با $C_b(X)$ نشان می دهیم. بنابراین $C_b(X)$ یک زیر فضای $C(X)$ است و همراه با نرم $\|\cdot\|_\infty$ یک فضای باناخ است. یادآوری می کنیم که

$$\| f \|_\infty = \sup\{| f(x) | : x \in X\} \ ; \ f \in C_b(X).$$

(ج) مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط — مقدار f روی X را که در بی نهایت صفر می شوند را با $C_0(X)$ نشان می دهیم. در بی نهایت صفر شدن بدین معنی است که برای هر $\epsilon > 0$ زیر مجموعهٔ فشردهٔ K_ϵ از X موجود است که برای هر $x \in X \setminus K_\epsilon$ داریم $| f(x) | < \epsilon$.

همچنین $C_0(X)$ همراه با نرم $\|\cdot\|_\infty$ یک فضای باناخ است.

(د) مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط — مقدار f روی X با محمل فشرده را با $C_{00}(X)$ یا $C_c(X)$ نشان می دهیم. $C_{00}(X)$ همراه با نرم $\|\cdot\|_\infty$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۱.۶ یک نیم گروه عبارت است از مجموعهٔ ناتهی B با عمل دو تایی
$\begin{cases} B \times B \to B \\ (a,b) \to ab \end{cases}$ که در شرط $a(bc) = (ab)c$ برای هر $a,b,c \in B$ صدق می کند.

در واقع نیم گروه یک مجموعه با عمل دو تایی شرکت پذیر است. یک گروه عبارت است از یک نیم گروه که با عمل فوق دارای عضو خنثی و عضو وارون باشد. اگر B گروه باشد و

$a \in B$ نگاشت های $\begin{cases} l_a : B \to B \\ l_a(b) = ab \end{cases}$ ، $\begin{cases} r_a : B \to B \\ r_a(b) = ba \end{cases}$ و $\begin{cases} L : B \to B \\ L(b) = b^{-1} \end{cases}$ را بترتیب انتقال چپ، انتقال راست و وارون می نامیم. همچنین نگاشت $b \to aba^{-1}$ را خود ریختی داخلی روی B تولید شده توسط a می نامیم.

با توجه به تعاریف بالا فرض کنید B و I دو گروه و همریختی $\tau : i \to \tau_i$ از I به زیر گروهی از خود ریختی های B باشد بعبارت دیگر

$$\forall i, i' \in I \qquad \tau_i \tau_{i'} = \tau_{ii'}.$$

حاصلضرب نیم مستقیم[1] B در I تعریف شده توسط τ را با $B \ltimes_\tau I$ یا $B \circledS I$ نمایش می دهیم که مجموعهٔ پایهٔ آن همان حاصلضرب دکارتی $B \times I$ است که آن را به عمل دو تایی زیر مجهز کرده ایم:

$$(b, i)(b', i') = (b(\tau_i(b')), ii') \qquad \forall b, b' \in B, i, i' \in I$$

به راحتی می توان دید $B \ltimes_\tau I$ (حاصلضرب نیم مستقیم B در I) با عمل فوق یک گروه است.

تعریف ۷.۱ مجموعهٔ G را یک گروه توپولوژیک[2] نامیم، هرگاه G یک فضای توپولوژیک هاسدورف به همراه شرایط زیر باشد.

۱) G یک گروه باشد.

---

[1] semidirect product

[2] topological group

۲) نگاشت وارون $\iota : G \to G$ با ضابطه $\iota(g) = g^{-1}$، پیوسته باشد.

۳) نگاشت ضرب $m : G \times G \to G$ با ضابطه $m(g_1, g_2) = g_1 g_2$، پیوسته باشد.

گروه توپولوژیک G را گسسته خوانیم هرگاه توپولوژی آن توپولوژی گسسته باشد یعنی هر زیر مجموعهٔ آن باز باشد.

تعریف ۸.۱ گروه توپولوژیک G را موضعاً فشرده[۳] گوئیم هرگاه هر نقطهٔ آن دارای یک همسایگی با بستار فشرده باشد. به عبارت دیگر برای هر $x \in G$ همسایگی بازی از x مانند U موجود است که $\overline{U}$ فشرده می باشد.

قضیه ۹.۱ فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد آنگاه برای هر همسایگی U از e همسایگی V از e یافت می شودکه: $\overline{V} \subset U$

برهان . به قضیهٔ ۴.۷ از [۱۲] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۰.۱ اگر H یک زیر گروه نرمال از G باشد نگاشت طبیعی ϕ از G به G/H یک نگاشت پیوسته و باز است.

برهان . به قضیهٔ ۵.۲۶ از [۱۲] مراجعه کنید. □

لم ۱۱.۱ (لم اوریسون)

فرض کنید X فضای موضعاً فشرده و هاسدورف، $K \subseteq X$ فشرده، $A \subseteq X$ بسته و $A \cap K = \emptyset$

[۳] locally compact

باشد. در این صورت تابعی با محمل فشرده روی X مانند $f : X \to [0, 1]$ موجود است

بطوریکه روی K، $f \equiv 1$ و روی A، $f \equiv 0$ باشد.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنیم A یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$، میدان اعداد مختلط، همراه با

عمل ضرب $(x, y) \mapsto xy$ از $A \times A$ به A باشد به طوری که برای هر $x, y, z \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$

داشته باشیم :

(الف) $x(yz) = (xy)z$.

(ب) $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$.

(ج) $\lambda(y + z) = \lambda y + \lambda z$.

(د) $(x + y)z = xz + yz$.

در این صورت A را یک جبر می‌نامیم.

جبر A را یک جبر نرمدار گوئیم هرگاه روی A نرم $\|.\|$ موجود باشد بطوریکه عمل ضرب با

$\|.\|$ به صورت زیر مربوط شود

$$\forall\, a, b \in A, \quad \|ab\| \leq \|a\|\|b\|$$

تعریف ۱۳.۱ جبر نرمدار A را جبر باناخ گوئیم هرگاه A با نرم مربوطه کامل باشد. یعنی هر

دنباله[۶] کشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۱.۱۴ فرض کنیم A و B دو جبر روی میدان اعداد مختلط باشند. تبدیل خطی $\phi : A \to B$ را همریختی گوئیم هرگاه

$$\forall a \in A \ , \ b \in B \quad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

در این صورت با توجه به تعریف قبل یک همریختی از جبر A به میدان اعداد مختلط را یک مشخصه[۴] می نامند.

تعریف ۱.۱۵ فرض کنید A یک جبر روی $\mathbb{C}$ باشد. منظور از یک برگشت [۵] روی A عبارت است از یک نگاشت از A به A که با $a \mapsto a^*$ نمایش داده می شود به طوری که برای هر $a, b, c \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ داریم:

۱) $(ab)^* = b^*a^*$

۲) $(a+b)^* = a^* + b^*$

۳) $(a^*)^* = a$

۴) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$

تعریف ۱.۱۶ یک $*-$ جبر بلناخ، یک جبر باناخ مجهز به یک برگشت است بطوریکه

$$||a^*|| = ||a|| \qquad (a \in A)$$

[۴] character

[۵] Involution

تعریف ۱۷.۱ یک $*$− جبر بلناخ را یک c^*− جبر گوئیم هرگاه

$$||a^*a|| = ||a||^2$$

قضیه ۱۸.۱ (گلفاند) اگر A یک C^* − جبر آبلی باشد فضای موضعاً فشرده‌ی X موجود است که A با $C_0(X)$، $*$ − ایزومورف است. یعنی $\phi : A \to C_0(X)$ به صورت زیر

$$\phi(a^*) = \overline{\phi(a)} \quad , \quad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

یک به یک و پوشاست.

تعریف ۱۹.۱ فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک موضعاً فشرده باشد. منظور از اندازه‌ی هار چپ اندازه‌ی بورل منظم و مثبت λ بر G است به طوری که برای هر $g \in G$ و هر مجموعه‌ی بورل $G \supset E$ داشته باشیم

$$\lambda(gE) = \lambda(E).$$

و همچنین اندازه‌ی بورل منظم و مثبت λ بر G به طوری که $\lambda(Eg) = \lambda(E)$ برای هر $g \in G$ و هر مجموعه‌ی بورل $G \supset E$ باشد را اندازه‌ی هار راست نامیم.

تعریف ۲۰.۱ فرض کنیم λ اندازه‌ی هار چپ بر گروه موضعاً فشرده‌ی G باشد. مجموعه‌ی تمام توابع مختلط − مقدار و بورل اندازه پذیر φ روی G که نسبت به λ انتگرال پذیر هستند با نرم

$$\| \varphi \|_1 = \int_G | \varphi | \, d\lambda.$$

را با $L^1(G)$ نمایش می‌دهیم. $L^1(G)$ با جمع معمولی توابع و ضرب اسکالر یک فضای برداری است و با نرم $\|.\|_1$ یک فضای باناخ است. بین عناصر $L^1(G)$ ضربی به نام ضرب پیچشی به صورت زیر تعریف می شود.

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_G \varphi(xy^{-1})\psi(y)d\lambda(y) \qquad \left(\varphi, \psi \in L^1(G)\right)$$

$L^1(G)$ با این ضرب یک جبر باناخ می شود. (فصل (۱۹) از [۱۲] را ببینید.)

تعریف ۲۱.۱ فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده و $\mu, \nu \in M(G)$. پیچش ν و μ را با $\mu * \nu$ نمایش می دهیم و با فرض این که $E \in B(G)$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned}(\mu * \nu)(E) &= (\mu \times \nu)(m^{-1}(E)) \\ &= (\mu \times \nu)(\{(x,y) | xy \in E\}).\end{aligned}$$

که در آن m عمل ضرب گروه است. می توان با استفاده از قضیهٔ فوبینی نشان داد

$$\begin{aligned}(\mu * \nu)(E) &= \int_{G\times G} \chi_E(xy)d(\mu \times \nu) \\ &= \int_G \int_G \chi_E((xy))d\mu(x)d\nu(y) \\ &= \int_G \int_G \chi_E((xy))d\nu(y)d\mu(x).\end{aligned}$$

تعریف ۲۲.۱ فرض کنید G یک گروه توپولوژیک موضعاً فشرده، (G, Σ) یک فضای اندازه و $B(G) \subseteq \Sigma$. اندازهٔ μ روی (G, Σ) را ناپیوسته یا گسسته گوئیم هرگاه مجموعهٔ شمارای

E موجود باشد که $|\mu|(E^*) = 0$ (E^* را متمم E می نامیم)

اندازهٔ μ را پیوسته گوئیم هرگاه:

$$\forall x \in X \qquad \mu(\{x\}) = 0$$

فرض کنید λ اندازهٔ هار چپ روی (G, Σ) باشد. اندازهٔ $\mu \in M(G)$ پیوستهٔ مطلق است هرگاه برای هر مجموعهٔ بورل E در G که $\lambda(E) = 0$ داشته باشیم $|\mu|(E) = 0$.

مجموعهٔ اندازه های ناپیوسته را با $M_d(G)$ ، اندازه های پیوسته را با $M_c(G)$ و مجموعهٔ اندازه های پیوستهٔ مطلق نسبت به λ را با $M_a(G)$ نشان می دهیم.

تعریف ۲۳.۱ فرض کنیم λ یک اندازهٔ هار چپ روی گروه G باشد. جبر باناخ تمام توابع اندازه پذیر مختلط − مقدار روی G که $\| f \|_\infty < \infty$ ، را با $L^\infty(G)$ نمایش می دهیم. نرم $\| . \|_\infty$ در $L^\infty(G)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\| f \|_\infty = \inf\{M \mid \lambda(\{t \mid | f(t) | > M\}) = 0\}.$$

قرار داد: هرگاه G گسسته باشد، $L^1(G)$ را با $l^1(G)$ و $L^\infty(G)$ را با $l^\infty(G)$ نمایش خواهیم داد.

به راحتی می توان دید که اگر G گروهی گسسته باشد، در این صورت

$$\begin{aligned} l^1(G) &= \{f : G \to \mathbb{C} \ : \ \sum_{x \in G} | f(x) | < \infty\} \\ &= \{\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{x_n} : \ x_n \in G \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | < \infty\}. \end{aligned}$$

که χ_{x_0} تابع مشخصهٔ مجموعهٔ تک عضوی $\{x_0\}$ است. می توان به [۱۲, ۱۹.۴] مراجعه کرد.

قضیه ۲۴.۱ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد و فرض کنید Φ یک تابعک روی $C_0(G)$ باشد. آنگاه اندازهٔ مختلط μ روی $\sigma-$ جبر $\mathcal{M}_\mu$ از زیر مجموعه های G شامل مجموعه های بورل روی G موجود است بطوریکه:

$$\Phi(f)=\int_G f(x)d\mu(x) \quad \forall f\in C_0^!$$

برهان . به قضیهٔ ۱۴.۴ از مرجع [۱۲] مراجعه شود. □

قضیه ۲۵.۱ نگاشت $\Phi \to \mu$ در قضیهٔ (۲۴.۱) نگاشتی از $C_0^*(G)$ به $M(G)$ می باشد که یک به یک، خطی و حافظ نرم و ترتیب است.

برهان . به قضیهٔ ۱۴.۱۰ از مرجع [۱۲] مراجعه شود. □

اگر $\omega\in L^1(G)$ و $\Phi: C_0(G)\to\mathbb{C}$ را به صورت $\Phi(f)=\int_G f\omega d\lambda$ تعریف می کنیم آنگاه بوضوح $\Phi\in C_0^*(G)$ است. بنابراین اندازهٔ $\mu\in M(G)$ موجود است که:

$$d\mu=\omega d\lambda$$

براحتی می توان دید که $\mu\in M_a(G)$ است.

برعکس اگر $\mu\in M_a(G)$ باشد طبق قضیهٔ ۱۴.۱۹ از [۱۲] تابع $\omega\in L^1(G)$ موجود است بطوریکه $d\mu=\omega d\lambda$ این مطلب را در قالب قضیهٔ زیر داریم.

قضیه ۲۶.۱ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد. نگاشت $\omega \to \mu$ از $M_a(G)$ به $L^1(G)$ یک ایزومورفیسم خطی حافظ نرم از $M_a(G)$ به $L^1(G)$ می باشد.

برهان . به قضیهٔ ۱۹.۱۸ از مرجع [۱۲] مراجعه شود. □

لم ۲۷.۱ فرض کنید A زیر مجموعه ای از G باشد که برای همهٔ[۶] $|\mu|$ ها، ($\mu \in M(G)$) اندازه پذیر است. در این صورت مجموعهٔ[۶] $V_A = \{\mu \in M(G) : |\mu|(A)\} = ۰$ زیر فضای خطی بسته از $M(G)$ است.

برهان . برای $\mu, \nu \in V_A$ داریم:

$$|\mu+\nu|(A) \leq |\mu|(A) + |\nu|(A) = ۰$$

در نتیجه $\mu + \nu \in V_A$. همچنین برای عدد مختلط یا حقیقی α و $\mu \in V_A$

$$|\alpha\mu|(A) = |\alpha||\mu|(A) = ۰$$

بنابراین V_A زیر فضای خطی از $M(G)$ است. اگر $\mu_n \in V_A$ $(n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$، $\mu \in M(G)$ و $lim_{n \to \infty}||\mu_n - \mu|| = ۰$ آنگاه برای هر زیر مجموعهٔ بورل B از A داریم:

$$\begin{aligned} |\mu(B)| &= |\mu_n(B) - \mu(B)| \\ &= |(\mu_n - \mu)(B)| \\ &\leq |\mu_n - \mu|(B) \\ &\leq ||\mu_n - \mu||. \end{aligned}$$

بنابراین $\mu(B)=0$ و در نتیجه $|\mu|(A)=0$. و این یعنی V_A زیر فضای بستهٔ خطی از $M(G)$ و می باشد. $\square$

قضیه ۲۸.۱ فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد آنگاه $M_a(G)$ یک ایده آل بسته از $M(G)$ می باشد.

برهان . فرض کنید $\nu\in M_a(G)$ و $\mu\in M(G)$. اگر $K\subseteq G$ فشرده و $\lambda(K)=0$ باشد آنگاه برای هر x در G $\lambda(x^{-1}K)=0$ است، در نتیجه $|\nu|(x^{-1}K)=0$ پس

$$
\begin{aligned}
|\mu*\nu|(K) &\leq (|\mu|*|\nu|)(K)\\
&= \int|\nu|(x^{-1}K)d|\mu|(x)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

بنابراین $\mu*\nu\ll\lambda$ یعنی $\mu*\nu\in M_a(G)$ به طریق مشابه دیده می شود $\nu*\mu\in M_a(G)$ در نتیجه $M_a(G)$ یک ایده آل از $M(G)$ می باشد.

از آنجائیکه $M_a(G)=\bigcap_F V_F$ که در آن F زیر مجموعه‌ای فشرده از G است که $\lambda(F)=0$ و هر V_F طبق لم (۲۷.۱) بسته است لذا $M_a(G)$ نیز بسته است. $\square$

تعریف ۲۹.۱ اگر X فضای توپولوژیک باشد آن گاه $E\subset X$ را هیچ جا چگال گویند هرگاه بستار E درون تهی باشد یعنی

$$int(\bar{E})=\varnothing$$