بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان نامه براي دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی (تحقیق در عملیات)

مدل تحلیل پوششی داده هاي شبکه اي براي ارزیابی عملکرد زنجیره ي تامین

توسط:

مهدي احمدزاده فرد

استاد راهنما:

دکتر علی اشرفی

استاد مشاور:

دکتر سامان بابائی کفاکی

مهر ۱۳۹۳

تقدیم به:

پدرم

کوهی استوار و حامی من در طول تمام زندگی

مادرم

سنگ صبوری که الفبای زندگی به من آموخت

همسرم

که نشانه ی لطف الهی در زندگی من است

برادران و خواهرانم

که وجودشان مایه ی دلگرمی من است

اساتید عزیز

به آنان که آموختند مرا تا بیاموزم

کلیه حقوق مادی و معنوی اعم از چاپ، تکثیر، نسخه برداری، ترجمه، اقتباس و ... از این پایان نامه برای دانشگاه سمنان محفوظ است. نقل مطالب با ذکر منبع بلامانع است.

قدردانی

تشکر و سپاس مخصوص خداوندی است که بشر را آفریده و به او قدرت اندیشیدن داده و توانایی های بالقوه در وجود انسان قرار داده و او را امر به تلاش و کوشش نموده و راهنمایانی را برای هدایت بشر فرستاده است.

پس از ارادت خاضعانه به درگاه خداوند بی همتا لازم است از جناب آقای دکتر علی اشرفی به خاطر سعه ی صدر و رهنمودهای دلسوزانه ی ایشان که در تهیه ی این پایان نامه مرا مورد لطف خود قرار دادند و راهنمایی های لازم را نمودند و همچنین جناب آقای دکتر سامان بابائی که زحمت مشاوره اینجانب را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم و موفقیت همگان را از خداوند منان خواهانم.

همچنین لازم می دانم از جناب آقایان دکتر مهدی روزبه و دکتر سعید محمدیان سمنانی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند و با پیشنهادات ارزنده خود سبب بهبود این رساله شدند، سپاسگزاری نمایم.

همچنین وظیفه ی خود می دانم که از خانواده مهربانم، به ویژه پدر، مادر و همسر گرامی ام که با لطف بی دریغ و حمایت های بی شائبه خود مرا یاری نمودند سپاس گزاری کنم.

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش شناخته شده برای سنجش کارایی واحدهای تصمیم گیرنده با چند ورودی و چند خروجی می‌باشد. مدلهای استاندارد DEA، واحدهای تصمیم گیرنده را بعنوان یک جعبه سیاه در نظر می‌گیرند به‌طوری‌که تنها ورودی‌های اولیه و خروجی‌های نهایی برای سنجش کارایی مورد استفاده قرار می‌گیرند.
در این پایان نامه به معرفی تحلیل پوششی داده‌ها و مدل‌های کلاسیک آن می‌پردازیم. مدل‌های DEA شبکه‌ای معرفی خواهند شد، که یکی از ویژگیهای مهم این مدل‌ها این است که سنجش کارایی واحدها با توجه به ساختار درونی آنها انجام می‌گیرد. مدل‌های DEA شبکه‌ای را در زنجیره‌ی تامین استفاده می‌کنیم بطوریکه سه مدل DEA شبکه ای در زنجیره‌ی تامین با مکانیسم‌های سازمانی متفاوت با مفاهیم متمرکز، غیرمتمرکز و آمیخته معرفی می‌شوند، همچنین رابطه‌ی بین زنجیره‌ی تامین و بخش‌های درونی آن و رابطه‌ی بین این سه مکانیسم سازمانی را بیان می‌کنیم. سپس ما منابع زائد داخلی که در درون زنجیره‌ی تامین هدر میروند را شناسایی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، واحد تصمیم گیرنده، DEA شبکه ای، زنجیره‌ی تامین.

فهرست مطالب

۱ مقدمه‌ای بر تحلیل پوششی داده‌ها ۱

۱-۱ مقدمه ۱

۱-۲ سابقه‌ی تاریخی ۲

۱-۳ تابع تولید ۳

۱-۴ مجموعه ی امکان تولید ۶

۱-۴-۱ اصول موضوعه ی تولید ۸

۱-۵ روش های ناپارامتری و مدل‌های پایه‌ای DEA ۱۰

۱-۵-۱ مدل‌های شعاعی ۱۰

۱-۵-۲ مدل‌های غیر شعاعی ۱۹

۱-۶ مدل SBM ۲۲

۱-۷ جمع بندی ۲۸

۲ طبقه بندی مدلهای DEAبا ملاحظه‌ی ساختار درونی واحدهای تصمیم گیرنده ۲۹

۲-۱ مقدمه ۲۹

۲-۲ مدل کلاسیک ۳۰

۲-۳ مدل جریان‌های مشترک ۳۲

۲-۴ مدل‌های چند سطحی ۳۶

۲-۵ مدل‌هایDEAشبکه‌ای ۳۹

۳ مدل DEA شبکه ای برای ارزیابی عملکرد زنجیره‌ی تامین ۵۱

۳-۱ مقدمه ۵۱

۳-۱-۱ نگاهی به زنجیره‌ی تامین و تاریخچه‌ی آن ۵۲

۳-۲ رویکردهای مختلف تحلیل پوششی داده‌ها به زنجیره‌ی تامین ۵۴

۳-۲-۱ مدل‌ها ۵۶

۳-۲-۲ تحلیل کارایی ۶۳
۳-۲-۳ منابع زائد داخلی در زنجیره‌ی‌تامین ۷۰
۳-۳ جمع بندی ۷۸

۴ مثال عددی و مطالعات آتی **۷۹**
۴-۱ مقدمه ۷۹
۴-۲ مثال‌ها ۸۰
۴-۳ مطالعات آتی ۸۲

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۷۹**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۸۱**

پیشگفتار

تحلیل پوششی داده‌ها [1] (DEA) یکی از ابزارهای مناسب و کارامد برای سنجش کارایی واحدهای تصمیم گیری با چند ورودی و چند خروجی است، که امروزه به صورت گسترده‌ای توسعه یافته است.

مدلهای سنتی DEA، واحدهای تصمیم گیرنده را بعنوان یک جعبه سیاه در نظر می‌گیرند، به‌طوری‌که تنها ورودی‌های اولیه و خروجی‌های نهایی برای سنجش کارایی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در حالی‌که در دنیای واقعی بسیاری از واحدهای تصمیم گیرنده دارای فعالیتهای درونی می‌باشند. در سالهای اخیر مدل‌های DEA زیادی معروف به مدلهای DEA شبکه‌ای ارائه شده‌اند که با در نظر گرفتن فعالیت‌های درونی، به سنجش کارایی واحدهای تصمیم گیرنده می‌پردازند. یکی از کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها سنجش کارایی واحدهای تصمیم گیری در زنجیره‌ی تامین می‌باشد. در این پایان‌نامه:

در فصل اول به معرفی مقدمه‌ای بر تحلیل پوششی داده‌ها و مدلهای پایه‌ای آن می‌پردازیم.

در فصل دوم، به معرفی مدل‌های DEA شبکه‌ای و طبقه بندی آنها می‌پردازیم.

در فصل سوم، مدل DEA شبکه‌ای برای ارزیابی عملکرد زنجیره‌ی تامین را بیان می‌کنیم.

در فصل چهارم، به دو مثال عددی و مطالعات آتی خواهیم پرداخت.

---

[1] Data Envelopment Analysis (DEA)

فصل ۱

مقدمه‌ای بر تحلیل پوششی داده‌ها

۱-۱ مقدمه

سنجش کارایی سازمان‌ها یکی از وظایف مدیران نظارت بر سازمان هاست، که باید به آن توجه زیادی داشت. کارایی یک مفهوم مدیریتی است که سابقه‌ی طولانی در علم مدیریت دارد. در واقع کارایی به طور ساده نسبت خروجی یک مجموعه به ورودی آن مجموعه را بیان می‌کند و نشان می‌دهد که سازمان چگونه از منابع خود در راستای تولید نسبت به بهترین عملکرد در مقطعی از زمان استفاده کرده است. کارایی به عنوان یک مکانیسم اصلی برای شفاف‌سازی در بین سازمان‌ها رواج یافته است. با توجه به مهم بودن این موضوع در دنیای رقابت، سازمان‌ها باید به دنبال بهبود کارایی باشند. دراین فصل پس از بیان سابقه‌ی تاریخی برای چگونگی محاسبه‌ی کارایی سازمان‌ها، مقدمه‌ای از تحلیل پوششی داده‌ها را بیان می‌کنیم. تحلیل پوششی داده‌ها یکی از پرکاربردترین روش‌های غیر پارامتری است که به ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیری[۱] (که همان سازمان ها هستند) به مقایسه آنها با یکدیگر می پردازد.

[۱] Decision Making Unit (DMU)

۱-۲ سابقه‌ی تاریخی

برای محاسبه‌ی کارایی لازم است که تابع تولید[۱] مشخص گردد که به علت پیچیدگی فرآیند تولید، تغییر در تکنولوژی و چند مقداری بودن تولید در اکثر موارد تابع تولید در دسترس نیست. از این رو لازم است که تقریب تابع تولید را تعیین کنیم. یکی از روشهای قدیمی برای تعیین تقریب تابع تولید، استفاده از روش های پارامتری است. در روش‌های پارامتری با روش‌های آماری و اقتصاد سنجی تابع تولید مشخصی را تخمین زده و شکل خاصی از تابع در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از این تابع کارایی تعیین می‌شود، که اصطلاحا به روش برازش منحنی معروف است. برای جزئیات بیشتر به [۱] مراجعه کنید.

با توجه به معایب روش‌های پارامتری که شکل تابع تولید باید به شکل خاص باشد، همچنین برای واحدهای تصمیم گیرنده‌ای که چند ورودی و یک خروجی دارند کاربرد دارد، لذا در دنیای واقعی به ندرت بکار می‌روند در نتیجه این معایب باعث معرفی روش‌های غیر پارامتری شد.

فارل[۲] برای مشکلات روش‌های پارامتری تحقیقات گسترده‌ای انجام داد. او یک روش غیر پارامتری برای تعیین کارایی در حالت دو ورودی و یک خروجی ارائه داد (شکل ۱-۱). اگر چه کار فارل نیاز به شکل خاصی نداشت اما هنوز مشکل تک خروجی بودن حل نشده بود.

برخی تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها را پایه و اساس کار فارل می دانند. اما شروع اصلی بحث تحلیل پوششی داده‌ها در رساله دکتری چارنز[۳] به راهنمایی آقای کوپر [۴]و رودز [۵]بیان شده است، که با توجه به اول اسم آنها مدل CCR نام گرفته است.

پس از آنها بنکر[۶]چارنز و کوپر مدل BCC را ارائه دادند، که این دو مدل پایه بسیاری از مقالات تحلیل کارایی شدند و این شاخه پیشرفت زیادی تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌ها یافت.

---

[۱] Production Function

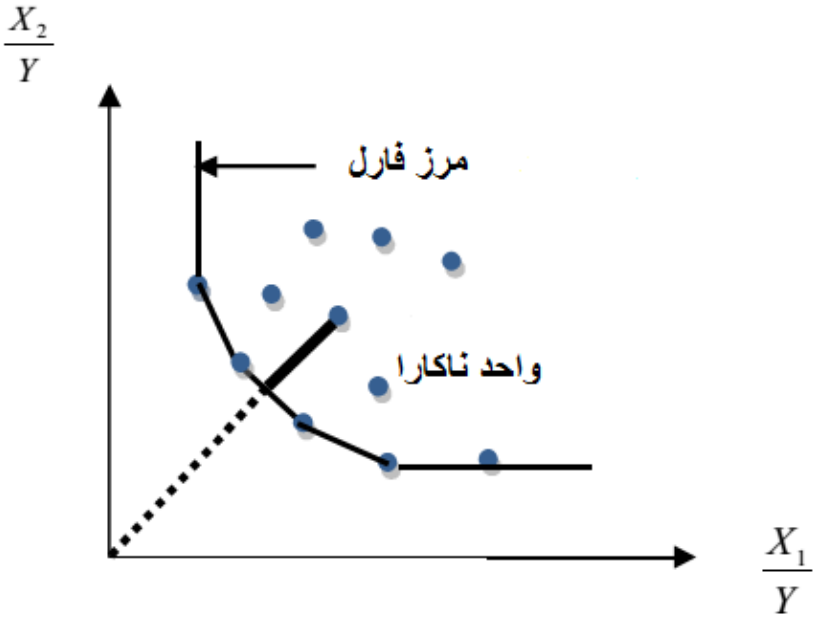
[۲] Farell

[۳] Charnes

[۴] Cooper

[۵] Rhodes

[۶] Banker



شکل ۱-۱: کارایی فارل

۱-۳ تابع تولید

تعریف ۱-۳-۱. ورودی عبارتست از آنچه که به واحدها می‌دهیم تا عمل مربوطه را بر روی آن انجام دهد. (ورودی عاملی است که افزایش آن، با ثابت نگه داشتن عوامل دیگر کارایی کاهش یافته، و با کاهش آن با ثابت نگه داشتن دیگر عوامل کارایی افزایش می یابد).

تعریف ۱-۳-۲. خروجی عبارتست از آنچه پس از انجام عمل خاص بر ورودی‌ها از واحدها دریافت می‌کنیم.
(خروجی عاملی است که افزایش آن، با ثابت نگه داشتن عوامل دیگر کارایی افزایش یافته و با کاهش آن با ثابت نگه داشتن دیگر عوامل کارایی کاهش می‌یابد).

تعریف ۱-۳-۳. واحد تصمیم گیرنده [۱] واحدیست که با دریافت بردار ورودی $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ بردار خروجی $y = (y_1, y_2, ..., y_s)$ را تولید نماید(شکل ۱-۲).

تابع تولید در اقتصاد تابعی مهم و مورد توجه مدیران ارشد بوده است. چون با داشتن تابع تولید می‌توان به چگونگی عملکرد واحدها پی‌برد. در واقع تابع تولید تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی‌ها،

[۱] Decision Making Unit (DMU)

شکل ۱-۲: واحد تصمیم گیرنده با m ورودی و s خروجی

بیشترین خروجی را دارا باشد.

تابع تولید رابطه موجود بین میزان تولید و مقادیر عوامل تولید مورد نیاز برای تولید آن است. فرض کنید x بردار ورودی، y بردار خروجی و f تابع تولید باشد، در این صورت اگر تابع تولید به صورت $y = f(x)$ تعریف شود آنگاه y بیشترین میزان تولید را به ازای ترکیب‌های مختلف بردار ورودی x را نشان می‌دهد.

تعریف ۱-۴.۳. ورودی و خروجی مجازی

فرض کنید که n، DMU با بردارهای ورودی $X_j = (x_{1j}, ..., x_{mj})$، $(j = 1, ..., n)$ و بردارهای خروجی $Y_j = (y_{1j}, ..., y_{sj})$، $(j = 1, ..., n)$ موجود باشند و $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ یک بردار نامنفی باشد. در این صورت ورودی و خروجی مجازی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{ورودی مجازی} = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j$$

$$\text{خروجی مجازی} = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \cdots + \lambda_n Y_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j$$

تعریف ۱-۵.۳. واحد تصمیم‌گیرنده‌ای که ورودی و یا خروجی آن مجازی باشد واحد تصمیم‌گیرنده‌ی مجازی نامیده می‌شود.

بعبارت دیگر این گونه واحدها، واحدهایی هستند که ورودی و یا خروجی آن‌ها از ترکیب ورودی و خروجی چند واحد تصمیم‌گیرنده‌ی واقعی حاصل می‌شود. در نتیجه، تمام DMUهای مجازی به صورت

زیر تعریف می‌شود.

$$A = \left\{ (x,y) \mid x = \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j \ , \ y = \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j \ , \ \forall j \ \ \lambda_j \geqslant ۰ \right\}$$

تعریف ۱-۶.۳. واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای که عملکرد متشابه داشته باشند به این معنی که با دریافت ورودی‌های مشابه خروجی‌های مشابه تولید کنند واحدهای متجانس نامیده می‌شوند.

تعریف ۱-۷.۳. واحدهای تصمیم‌گیرنده را مستقل گوییم هرگاه ورودی و خروجی یک واحد تصمیم گیرنده با ورودی و خروجی واحد تصمیم گیرنده دیگر ارتباط نداشته باشد.

تعریف ۱-۸.۳. فضای غالب بر واحد (x,y) مجموعه واحدهایی از مجموعه‌ی امکان تولید[۱]است، که با ورودی کمتر نسبت به x خروجی بیشتری تولید نماید یعنی:

$$D(x,y) = \{(x^{'},y^{'}) \in T \quad | \quad (x^{'},-y^{'}) \leq (x,-y)\}$$

تعریف ۱-۹.۳. DMU_p را کارای نسبی گویند اگروتنهااگر هیچ DMU مجازی یا حقیقی یافت نشود که غالب بر DMU_p باشد.

کوپمن [۲] کارایی تکنیکی را به زبان ریاضی به صورت زیر تعریف کرده است(کارایی پارتو):

یک واحدتصمیم گیرنده با ورودی x و خروجی y کاراست اگروتنهااگر $(x^{'},y^{'}) \in T$ وجود نداشته باشد به طوریکه:

$$(x,y) \neq (x^{'},y^{'}) \quad , \quad x^{'} \leq x \quad , \quad y^{'} \geq y.$$

[۱] Productive Possibility Set

[۲] Coopmans

۱-۴ مجموعه ی امکان تولید

تعریف ۱-۴-۱. بازده به مقیاس

بازده به مقیاس در اقتصاد خرد، عبارت است از تاثیر عوامل تولید بر تولید.

اگر میزان افزایش متناسب خروجی‌ها برابر افزایش متناسب ورودی‌ها و میزان کاهش متناسب خروجی‌ها برابر میزان کاهش ورودی‌ها باشد بازده به مقیاس ثابت[۱] را خواهیم داشت و اگر افزایش متناسب خروجی‌ها نسبت به افزایش متناسب ورودی‌ها بیشتر باشد و کاهش متناسب خروجی‌ها نسبت به کاهش متناسب ورودی‌ها کمتر باشد در این صورت بازده به مقیاس افزایشی[۲]را خواهیم داشت. بازده به مقیاس کاهشی[۳] مشابها تعریف می‌شود (شکل ۱-۳ بازده به مقیاس‌های مختلف را نشان می‌دهد).

یا به عبارت دیگر اگر $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ نمایش تابع تولید باشد آنگاه:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \leq \lambda f(x_1, x_2, ..., x_n) \Longleftrightarrow IRS$$

افزایشی) مقیاس به (بازده

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda f(x_1, x_2, ..., x_n) \Longleftrightarrow CRS$$

ثابت) مقیاس به (بازده

---

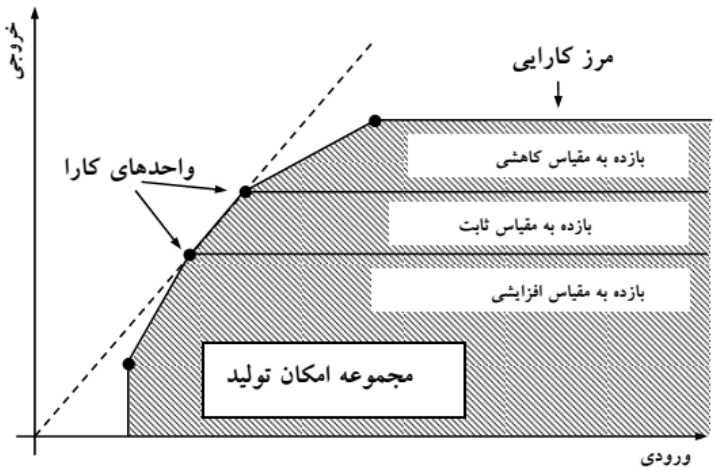
[۱] Constant Returns To scale(CRS)

[۲] Increasing Returns To scale(IRS)

[۳] Decreasing Returns To scale(DRS)

$$f(\lambda x_۱ \lambda x_۲, ..., \lambda x_n) \geq \lambda f(x_۱, x_۲, ..., x_n) \Longleftrightarrow DRS$$

کاهشی) مقیاس به (بازده



شکل ۱-۳: بازده به مقیاس های مختلف

فارل با استفاده از ورودی و خروجی واحدهای تصمیم‌گیری و اصول حاکم بر آن مجموعه‌ای به نام مجموعه‌ی امکان تولید معرفی کرد و قسمتی از مرز آن را تقرب تابع تولید نامید. این مجموعه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T = \{(x, y) \mid \text{بردار نامنفی } x \text{ بتواند بردار نامنفی } y \text{ را تولید نماید}\}$$

۱-۴-۱ اصول موضوعه ی تولید

برای تقریب تابع تولید با استفاده از روشهای غیر پارامتری باید مجموعه‌ی امکان تولید ساخته شود. مجموعه‌ی امکان تولید با توجه به تابع تولید ساخته می‌شود.

اصول زیر را برای تعریف مجموعه‌ی امکان تولید T تحت بازده به مقیاس ثابت می‌پذیریم.

اصل اول شمول مشاهدات(ناتهی بودن T)

تمامی مشاهدات و ترکیب‌های ورودی و خروجی که وجود دارند شدنی هستند و در T قرار دارند. یعنی

$$(x_j, y_j) \in T \qquad \forall j = ۱, ..., n.$$

اصل دوم بی‌کرانی اشعه

این اصل بیان می‌کند که اگر (x, y) شدنی باشند آن گاه برای هر $k \geq ۰$، (kx, ky) شدنی هستند. یا به عبارت دیگر:

$$(x, y) \in T \qquad k \geq ۰ \quad \Longrightarrow \quad (kx, ky) \in T.$$

اصل سوم امکان پذیری (یکنوایی)

اگر ورودی x بتواند خروجی y را تولید کند آن‌گاه ورودی $\bar{x}$ که در آن $x \leq \bar{x}$ نیز می‌تواند خروجی y را تولید کند. به عبارت دیگر

$$\forall (x, y) \in T \quad x \leq \bar{x} \implies (\bar{x}, y) \in T.$$

همچنین اگر خروجی y توسط ورودی x تولید شده باشد آن‌گاه خروجی $\bar{y}$ که در آن $y \geq \bar{y}$ نیز می

تواند توسط ورودی x تولید گردد. یعنی:

$$\forall(x,y)\in T \quad y\geq \bar{y} \implies (x,\bar{y})\in T.$$

اصل چهارم تحدب

این اصل بیان می‌کند که اگر دو ترکیب ورودی-خروجی مانند (x_a,y_a) و (x_b,y_b) را در مجموعه‌ی امکان تولید داشته باشیم آنگاه برای $۰\leq\lambda\leq ۱$ ترکیب محدب آنها متعلق به مجموعه‌ی امکان تولید باشد. یعنی:

$$(x_a,y_a)\in T,\quad (x_b,y_b)\in T \implies (\bar{x}=\lambda x_a+(۱-\lambda)x_b\ ,\ \bar{y}=\lambda y_a+(۱-\lambda)y_b\ )\quad \in T.$$

اصل پنجم کمینه‌ی برونیابی

این اصل بیانگر این است که تابع تولید کوچکترین تابعی است که در اصول ۴-۱ فوق صدق می‌کند.

با توجه به اصول بالا مجموعه‌ی امکان تولید به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_c=\{(x,y)\mid x\geq\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j x_j,\quad y\leq\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j y_j,\quad \lambda_j\geq ۰,\qquad j=۱,...,n\}$$

اندیس (c) در T_c بیانگر این است که مجموعه‌ی امکان تولید تحت بازده به مقیاس ثابت می‌باشد(CRS).

اگر اصل دوم یعنی اصل بی‌کرانی اشعه را از اصول موضوعه‌ی فوق حذف کنیم مجموعه‌ی امکان تولید به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_v=\{(x,y)\mid x\geq\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j x_j,\quad y\leq\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j y_j,\quad \sum_{j=۱}^{n}\lambda_j=۱,\quad \lambda_j\geq ۰,\qquad j=۱,...,n\}$$

که در آن اندیس (v) در T_v بیانگر این است که مجموعه‌ی امکان تولید تحت بازده به مقیاس متغیر می‌باشد(VRS).
متشابها مجموعه‌های امکان تولید با بازده به مقیاس افزایشی (کاهشی) با اضافه کردن قید $\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \leq ۱$ ($\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \geq ۱$) به T_c تعریف می‌شوند.

قضیه ۱-۲.۴. اگر یک DMU تحت تکنولوژی با بازده به مقیاس ثابت کارا باشد، آنگاه تحت بازده به مقیاس متغیر نیز کارا خواهد بود.

برهان. برای اثبات به [۶] مراجعه کنید.

□

قضیه ۱-۳.۴. تعداد واحدهای کارا تحت تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت کمتر مساوی تعداد واحدهای کارا در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر است.

برهان. برای اثبات به [۶] مراجعه کنید.

□

۱-۵ روش های ناپارامتری و مدل‌های پایه‌ای DEA

۱-۵-۱ مدل‌های شعاعی

مدل CCR
مدلی که فارل ارائه داده بود، نیاز به شکل خاصی نداشت اما برای چند ورودی و تک خروجی کاربرد داشت. چارنز، کوپر و رودز کار فارل را به حالت چند ورودی و چند خروجی تعمیم دادند که با توجه به اول نام آنها به مدل CCR معروف است.

مجموعه‌ی T_c را در نظر می‌گیریم. مرز این مجموعه را مرز کارا تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم که DMU_p واحد تحت ارزیابی باشد. به دو طریق می‌توان DMU_p را روی مرز تصویر کرد:

ماهیت ورودی: با ثابت نگه داشتن خروجی‌ها، ورودی‌ها را تا حد امکان کاهش می‌دهیم.
ماهیت خروجی: با ثابت نگه داشتن ورودی‌ها، خروجی‌ها را تا حد امکان افزایش می‌دهیم.

بنابراین در ماهیت ورودی سعی در پیدا کردن واحد مجازی داریم که همان خروجی را با حداقل ورودی ممکن تولید کنیم. این کاهش شعاعی بوده یعنی همه‌ی ورودی‌ها به یک نسبت کاهش می‌یابند. در این صورت هدف حل مساله‌ی زیر است: (شکل ۱-۴)

$$\begin{aligned} &min \ \ \theta \\ &s.t. \ \ (\theta x_p, y_p) \ \in T_C \\ &\quad \theta \text{ نامقید} \end{aligned} \tag{۱-۱}$$

با توجه به تعریف مجموعه‌ی امکان تولید T_c مساله‌ی (۱-۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود، که به مدل CCR با ماهیت ورودی به فرم پوششی مشهور است(شکل ۱-۴).

$$\begin{aligned} &min \ \ \theta \\ &s.t. \\ &\theta x_{ip} \geq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij}, \qquad i = ۱, \cdots, m, \\ &y_{rp} \leq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj}, \qquad r = ۱, \cdots, s, \\ &\lambda_j \geq ۰, \qquad j = ۱, \cdots, n. \end{aligned} \tag{۱-۲}$$

با توجه به مدل یک جواب بدیهی آن به صورت $\lambda_p = ۱$، $\lambda_j = ۰$ ، $j \neq p$ ، $j = ۱, ..., n$ و $\theta = ۱$ است. چون مساله از نوع مینیمم سازی است، پس در جواب بهین همواره $\theta^* \leq ۱$ خواهد بود.
با معرفی بردار متغیرهای کمکی برای ورودی‌ها $S^- = (s_۱^-, s_۲^-, ..., s_m^-)$ و بردار متغیرهای کمکی