بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

(گرایش آنالیز عددی)

عنوان:

یک روش بدون شبکه از خطوط برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

از

الهام یزدی امیری

استاد راهنما

دکتر محمدرضا یاقوتی

دی ۹۲

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به خاطر همه ی تلاش‌های محبت آمیزی که در زندگیم انجام دادند و با مهربانی چگونه زیستن را به آموختند و نفس خیرشان همراه و دعای روح پرورشان بدرقه ی راهم بود.

تقدیم به برادرانم و خواهرم

که همواره در طول تحصیل متحمل زحماتم بودند و تکیه‌گاه من در مواجهه با مشکلات و وجودشان مایه دلگرمی و آرامش من می‌باشد.

تقدیر و تشکر

به نام آن علیمی که شعله‌ی عشق به تدریس و تعلیم و تربیت را در فانوس سینه‌ی پر مهر معلمان، دبیران و استادان روشن نمود و ستایش و سپاس، کردگاری را سزاست که بر پیوستگی ذرات، بنیاد هستی نهاد و با پیوند جان‌ها بوستان زندگی را از علم و دانش بارور ساخت.

و با تقدیر و تشکر از استاد فرهیخته و فرزانه‌ام جناب آقای دکتر یاقوتی که همواره راهنما و راه‌گشای من در اتمام و اکمال پایان نامه بوده است.

همچنین از استادان بزرگوار جناب آقای دکتر محمد کیان‌پور و سرکار خانم دکتر مهری باقریان که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

فهرست مطالب

لیست جداول........ ح

لیست تصاویر........ د

چکیده فارسی........ ر

چکیده انگلیسی........ ز

پیشگفتار........ ۱

فصل اول: مقدمات و تعاریف اولیه........ ۲

۱-۱ تعاریف و مفاهیم اولیه........ ۳

۱-۲ شرایط مرزی اولیه برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی........ ۶

۱- ۳ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول با دو متغیر مستقل........ ۸

۱- ۴ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم با دو متغیر مستقل........ ۸

۱-۴-۱ دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم خطی با دو متغیر مستفل........ ۹

۱-۵ نرم اقلیدسی........ ۹

فصل دوم: توابع پایه‌ای شعاعی و رانگ کوتا........ ۱۴

۲-۱ مقدمه........ ۱۵

۲-۲ تاریخچه........ ۱۵

۲-۳ درونیابی توابع پایه‌ای شعاعی........ ۲۱

۲-۴ نظریه توابع پایه‌ای شعاعی........ ۳۰

۲-۴-۱ روش توابع پایه‌ای شعاعی مقدماتی........ ۳۰

۲-۴-۲ روش توابع پایه‌ای شعاعی افزوده........ ۳۲

۲-۵ سرعت همگرایی........ ۳۳

۲-۶ عدد حالت و اصل عدم قطعیت........ ۳۳

۲-۷ پارامتر شکل........ ۳۴

۲-۸ مشتقات تقریب........ ۳۴

۲-۹ حل معادلات با مشتقات جزئی........ ۳۵

۲-۹-۱ روش نامتقارن........ ۳۶

۲-۹-۲ روش متقارن........ ۳۶

۲-۱۰ روش اویلر........ ۳۸

۲-۱۰ -۱ روش اویلر بهبود یافته........ ۴۰

۲-۱۱ روش‌های رانگ کوتای کلی........ ۴۲

۲-۱۱-۱ روش‌های تک گام ۴۳
۲-۱۱-۲ روش‌های رانگ کوتای دو گام ۴۴
۲-۱۱-۳ روش‌های رانگ کوتای سه گام ۴۶
۲-۱۱-۴ روش‌های رانگ کوتای چهار گام ۴۹
۲-۱۲ روش‌های رانگ کوتا برای سیستم‌ها ۵۳
۲-۱۳ پایداری مطلق روش‌های رانگ کوتا ۵۴
فصل سوم: کاربرد توابع پایه‌ای شعاعی و روش رانگ کوتا برای حل معادلات با مشتقات جزئی ۵۸
۳-۱ مقدمه ۵۹
۳-۲ حل سیستم Drinfeld's-Sokolov-Wilson با استفاده از ترکیب توابع پایه‌ای شعاعی و رانگ کوتا ۶۰
۳-۳ کاربرد توابع پایه‌ای شعاعی و رانگ کوتا برای حل عددی خانواده‌های از معادلات کورتوگ-دوریز (**kdv**) مرتبه پنجم تعمیم یافته ۷۱
نتیجه گیری ۸۱
پیشنهاد برای ادامه کار ۸۱
منابع و مآخذ ۸۲
واژه نامه فارسی به انگلیسی ۸۵
واژه نامه انگلیسی به فارسی ۸۷

لیست جداول

۲-۱ توابع پایه‌ای شعاعی ۲۰

۲-۲ مقادیر محاسبه شده مثال (۲-۳-۴) ۲۴

۲-۳ مقادیر محاسبه شده مثال(۲-۳-۵) ۲۷

۲-۴ مقادیر محاسبه شده مثال (۲-۱۰-۱) ۳۹

۲-۵ جدول بوچر ۴۲

۲-۶ جدول بوچر صریح ۴۳

۲-۷ جدول بوچر روش اویلر ۴۶

۲-۸ جدول بوچر رانگ کوتا سه‌گام ۴۷

۲-۹ جدول بوچر قاعده مرتبه سوم هان ۴۸

۲-۱۰ جدول بوچر قاعده مرتبه سوم کوتا ۴۸

۲-۱۱ جدول بوچر رانگ کوتا مرتبه چهار ۴۹

۲-۱۲ مقدار محاسبه شده مثال (۲-۱۱-۲) ۵۰

۲-۱۳ مقدار محاسبه شده مثال (۲-۱۱-۳) ۵۱

۲-۱۴ مقدار محاسبه شده مثال (۲-۱۲-۱) ۵۴

۲-۱۵ جدول بوچر ۵۴

۲-۱۶ بازه پایداری مطلق ۵۷

۳-۱ مقادیر خطای محاسبه شده مثال(۳-۲-۱) روش مالتی‌کوادریک ۶۵

۳-۲ مقادیر خطای محاسبه شده $v(x,t)$ و $u(x,t)$ در بازه $x_i \in [۵,۱۰]$ با طول گام ۰.۱ و $t_i \in [۰,۰.۵]$ با طول گام ۰.۱ مثال ۳-۲-۱ .... ۶۵

۳-۳ مقادیر خطای محاسبه شده مثال(۳-۲-۱) روش مالتی‌کوادریک معکوس ۶۷

۳-۴ مقادیر خطای محاسبه شده $v(x,t)$ و $u(x,t)$ در بازه $x_i \in [۵,۱۰]$ با طول گام ۰.۱ و $t_i \in [۰,۰.۵]$ با طول گام ۰.۰۱ مالتی‌کوادریک معکوس مثال ۳-۲-۱ .... ۶۷

۳-۵ مقادیر خطای محاسبه شده مثال(۳-۲-۱)روش گاوسین ۶۹

۳-۶ مقادیر خطای محاسبه شده $v(x,t)$ و $u(x,t)$ در بازه به $x_i \in [-۱۰,۱۰]$ با طول گام ۰.۱۲
و $t_i \in [۰,۰.۱]$ با طول گام ۰.۰۰۱ روش گاوسین مثال ۳-۲-۱ .... ۶۹

۳-۷ مقادیر خطای محاسبه شده $u(x,t)$ روش مالتی‌کوادریک مثال ۳-۳-۱ .... ۷۴

۳-۸ مقادیر خطای محاسبه شده $u(x,t)$ در بازه $x_i \in [-۱۰,۱۰]$ با طول گام ۰.۱ و $t_i \in [۰,۵]$ با طول گام ۰.۱مثال ۳-۳-۱ .... ۷۴

۳-۹ مقادیر خطای محاسبه شده $u(x,t)$ روش مالتی کوادریک معکوس مثال ۳-۳-۱ .... ۷۶

۳-۱۰ مقادیر خطای محاسبه شد $u(x,t)$ در بازه $x_i \in [-۱۰,۱۰]$ با طول گام ۰.۲ و $t_i \in [۰,۱]$ با طول گام ۰.۰۱ مالتی‌کوادریک معکوس مثال ۳-۳-۱ .... ۷۶

۳-۱۱ مقادیر خطای محاسبه شده $u(x,t)$ روش گاوسین مثال ۳-۳-۱ .... ۷۷

۳-۱۲ مقادیر خطای محاسبه شده $u(x,t)$ در بازه $x_i \in [-۵,۵]$ با طول گام ۰.۰۵ و $t_i \in [۰,۴]$ با طول گام ۰.۰۳

روش گاوسین مثال ۳-۳-۱ .... ۷۸

لیست تصاویر

۱-۲ نمودار سمت چپ$\sin(\pi x)$ ونمودار سمت راست $\sin(\pi x)$ با استفاده از روش مالتی‌کوادریک میباشد.............. ۱۶
۲-۲ نمودار برخی از توابع پایه‌ای شعاعی برای $\epsilon = 1$........................ ۲۲
۳-۲ نمودار مثال (۲-۳-۴)........................ ۲۵
۴-۲ نمودار مثال (۲-۳-۵)........................ ۲۸
۵-۲ نمودارهای خطای مثال (۲-۳-۶)........................ ۲۹
(آ) خطای کلی با روش گاوسین $\epsilon = 30$ ۲۹
(ب) خطای کلی با روش مالتی کوادریک و $\epsilon = 10$........................ ۲۹
(ج) خطای کلی روش مالتی‌کوادریک معکوس و $\epsilon = 10$ ۲۹
۶-۲ رابطه ϵ با $k(B)$ و خطای مطلق........................ ۳۴
۷-۲ نمودار مثال (۲-۱۰-۱)........................ ۳۹
۸-۲ نمودار مثال (۲-۱۰-۲)........................ ۴۱
۹-۲ نمودارخطای مثال (۲-۱۱-۲)........................ ۵۱
۱۰-۲ نمودارهای خطای مثال(۲-۱۱-۳)........................ ۵۲
الف) رانگ کوتای مرتبه چهارم ۵۲
ب) روش هان ۵۲
پ) روش مرتبه سوم کوتا........................ ۵۲
ت) روش اویلر بهبود یافته ۵۲
پ) روش اویلر........................ ۵۲
۱۱-۲ ناحیه پایداری مطلق روشهای رانگ کوتا مرتبه ۱تا۴ .... ۵۷
۱-۳ نمودار خطای مثال (۳-۲-۱) روش مالتی‌کوادریک........................ ۶۶
الف) $u(x,t)$........................ ۶۶
ب) $v(x,t)$ ۶۶
۲-۳ نمودار خطای مثال (۳-۲-۱) روش مالتی‌کوادریک معکوس........................ ۶۸
الف) $u(x,t)$........................ ۶۸
ب) $v(x,t)$ ۶۸
۳-۳ نمودار خطای مثال (۳-۲-۱) روش گاوسین........................ ۷۰
الف)$u(x,t)$ ۷۰
ب) $v(x,t)$ ۷۰

۳-۴ نمودار دقیق و تقریبی مثال (۳-۳-۱) در بازه $[-10,10]$ با طول گام زمان ۰.۱ .... ۷۵

۳-۵ نمودار خطای $u(x,t)$ روش مالتی‌کوادریک مثال ۳-۳-۱ .... ۷۶

۳-۶ نمودار خطای $u(x,t)$ روش مالتی‌کوادریک معکوس مثال ۳-۳-۱ .... ۷۷

۳-۷ نمودار خطای $u(x,t)$ روش گاوسین مثال ۳-۳-۱ .... ۷۸

۳-۸ نمودار خطای $u(x,t)$ روش مالتی کوادریک $N = ۲۰۰$ و $n = ۱۰۰$ و $\delta t = ۰.۱$ و $\epsilon = ۰.۱$ ۷۹

۳-۹ نمودار خطای $u(x,t)$ روش مالتی‌کوادریک $N = ۲۰۰$ و $n = ۲۰۰$ و $\delta t = ۰.۰۱$ و $\epsilon = ۰.۰۵$ ۸۰

۳-۱۰ نمودار خطای $u(x,t)$ روش مالتی‌کوادریک با $N = ۲۰۰$ و $n = ۱۵۰$ و $\delta t = ۰.۱$ و $\epsilon = ۰.۰۰۱$ ۸۰

چکیده:

یک روش بدون شبکه از خطوط برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

الهام یزدی امیری

در این پایان‌نامه ما یک روش بدون شبکه از خطوط را به‌کار می‌بریم، که با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی تبدیل به معادلات دیفرانسیل معمولی می شود سپس با استفاده از روش رانگ کوتا مرتبه چهارم جواب مساله را در گام‌های زمانی به‌دست می‌آوریم. دقت روش‌ها بر اساس نرم‌های خطا ارزیابی شده است.

کلمات کلیدی:

روش توابع پایه‌ای شعاعی، روش بدون شبکه، روش رانگ کوتا، مالتی‌کوادریک، گاوسین

Abstract:

A meshless Method of Lines for the Numerical Solution of Partial Differential Equation

Elham Yazdi Amiri

In this dissertation, we apply meshless method of line, which uses radial basis functions (RBFs) to reduction the partial differential equation nonlinear to ordinary differential equation. Then we use fourth Runge-Kutta methods obtain solution problem in time steps. Accuracy of the methods is assessed in terms of various error norms.

Keyword:

Radial Basis Function Method, Meshless Method, Runge_Kutta Method, Multiqudric (MQ), Gaussian (GA).

پیشگفتار:

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی کاربردهای مهمی در فیزیک، شیمی، پدیده‌های زیستی داشته و اخیراً در اقتصاد، امورمالی، پردازش تصاویر پزشکی و زمینه‌های دیگر گسترش یافته است. و مدل‌های زیادی در این زمینه‌ها ارائه شده است برای بررسی و محاسبه این مدل‌ها اغلب به حل عددی آنها نیاز داریم.

روش‌های عددی زیادی بر پایه‌ی شبکه موجودند مانند تفاضل متناهی، المان محدود، حجم محدود که بیشترین استفاده‌ها را دارند ساختن شبکه در هندسه سخت و پرهزینه می‌باشد لذا برای جلوگیری از تولید شبکه در سال‌های اخیر روش‌های بدون شبکه به‌عنوان جایگزینی مناسب برای روش‌های شبکه‌بندی مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. در روش بدون شبکه یک مجموعه از نقاط پراکنده بدون ارتباط مورد نیاز است توابع پایه‌ای شعاعی به‌عنوان یک ابزار قدرتمند برای حل عددی PDEها براساس طرح هم‌مکان است. روش‌هایی که بر پایه توابع پایه‌ای شعاعی می‌باشند دارای ویژگی قابل توجهی می‌باشند از جمله همگرایی سریع و انعطاف پذیری در انتخاب محل گره و از آنجا که در عمل به شبکه‌بندی دامنه نیاز ندارند روش عددی بدون شبکه نامیده می‌شوند.

در این پایان‌نامه، روش توابع پایه‌ای شعاعی و روش رانگ کوتا برای حل عددی معادلات با مشتقات جزئی به‌کار می‌رود ابتدا در فصل اول به تعاریف و معرفی برخی از مفاهیم اولیه مورد نیاز در پایان‌نامه می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی از آنها استفاده می‌کنیم. در فصل دوم روش توابع پایه‌ای شعاعی، چگونگی گسترش و استفاده از آن برای حل معادلات ارائه شده است. سپس به توضیح روش‌های رانگ کوتای کلی و مرتبه‌ی خطای آن برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و چگونگی حل آن بر روی PDE وابسته به زمان پرداخته‌ایم. در فصل سوم با استفاده از برخی از توابع پایه‌ای شعاعی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را تبدیل به معادلات دیفرانسیل معمولی نموده و سپس به حل آن با استفاده از روش رانگ کوتای مرتبه‌ی چهارم می‌پردازیم. لازم به ذکر است نتایج عددی به‌دست آمده در این پایان‌نامه با استفاده از نرم افزار Matlab 2009 و کامپیوتری با مشخصات Intel (R) Core (TM) i7-2620M CPU @ 2.70GHz و Memory: 4 GB محاسبه شده است.

فصل اول

مقدمات و تعاریف اولیه

۱-۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

مدل سازی مسائل مهم در فیزیک، شیمی، زیست شناسی، پزشکی، نجوم و یا علوم نظری مانند جامعه شناسی، مدیریت، روانشناسی و غیره، از اهمیت قابل توجهی برخوردار می‌باشد. بیان این مدل‌ها به زبان ریاضی منجر به معادلات تابعی می‌شود. معادله تابعی حاصل از پدیده‌ای که در آن آهنگ تغییرات یک تابع نسبت به یک و یا چند متغیر مستقل مطالعه می‌شود، یک معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود. اگر تابع مجهول فقط به یک متغیر مستقل وابسته باشد آن را معادله دیفرانسیل معمولی[۱] (ODE) و اگر تعداد متغیرهای مستقل بیش از یکی باشد آن را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی[۲] (PDE) گویند.

از جمله مدل‌های فیزیکی که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مورد استفاده قرار می‌گیرند می‌توان مدل‌های گرمای ناشی از فرضیه توزیع دما در بدن، معادله موج ناشی از حرکت جبهه‌ای امواج رادیویی و معادله لاپلاس ناشی از پتانسیل استاتیکی یا میدان فشار کشسان را نام برد. به عنوان مثال در بررسی تاثیرات حرارتی در بدن یک جسم صلب ممکن است دما θ از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر و هم‌چنین از لحظه‌ای به لحظه‌ی دیگر تغییر کند و در نتیجه $\frac{\partial \theta}{\partial z}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial x}$ در حالت کلی صفر نباشد. هم‌چنین ممکن است در مساله به خصوصی چنین پیش آید که مشتقات جزئی مراتب بالاتر، مانند $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y\,\partial t}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial x\,\partial t}$، $\frac{\partial^2 \theta}{\partial^2 x}$ دارای معنی فیزیکی باشند در چنین حالتی علاوه بر نیاز به شرایط اولیه، بسته به اینکه از مدل خود چه کاربردهایی را مد نظر به شرایط مرزی منطقه یا محیط عمل نیز داریم، در این‌صورت است که با مسائل با مقادیر مرزی برخورد می‌کنیم.

بعضی مواقع مشتقات جزئی را به‌گونه‌ای می‌نویسند که متغیرهای مستقل به‌صورت اندیس در آنها نمایان می‌شوند. به عنوان مثال به‌جای $\frac{\partial u}{\partial t}$ می‌نویسیم u_t، به‌جای $\frac{\partial u}{\partial x\,\partial y}$ می‌نویسیم u_{xy} و غیره. اگر متغیرها زیاد باشند نیاز به نوشتن برنامه برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی داشته باشیم، در این‌صورت اغلب از شماره‌گذاری متغیرها $x_1, x_2, \dots, x_n$ استفاده می‌کنیم و مشتقات جزئی را با اندیس‌گذاری نشان می‌دهیم. برای مثال u_{22} مشتق مرتبه‌ی دوم u نسبت به x_2 است.

تعریف ۱-۱-۱. گاهی برای توصیف پدیده‌های طبیعی رابطه‌ای مانند

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{nn}\right) = 0 \tag{۱-۱}$$

بین مشتقات به‌دست می‌آید، چنین رابطه‌ای که مشتقات جزئی را به هم ربط می‌دهد، معادله دیفرانسیل جزئی نامیده می‌شود. به‌عبارت دیگر به معادله دیفرانسیلی که علاوه بر متغیر وابسته و متغیر مستقل، شامل یک یا چند مشتق‌جزئی متغیر وابسته باشد معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی گویند.

---

۱ Ordinary Differential Equation

۲ Partial Differential Equation

معادله (۱-۱) شامل n متغیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک تابع مجهول u که تابعی از متغیرهای مستقل است و مشتقات جزئی u_{11}, u_{12}, u_{22} و غیره است. معادله (۱-۱) را در یک دامنه مناسب D از فضای n بعدی $\mathbb{R}^n$ با متغیرهای مستقل $x_1, x_2, \dots, x_n$ در نظر می‌گیریم. اگر تابعی مانند $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ در دامنه D موجود باشد به‌طوری که در معادله (۱-۱) صدق کند، جواب معادله دیفرانسیل (۱-۱) گفته می‌شود. از بین جواب‌های موجود با شرایط اضافی مناسب یک جواب مخصوص را پیدا می‌کنیم.

مثال ۱-۱-۲. معادله‌های زیر مثال‌هایی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشند که انتشار موج را به ترتیب در فضای یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی توصیف می‌کنند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (3)$$

در معادله (۱) تابع مجهول $u = u(x,t)$ به مکان x و متغیر زمان t وابسته می‌باشد در معادله (۲) تابع مجهول $u = u(x,y,t)$ به سه متغیر و در معادله (۳)، $u = u(x,y,z,t)$ به چهار متغیر وابسته می‌باشد.

تعریف۱-۱-۳. مرتبه یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی عبارت است از بالاترین مرتبه مشتقات جزئی که در آن معادله ظاهر می‌شود و درجه یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی موجود در معادله می‌باشد.

تعریف۱-۱-۴. یک معادله دیفرانسیل خطی نامیده می‌شود اگر تابع مجهول و همه مشتق‌های موجود از درجه یک و ضرایب تابع مجهول و مشتقات جزئی، ثابت و یا متغیرهای مستقل باشند. در غیر این‌صورت معادله غیرخطی نامیده می‌شود.

مثال۱-۱-۵. معادلات زیر را در نظر می‌گیریم

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \qquad (2)$$

در معادله (۱) مشتقات جزئی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ از درجه یک می‌باشند و ضرایب مشتقات جزئی به ترتیب متغیرهای مستقل x, y هستند لذا معادله دیفرانسیل جزئی داده شده خطی می‌باشند در معادله (۲) مشتقات جزئی $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}$ از درجه یک می‌باشند اما ضریب $\frac{\partial u}{\partial t}$ تابع مجهول (متغیر وابسته) u می‌باشند. لذا معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی می‌باشد.

تعریف۱-۱-۶. یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را همگن گویند هرگاه ترکیب خطی مشتقات متحد با صفر باشد و در غیر این‌صورت غیرهمگن گوییم.

معادلات زیر مثال‌هایی از معادلات همگن می‌باشند

معادله تلگراف $a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b\frac{\partial u}{\partial t}+cu-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

و هم‌چنین به عنوان مثالی از معادلات دیفرانسیل جزئی غیرهمگن می‌توان به معادله پواسون اشاره کرد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y).$$

تعریف۱-۱-۷. جواب یک معادله دیفرانسیل جزئی عبارت است از تابعی مانند u که در معادله و شرایط داده شده صدق کند.

تذکر۱-۱-۸. ۱- واضح است که برای یک معادله دیفرانسیل معمولی همگن خطی، اگر $u_1, u_2, \dots, u_n$ جواب‌های معادله باشند، هر ترکیب خطی آنها که به صورت

$$u=c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_nu_n, \qquad (۱-۲)$$

می‌باشد نیز یک جواب معادله خواهد بود. مفهوم ترکیب دو یا تعداد بیشتری از این جواب‌ها اصل انطباق[۱] نامیده می‌شود. شایان ذکر است که اصل انطباق برای معادلات دیفرانسیل جزئی همگن خطی در دامنه داده شده نیز برقرار است.

۲- برای یک معادله دیفرانسیل خطی، جواب عمومی به ثابت‌های دلخواه بستگی دارد در حالی‌که در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، جواب عمومی به توابع دلخواه بستگی دارد به عنوان مثال معادله دیفرانسیل جزئی

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0\,, \qquad (۱-۳)$$

دارای جواب به شکل $u=f(x-y)$ می‌باشد، که در آن $f(x-y)$ یک تابع مشتق‌پذیر دلخواه است و این بدین معناست که (۱-۳) می‌تواند هر یک از توابع زیر باشد

$$\begin{cases} u=x-y, \\ u=e^{x-y}, \\ u=\sinh(x-y)\,, \\ u=\ln(x-y), \end{cases}$$

با این وجود جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل جزئی کاربرد زیادی ندارد و اغلب یک جواب خصوصی که صادق در شرایط داده شده مورد نیاز می باشد.

۱ Superposition Principle

تعریف۱-۱-۹. یک معادله دیفرانسیل جزئی خوش‌حالت است اگر یک جواب منحصربفرد پایدار وجود داشته باشد که در معادله و شرایط داده شده صدق کند. جواب یک معادله دیفرانسیل جزئی پایدار است اگر تغییرات کوچک در شرایط و یا ضرایب معادله منجر به تغییر جزئی در جواب شود.

تعریف۱-۱-۱۰. یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، مجموعه‌ای از چندین معادله دیفرانسیل جزئی می‌باشد.

در ادامه مثال‌هایی از دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی آمده است.

۱. معادله اویلر برای سیالات تراکم ناپذیر چسبناک

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u.Du = -Dp \\ \mathrm{div}u = 0 \end{cases}$$

۲. معادله ناویر–استوکس[۱] برای سیالات تراکم ناپذیر چسبناک

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u.Du - \Delta u = -Dp \\ \mathrm{div}u = 0 \end{cases}$$

۳. معادله ماکسول در خلا

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u.Du = -Dp \\ \mathrm{curl}B = \mu_n \epsilon_n E_t \\ \mathrm{div}u = \mathrm{div}E = 0 \end{cases}$$

۱-۲ شرایط مرزی اولیه برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غالباً برای توصیف پدیده‌های فیزیکی مانند موج، گرما، انتشار موج، مکانیک کوانتوم و غیره به‌کار می‌روند. برای به‌دست آوردن جواب هر معادله دیفرانسیل جزئی شرایط اضافی دیگری نیز باید در دست باشد و معمولاً این شرایط به‌صورت مقدار مرزی روی تمام یا قسمتی از ناحیه‌ای که جواب را در آن جستجو می‌کنیم بیان خواهد شد. این قسمت ممکن است شرایط اولیه و یا شرایط مرزی باشند. شرایط مرزی، تابع را در دو یا چند نقطه مرزی تعیین شده توصیف می‌کنند و شرایط اولیه تابع مجهول را در سراسر ناحیه مفروض، در زمان آغاز معین می‌کنند. برای یک معادله دیفرانسیل جزئی مفروض در دامنه کراندار D، متغیر وابسته u معمولاً روی مرز D داده می‌شود. مقادیر داده شده روی مرز را شرایط مرزی معادله می‌گوییم.

[۱] Navier Stokes

برای شرایط مرزی سه حالت وجود دارد

۱. شرایط مرزی دیریکله[۱]: در این حالت معمولاً مقدار تابع u روی مرز دامنه کراندار می‌شود. به عنوان مثال برای یک میله به طول L که $0 < x < L$ شرایط مرزی توسط $u(0) = \alpha$ و $u(L) = \beta$ تعریف می‌شوند که در آن α و β اعداد ثابتی هستند و برای یک صفحه‌ی مستطیلی، $0< x < L_1$ و $0< y < L_2$ معمولاً شرایط مرزی $u(x,0), u\left(L_1, y\right), u(0, y)$ و $u\left(x, L_2\right)$ داده می‌شوند. اگر متغیر وابسته u در هر نقطه روی مرز صفر باشد، شرایط مرزی همگن در غیر این‌صورت غیرهمگن نامیده می‌شود.

۲. شرایط مرزی نیومن[۲]: در این حالت، مقادیر مشتق‌های سویی در هر نقطه روی مرز دامنه داده می‌شود. به عنوان مثال برای یک میله به طول L، شرایط مرزی نیومن به‌صورت $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha$ و $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \beta$ می‌باشند.

۳. شرایط مرزی مرکب[۳]: در این حالت ترکیب خطی از متغیرهای وابسته u و مشتق‌های سویی آن در نقاط روی مرز داده می‌شود.

مثال ۱-۲-۱. معادله زیر را با شرایط داده شده در نظر می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0,$$

شرط اولیه $$u(x,0) = \sin x, \qquad 0 \le x \le 1,$$

شرط مرزی $$u(0, t) = 0, \qquad t \ge 0,$$

شرط مرزی $$u\left(1, t\right) = 0, \qquad t \ge 0,$$

این‌چنین مسائلی به مسأله مقدار مرزی موسوم هستند.

از نقطه‌نظر ریاضی، زمان و مختصات فضایی به عنوان متغیرهای مستقل در نظر گرفته می‌شوند بدین ترتیب در این مثال شرط اولیه صرفاً نقطه‌ای است معین بر محور t و شرایط مرزی در این مورد با دو نقطه بر روی محور x تعیین می‌گردند. شرایط اولیه معمولاً در زمان مشخص $t = t_0$ و یا $t = 0$ تعیین می‌شوند و در نظر گرفتن شرایط در دو نقطه انتهایی دیگر بازه زمانی مفروض، مرسوم نیست. در موارد بسیاری علاوه بر شرایط اولیه و مرزی شرایط دیگری نظیر مشتقات تابع بر روی مرز نیز در نظر گرفته می‌شوند. معمولاً ویژگی‌های مرزی، عوامل تعیین کننده‌ای هستند که با توجه به آن می‌توان روش عددی مناسبی برای یافتن جواب تقریبی معادله انتخاب کرد.

---

۱ Dirichlet Boundary Condition

۲ Neumann Boundary Condition

۳ Mixed Boundary Condition

۱- ۳ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول با دو متغیر مستقل

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول با دو متغیر مستقل x, y به‌صورت زیر است

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = ۰, \tag{۱-۴}$$

که در آن F یک تابع داده شده می‌باشد. اگر تابع بر حسب $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ خطی نباشد معادله (۱-۴) غیرخطی نامیده می‌شود. اگر F بر حسب $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ و نه لزوماً بر حسب u خطی نباشد معادله (۱-۴) به‌صورت زیر خواهد بود

$$a(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u), \tag{۱-۵}$$

که در آن b, a به u بستگی دارند. این معادله شبه‌خطی[۱] نامیده می‌شود.

یک معادله دیفرانسیل نیمه‌خطی[۲] معادله‌ای به‌صورت زیر است

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u), \tag{۱-۶}$$

که در آن ضریب $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ به u وابسته نمی‌باشد و غیرخطی بودن معادله فوق به وسیله عبارت غیرهمگن سمت راست معادله (۱-۶) نشان داده می‌شود.

یک معادله دیفرانسیل خطی به‌صورت زیر می‌باشد

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = d(x, y), \tag{۱-۷}$$

که در آن متغیر وابسته u و مشتقات جزئی آن یعنی $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ به همراه d, c, b, a که همگی توابعی از x, y می‌باشند به‌صورت خطی ظاهر می‌شوند.

۱- ۴ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم با دو متغیر مستقل

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم خطی با دو متغیر x, y به‌صورت زیر می‌باشد

$$a(x, y)\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + b(x, y)\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + c(x, y)\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = \alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(x, y)u + \delta(x, y).$$

که در آن توابع $a(x, y),\ b(x, y), \dots, \delta(x, y)$ ضرایب معادله نامیده می‌شوند. اگر $\delta \equiv ۰$ معادله فوق یک معادله خطی همگن است و در غیر این‌صورت یک معادله خطی غیرهمگن می‌باشد.

$$a(x, y)\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + b(x, y)\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + c(x, y)\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{۱-۸}$$

---
۱ Quasilinear
۲ Semilinear