دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض ، گرایش جبر جابجایی

عنوان

ایده آل های کامل

استاد راهنما

دکتر رضا نقی پور

استاد مشاور

دکتر منیره صدقی

پژوهشگر

سعید سلامیان

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به پدر و مادر

عزیزم

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.
تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.
تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.
تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.
به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

خدا آن حس زیباییست که در تاریکی صحرا،

زمانی که هراس مرگ سکوتت را می دزدد

یکی همچون نسیم دشت میگوید کنارت هستم ای تنها

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

ابتدا از آقای دکتر رضا نقی پور که در آماده سازی این پایان‌نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان و تشکر را دارم.

از خانم دکتر منیره صدقی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند سپاسگزاری می‌کنم.

سعید سلامیان

تابستان ۱۳۹۰

نام خانوادگی: سلامیان **نام:** سعید

عنوان پایان‌نامه: ایده‌آل های کامل

استاد راهنما: دکتر رضا نقی پور

استاد مشاور: دکتر منیره صدقی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** جبر جابجایی

دانشگاه: تبریز **دانشکده:** علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: تابستان ۱۳۹۰ **تعداد صفحه:** ۹۰

کلیدواژه‌ها: ایده‌آل اساساً کامل، ایده‌آل انقباض یافته، ایده‌آل کامل، ایده‌آل $\mathfrak{m}-$کامل، ایده‌آل با خاصیت ریس، ایده‌آل بطور صحیح بسته

چکیده: در این پایان‌نامه ارتباط موجود بین انواع ایده‌آل‌های کامل، $\mathfrak{m}-$کامل، اساساً کامل و انقباض یافته ثابت می‌شود.
در حلقه‌های منظم موضعی با بعد ۲ ایده‌آل‌های $\mathfrak{m}-$اولیه و بطورصحیح بسته نقشی اساسی در توسیع ایده‌آل‌های بطور صحیح بسته زاریسکی ایفا می‌کند.
در حلقه منظم موضعی با بعد ۲ ایده‌آل‌های $\mathfrak{m}-$اولیه و انقباض یافته بوسیله خاصیت زیر توصیف می‌شوند،

$$\exists x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2, \quad I : \mathfrak{m} = I : x$$

که این ایده‌آلها را طبق تعریف ایده‌آل کامل گوییم.
سپس در حلقه‌های منظم موضعی با بعد بالاتر از ۲ کلاس ایده‌آل‌های انقباض یافته را با کلاس ایده‌آل‌های کامل، اساساً کامل و ایده‌آل‌های انقباض یافته مقایسه می‌کنیم. همچنین بررسی می‌شود که ایده‌آلهای $\mathfrak{m}-$کامل، ایده‌آلی کامل هستند و سپس شرطی کافی برای اینکه تحت آن ایده‌آل‌های کامل، ایده‌آلی $\mathfrak{m}-$کامل باشند بیان می‌شود. همچنین برای کلاسی از ایده‌آل‌های پارامتری خاصیت‌های معادل بودن ایده‌آل‌های کامل، $\mathfrak{m}-$کامل، بطور صحیح بسته، انقباض یافته و نرمال بیان می‌شود. سپس شرط کافی برای ایده‌آل پارامتری اساساً کامل که تحت آن تبدیل به ایده‌آل کامل می‌شود آورده شده است.

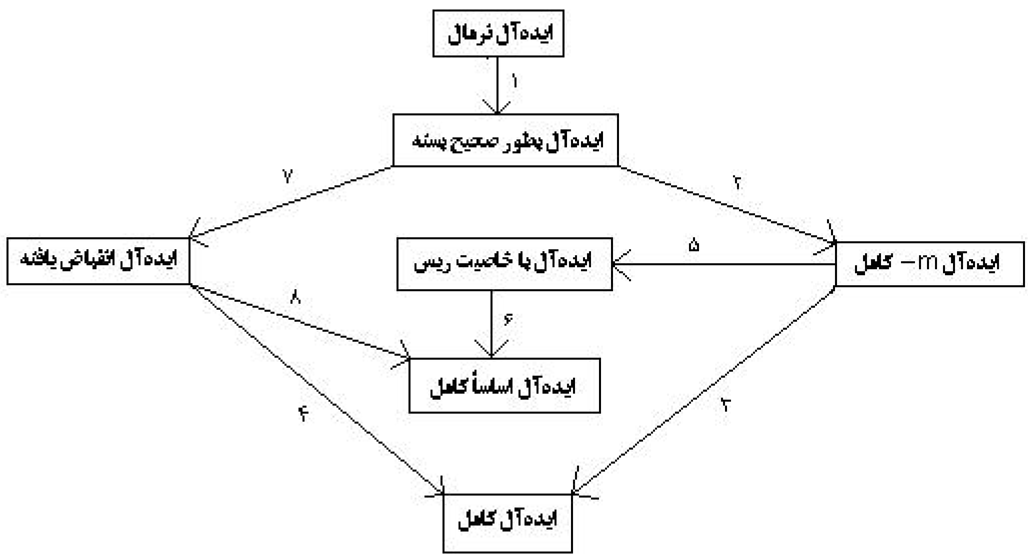
فهرست مطالب

مقدمـه

این پایان نامه بر مبنای مقاله

Full Ideals, *Jooyoun Hong*; *Heisook Lee*; *Sunsook Noh*; *DavidE. Rush*

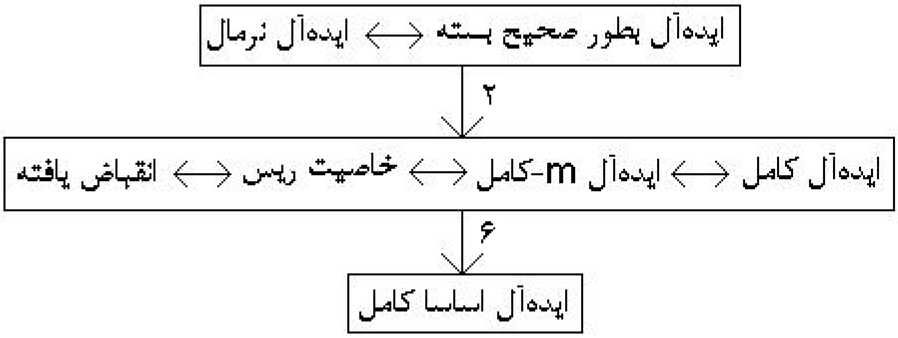
تنظیم شده است. در این پایان نامه ضمن تعریف انواع ایده‌آل‌ها به بررسی روابط بین آنها در حلقه‌های موضعی با بعد ۲ پرداخته شده است و سپس برخی از این روابط در حلقه‌های موضعی با بعد بالاتر از ۲ تعمیم داده شده است. دیاگرام زیر چگونگی ارتباط انواع ایده‌آل‌ها را در حلقه‌های موضعی بیان می‌کند.



در ادامه با فرض شرایطی، عکس روابط ۳ و ۴ در حالتی که حلقه موضعی با بعد ۲ باشد مورد

بررسی قرار می‌گیرد. همچنین در حالتی که حلقه با بعد ۳ و یا بیشتر باشد با مثالی نشان داده می‌شود که روابط ۳ و ۴ لزوما برگشت پذیر نیستند. لذا در چنین حلقه‌هایی یك ایده‌آل کامل لزوماً ایده‌آلی اساساً کامل را نیست. در ادامه نشان می‌دهیم در حلقه‌های موضعی دلخواه، یك ایده‌آل اساساً کامل، لزوماً کامل را نتیجه نمی‌دهد. ولی شرطی بیان خواهد شد که تحت آن یك ایده‌آل پارامتری اساساً کامل ایده‌آلی کامل است.

اگر حلقه منظم موضعی با بعد ۲ باشد، دیاگرام مطابق شکل زیر کاهش می‌یابد.



در نهایت با ذکر دو مثال نشان می‌دهیم که عکس روابط ۲ و ۶ برای حلقه‌های منظم موضعی با بعد ۲ نیز برقرار نیستند.

نیمی از ریاضیات ابداع علامتی مناسب برای آن است.

"لاپلاس"

فصل ۱
تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

در سراسر این پایان‌نامه فرض خواهیم کرد که R، یك حلقه جابجایی و نوتری است.

تعریف ۱.۱.۱. حلقه R را موضعی گوییم، هرگاه R حلقه نوتری بوده و فقط دارای یک ایده‌آل ماکسیمال باشد. از نماد $(R, \mathfrak{m})$ برای نشان دادن حلقه موضعی R با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ استفاده می‌کنیم.

نمادگذاری: مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول R را با نماد $\operatorname{Spec}(R)$ نشان می‌دهیم. همچنین

$$\operatorname{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$$

تعریف ۲.۱.۱. زنجیر $\mathfrak{p}_n \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_0$ از ایده‌آل‌های اول حلقه R را یك زنجیر بطول n می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. **بعد کرول** [1] یا به اختصار بعد حلقه R را با علامت $\dim R$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$\dim R := \sup\{n \geq 0 \mid \exists\ \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n\ ;\ \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec}(R)\}.$$

اگر چنین زنجیری از ایده‌آل‌های اول موجود نباشد، تعریف می‌کنیم $\dim R := \infty$.

همچنین بعد کرول یک $R-$مدول ناصفر مانند M را با $\dim_R M$ یا به اختصار $\dim M$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$\dim_R M := \sup\{n \geq 0 \mid \exists\ \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n\ ;\ \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Supp}_R M\}.$$

اگر چنین زنجیری از ایده‌آل‌های اول موجود نباشد، تعریف می‌کنیم $\dim_R M := \infty$.

[1] Krull dimension

نتیجه ۴.۱.۱. *فرض کنیم M یک $R-$ مدول و N یک زیر مدول آن باشد. در این صورت*

$$\dim N \leq \dim M.$$

بطورکلی اگر M و N دو $R-$ مدول باشند که $\mathrm{Supp}(N) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$، آنگاه

$$\dim_R N \leq \dim_R M.$$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. بلندی $\mathfrak{p}$ در R را با علامت $ht(\mathfrak{p})$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$ht(\mathfrak{p}) := \sup\{n \geq 0 \mid \exists\ \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\ ;\ \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

اگر چنین زنجیری از ایده‌آل‌های اول موجود نباشد، تعریف می‌کنیم $ht(\mathfrak{p}) := \infty$.

همچنین بلندی $\mathfrak{p}$ نسبت به M را با علامت $ht_M(\mathfrak{p})$ یا به اختصار $ht(\mathfrak{p})$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$ht_M(\mathfrak{p}) := \sup\{n \geq 0 \mid \exists\ \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\ ;\ \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Supp}_R M\}.$$

اگر چنین زنجیری از ایده‌آل‌های اول موجود نباشد، تعریف می‌کنیم $ht_M(\mathfrak{p}) := \infty$.

تبصره ۶.۱.۱. *اگر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$، آنگاه $ht_M(\mathfrak{p}) \leq \dim M$. لذا*

$$\sup\{ht(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)\} \leq \dim(M).$$

بویژه اگر $\dim M < \infty$، آنگاه

$$\dim M = \sup\{ht_M(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)\}.$$

بعلاوه اگر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، آنگاه $ht(\mathfrak{p}) \leq \dim(R)$.

بویژه اگر $\dim R < \infty$، آنگاه

$$\dim R = \sup\{ht(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

اگر R حلقه موضعی با تنها ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد، آنگاه داریم $\dim R = ht(\mathfrak{m})$.

قضیه ۷.۱.۱. *(ایده‌آل اصلی کرول) اگر R حلقه نوتری و $x \in R$ یکال نباشد و $\mathfrak{p}$ یك ایده‌آل اول مینیمال روی $< x >$ باشد، آنگاه*

$$ht(\mathfrak{p}) \leq ۱.$$

برهان. مراجعه شود به مرجع [۱۳]، صفحه ۲۸۹.

∎

قضیه ۸.۱.۱. *(تعمیم ایده‌آل اصلی کرول) فرض کنیم R یك حلقه نوتری و I یك ایده‌آل سره R باشد که توسط n عضو تولید شود، آنگاه برای هر ایده‌آل اول مینیمال $\mathfrak{p}$ از I داریم*

$$ht(\mathfrak{p}) \leq n.$$

برهان. مراجعه شود به مرجع [۱۳]، صفحه ۲۹۰.

∎

تعریف ۹.۱.۱. اگر R یك حلقه نوتری و $\mathfrak{b}$ یك ایده‌آل R باشد، آنگاه **بلندی** $\mathfrak{b}$ را با نماد $ht(\mathfrak{b})$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$ht(\mathfrak{b}) = \min\{ht(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

همواره برای هر دو ایده‌آل $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ از R، داریم:

$$ht(\mathfrak{a}) \leqslant ht(\mathfrak{b}).$$

قضیه ۱۰.۱.۱. *فرض کنید R یك حلقه جابجایی و نوتری باشد و $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$؛ بطوری که $ht(\mathfrak{p}) = n < \infty$. در این صورت ایده‌آلی چون $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{b}$ از R موجود است که $\mathfrak{b}$ توسط n عضو تولید می‌شود و $ht(\mathfrak{b}) = n$.*

برهان. مراجعه شود به مرجع [۱۳]، صفحه ۲۹۴.

■

قضیه ۱۱.۱.۱. *فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یك حلقه موضعی با بعد d باشد، در این صورت*

$$d=\min\{\circ\leqslant n\in\mathbb{Z}\mid \exists x_1,\dots,x_n\in R,\ r(<x_1,\dots,x_n>)=\mathfrak{m}\}$$

$$=\min\{\circ\leqslant n\in\mathbb{Z}\mid \exists x_1,\dots,x_n\in R, \text{یك ایده‌آل } \mathfrak{m}-\text{اولیه است } <x_1,\dots,x_n>\},$$

که در آن $r(<x_1,\dots,x_n>)$، رادیکال ایده‌آل $<x_1,\dots,x_n>$ است.

برهان. مراجعه شود به مرجع [۱۳]، صفحه ۲۹۶.

■

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد. اگر $dimR=d$، آنگاه عناصر $x_1,\dots,x_d$ از $\mathfrak{m}$ موجودند بطوریکه $(x_1,\dots,x_d)$ یک ایده‌آل $\mathfrak{m}-$ اولیه است. عناصر $x_1,\dots,x_d$ را یک **دستگاه پارامتری** [۲] یا به اختصار یک $s.o.p$ برای R می‌نامیم.

ایده‌آل تولید شده توسط یک $s.o.p$ را **ایده‌آل پارامتری** [۳] گوییم.

تعریف ۱۳.۱.۱. یك حلقه موضعی $(R,\mathfrak{m})$ را منظم موضعی گوییم هرگاه

$$\dim(R)=\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2),$$

که در آن $k=R/\mathfrak{m}$. به عبارت دیگر، حلقه موضعی $(R,\mathfrak{m})$ را منظم موضعی گوییم در صورتی که $\mathfrak{m}$ توسط $\dim(R)$ عضو تولید شود.

لم ۱۴.۱.۱. *اگر $(R,\mathfrak{m})$ یك حلقه موضعی و $\mathfrak{a}$ یك ایده‌آل واقعی از R باشد، آنگاه*

$$\cap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{a}^n=\circ.$$

[۲] System of parameters
[۳] Parameter ideal

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنیم که R یك حلقه و M یك R−مدول باشد. در این صورت عناصر $r_1, \dots, r_n$ از R را یك M−رشته منظم [۴] یا M−رشته گوییم هرگاه در دو شرط زیر صدق کنند؛

۱) $r_1 \notin Z_R(M)$ و به ازای هر $2 \leq i \leq n$، $r_i \notin Z(\frac{M}{(r_1, \dots, r_{i-1})M})$

۲) $\frac{M}{(r_1, \dots, r_n)M} \neq 0$.

تعریف ۱.۱.۱۶. حلقه موضعی (نوتری) R را **حلقه کوهن - مکالی** [۵] گوییم هرگاه هر دستگاه پارامتری یك R−رشته منظم باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنیم R یك حلقه جابجایی دلخواه باشد. در این صورت ایده‌آل سره $\mathfrak{q}$ از R را یك ایده‌آل اولیه گوییم هرگاه

$$xy \in \mathfrak{q} \quad \rightarrow \quad x \in \mathfrak{q} \ \text{یا}\ y \in \sqrt{\mathfrak{q}}.$$

ایده‌آل اولیه $\mathfrak{q}$ را ایده‌آل $\mathfrak{p}$−اولیه گوییم هرگاه $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$، که در آن $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$.

لم ۱.۱.۱۸. *فرض کنیم R یك حلقه نوتری و $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ و $\mathfrak{q}$ ایده‌آلی از R باشد، دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱ *$\mathfrak{q}$ یك ایده‌آل $\mathfrak{m}$−اولیه است.*

۲ $r(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}$.

۳ $\exists n \in \mathbb{N},\ \ \mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$.

برهان. طبق تعریف واضح است. ∎

---
[۴] M-regular sequence
[۵] Cohen-Macaulay ring

لم ۱۹.۱.۱. *فرض کنیم*

$$\circ \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \circ$$

یك دنباله دقیق از $R-$مدول‌ها و $R-$هومومورفیسم‌ها باشد، آنگاه

$$l(M) = l(M') + l(M''),$$

که در آن $l(M)$ نشان دهنده طول مدول M است.

نماد گذاری: طول فضای برداری که همان بعد فضای برداری است با نماد λ نشان می‌دهیم.

۲.۱ مفاهیم مورد نیاز

در کل این پایان نامه فرض می‌کنیم که میدان مانده حلقه R نامتناهی باشد. ثابت می‌کنیم که اگر $R/\mathfrak{m}$ متناهی باشد، می‌توان یك حلقه موضعی مانند R' با تنها ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}R'$، که روی R یکدست با وفا است و میدان مانده‌ی نامتناهی دارد پیدا کرد.

برای اینکار، فرض کنیم R حلقه‌ای با میدان مانده‌ی متناهی باشد. حلقه $R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ را در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم $R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ یك $R-$مدول یکدست با وفا است و میدان مانده‌ی آن نامتناهی است. برای اینکار دنباله دقیق زیر از $R-$مدولها و $R-$هومومرفیسم‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$\circ \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow \circ.$$

چون $R[X]$ یك $R-$مدول یکدست است، لذا دنباله دقیق زیر از $R[X]-$مدولها و $R[X]-$هومومرفیسم‌ها بدست می‌آید.

$$\circ \longrightarrow M \otimes_R R[X] \longrightarrow N \otimes_R R[X] \longrightarrow L \otimes_R R[X] \longrightarrow \circ.$$

حال چون $R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ بعنوان $R[X]$–مدول یکدست است، پس دنباله زیر دقیق است.

$$\begin{aligned} \circ \longrightarrow M \otimes_R R[X] \otimes_{R[X]} R[X]_{\mathfrak{m}R[X]} &\longrightarrow N \otimes_R R[X] \otimes_{R[X]} R[X]_{\mathfrak{m}R[X]} \\ &\longrightarrow L \otimes_R R[X] \otimes_{R[X]} R[X]_{\mathfrak{m}R[X]} \longrightarrow \circ. \end{aligned}$$

یعنی دنباله زیر دقیق می‌باشد.

$$\circ \longrightarrow M \otimes_R R[X]_{\mathfrak{m}R[X]} \longrightarrow N \otimes_R R[X]_{\mathfrak{m}R[X]} \longrightarrow L \otimes_R R[X]_{\mathfrak{m}R[X]} \longrightarrow \circ.$$

لذا $R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ یك R–مدول یکدست است.

حال برای بررسی با وفا بودن آن، طبق قضیه ۲–۷ [۹]، چون $S = R[X] - \mathfrak{m}R[X]$ یك زیر مجموعه بسته ضربی در $R[X]$ است و $\mathfrak{m}[X] \cap S = \varnothing$، لذا از قضیه ۸–۴ در [۱]، داریم:

$$S^{-۱}(\mathfrak{m}[X]) \neq S^{-۱}(R[X]).$$

بنابراین

$$\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}R[X]} = \mathfrak{m}[X]_{\mathfrak{m}R[X]} \neq R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}.$$

لذا یکدست با وفا است.

حال قرار می‌دهیم $T = R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$. لذا T حلقه‌ای موضعی با تنها ایده‌آل ماکسیمال

$$\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}R[X]} = \mathfrak{m}T,$$

می‌باشد. حال باید ثابت کنیم $T/\mathfrak{m}T$ که میدان مانده‌ی حلقه T می‌باشد، نامتناهی است. چون طبق قضیه ۲–۴ مرجع [۹]، داریم

$$\frac{T}{\mathfrak{m}T} \cong \Big(\frac{R[X]}{\mathfrak{m}R[X]}\Big)_{\frac{\mathfrak{m}R[X]}{\mathfrak{m}R[X]}} = \Big(\frac{R[X]}{\mathfrak{m}R[X]}\Big)_{\circ} \cong \Big(\frac{R}{\mathfrak{m}}[X]\Big)_{\circ},$$

و $۱ + \mathfrak{m}, (۱ + \mathfrak{m})X, \ldots$ عضوهای متمایز از $R/\mathfrak{m}[X]$ می‌باشند، لذا $T/\mathfrak{m}T$ نامتناهی است. پس T حلقه‌ای یکدست با وفا با میدان مانده‌ی نامتناهی است. از این رو هر حلقه با میدان مانده‌ی متناهی

را می‌توان توسط هومورفیسم $R \longrightarrow R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ به حلقه‌ای با میدان مانده‌ی نامتناهی تبدیل کرد.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم R یك حلقه و I یك ایده‌آل از R باشد. دراین‌صورت عضو $r \in R$ را **بطور صحیح وابسته** روی ایده‌آل I گوییم اگر و فقط اگر

$$\exists n \in \mathbb{N}, \ \ \exists i \,, c_i \in I^i \qquad r^n + c_1 r^{n-1} + \cdots + c_{n-1} r + c_n = 0.$$

مجموعه تمام اعضایی از R که روی یك ایده‌آل مانند I بطور صحیح بسته‌اند را **بستار صحیح** ایده‌آل I گوییم و با نماد $\bar{I}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم که R یك حلقه باشد. ایده‌آل I از R را ایده‌آلی **بطور صحیح بسته** [۶] گوییم هرگاه، $\bar{I} = I$.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم R یك حلقه باشد. ایده‌آل I از R را یك **ایده‌آل نرمال**[۷] گوییم هرگاه، برای هر عدد صحیح مثبت n، I^n بطور صحیح بسته باشد.

نتیجه ۴.۲.۱. *در یك حلقه R ، هر ایده‌آل نرمال، یك ایده‌آل بطور صحیح بسته است.*

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم که $(R, \mathfrak{m})$ یك حلقه موضعی با میدان مانده‌ی نامتناهی باشد. در این صورت ایده‌آل I از R را یك **ایده‌آل $\mathfrak{m}-$کامل** [۸] گوییم، هرگاه

$$\exists y \in \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m}I : y = I.$$

همچنین I را یك ایده‌آل $\mathfrak{m}-$کامل نسبت به y هم می‌گوییم.

---

[۶] Integraly closed ideal
[۷] Normal ideal
[۸] $\mathfrak{m}$-Full ideal

نمادگذاری : با فرض I ایده‌آلی از حلقه موضعی $(R,\mathfrak{m})$، کمترین تعداد مولدهای I را با نماد $\mu(I)$ نشان می‌دهیم. به آسانی ثابت می‌شود که

$$\mu(I)=\dim_{R/\mathfrak{m}}(I/\mathfrak{m}I).$$

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم که $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی با میدان مانده‌ی نامتناهی باشد. گوییم ایده‌آل I دارای **خاصیت ریس** [۹] است، هرگاه برای هر ایده‌آل $J \supseteq I$ که $\lambda(J/I)<\infty$، داشته باشیم

$$\mu(J)\leqslant\mu(I).$$

تبصره ۷.۲.۱. *ایده‌آل‌های $\mathfrak{m}-$کامل لزوماً ایده‌آل‌های $\mathfrak{m}-$اولیه نیستند. بعنوان مثال، ایده‌آل‌های اول لزوماً $\mathfrak{m}-$اولیه نیستند، ولی هر $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R)$، یک ایده‌آل $\mathfrak{m}-$کامل است زیرا اولاً:*

$$\forall y\in\mathfrak{m}-\mathfrak{p},\quad \mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{m}\mathfrak{p}:y$$

ثانیاً:

$$\forall a\in\mathfrak{m}\mathfrak{p}:y,\quad ay\in\mathfrak{m}\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{p}$$

لذا از اول بودن $\mathfrak{p}$ و اینکه $y\notin\mathfrak{p}$، داریم $a\in\mathfrak{p}$. لذا $\mathfrak{m}\mathfrak{p}:y\subseteq\mathfrak{p}$. بنابراین $\mathfrak{m}\mathfrak{p}:y=\mathfrak{p}$.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. عضو $r\in R$ را منظم گوییم هرگاه مقسوم علیه صفر نباشد، یعنی برای هر $0\neq x\in R$، داشته باشیم $rx\neq 0$. بعبارت دیگر $r\notin Z(R)$.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه موضعی باشد. در این صورت ایده‌آل I از R را یک ایده‌آل **اساساً کامل** [۱۰] گوییم، هرگاه

۱) $I\neq R$،

[۹] Rees property
[۱۰] Basically full ideal

۲) هیچ مجموعه مینیمالی از مولدهای I را نتوان به مجموعه مینیمال از مولدهای ایده‌آلی بطور محض شامل I، توسعه داد.

مثال ۱۰.۲.۱. هر ایده‌آل دارای خاصیت ریس، یك ایده‌آل اساساً کامل است. لذا یك ایده‌آل $\mathfrak{m}-$اولیه و $\mathfrak{m}-$کامل، ایده‌آلی اساساً کامل به شمار می‌رود.

مثال ۱۱.۲.۱. طبق تعریف اگر R حلقه‌ای غیر صفر باشد، R ایده‌آل اساساً کامل در R می‌باشد. بنابراین هر حلقه غیر صفر مثالی از ایده‌آل اساساً کامل است.

همچنین با فرض $R = (\circ)$. در این صورت چون هیچ ایده‌آل ناصفری ندارد، لذا اساساً کامل در R است. ولی اگر $R \neq (\circ)$، آنگاه $(\circ)$ یك ایده‌آل اساساً کامل نیست. چون مجموعه تهی که مولد مینیمال برای ایده‌آل $(\circ)$ می‌باشد، قابل توسیع به پایه مینیمال برای هر ایده‌آل غیر صفر از R است.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یك حلقه موضعی و $I \subseteq J$ دو ایده‌آل R باشند. در این صورت J را یك **پوشش** [۱۱] روی I گوییم هرگاه

$$\frac{J}{I} \cong \frac{R}{\mathfrak{m}}.$$

قضیه ۱۳.۲.۱. *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یك حلقه موضعی با میدان مانده‌ی نامتناهی $R/\mathfrak{m}$ و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت اگر $\bar{I} = I$، آنگاه I یك ایده‌آل $\mathfrak{m}-$کامل است یا $I = \sqrt{\circ}$.*

برهان. مراجعه شود به مرجع [۶]، قضیه ۲.۴.

∎

قضیه ۱۴.۲.۱. *فرض کنیم R یك حلقه نوتری و I یك ایده‌آل از R باشد. همچنین فرض کنیم $\mu(I) = ht_R(I) = r$. دراین‌صورت I یك ایده‌آل بطور صحیح بسته است اگر و فقط اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\overline{I^n} = I^n$.*

---
[۱۱] Cover