دانشگاه بیرجند

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

عنوان :

تجزیه‌هایی از ماتریس‌های اکیداً علامت منظم

استاد راهنما :

دکتر مهدی پناهی

استاد مشاور :

دکتر مسعود امان

نگارش :

مریم امیری بادخور

زمستان ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

پدر ارجمندم،

مادر فداکارم،

همسر عزیزم

و به همه‌ی کسانی که صمیمانه دوستشان دارم.

قدردانی و تشکر

قبل از هر چیز خدای منان را سپاس می‌گویم که مرا راهنمایی و یاری نموده و همواره یار و یاور بندگانش می‌باشد.

مراتب تشکر و سپاس خود را از استاد راهنمای گرامی‌ام جناب آقای دکتر مهدی پناهی ابراز می‌دارم که با راهنمایی‌ها و هدایت گرانبهایشان مرا در تدوین این رساله یاری فرمودند.

همچنین از استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر مسعود امان کمال سپاسگزاری را دارم.

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر رحمانی و جناب آقای دکتر خنجری که قبول زحمت فرمودند و داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر حسینی نماینده‌ی محترم تحصیلات تکمیلی که در جلسه‌ی دفاع این جانب حضور داشتند تشکر می‌کنم.

از همسر عزیزم که صبورانه در مراحل مختلف نگارش پایان‌نامه‌ام همواره در کنار من بودند قدردانی می‌کنم.

در ضمن از خانوادهٔ عزیزم که همواره موجبات دلگرمی‌ام را فراهم نمودند، تشکر می‌کنم.

چکیـده

یک ماتریس اکیداً علامت منظم نامیده می‌شود اگر برای هر k همه‌ی مینورهای $k \times k$ی آن غیر صفر و علامت یکسان داشته باشند. چندین تجزیه از ماتریس‌های اکیداً علامت منظم، شامل تجزیه‌ی LDU، تجزیه‌ی QR، تجزیه‌ی متقارن- مثلثی و تجزیه‌ی شور را مطالعه می‌کنیم. چند مشخص سازی ارائه شده است.

کلمات کلیدی: ماتریس اکیداً علامت منظم، تجزیه‌ی LDU، تجزیه‌ی QR، تجزیه‌ی متقارن- مثلثی، تجزیه‌ی شور

جدول نمادها

مجموعه‌ی اعداد طبیعی .... $\mathbb{N}$

مجموعه‌ی اعداد مختلط .... $\mathbb{C}$

مجموعه‌ی اعداد حقیقی .... $\mathbb{R}$

مجموعه‌ی بردارهای nتایی مختلط .... $\mathbb{C}^n$

مجموعه‌ی بردارهای nتایی حقیقی .... $\mathbb{R}^n$

فضای برداری ماتریس‌های مختلط $m \times n$ .... $\mathbb{C}^{m\times n}$

فضای برداری ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ .... $\mathbb{R}^{m\times n}$

یک ماتریس صفر یا یک بردار صفر 0

ماتریس واحد I

ترانهاده‌ی ماتریس A .... A^T

معکوس A .... A^{-1}

توان kام A .... A^k

دترمینان A .... $\det A$

مزدوج A .... $\bar{A}$

ترانهاده‌ی هرمیتی A .... A^H

نرم برداری x .... $||x||$

نرم-۲ برداری .... $||\cdot||_2$

مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های صعودی از k عدد طبیعی نابیشتر از n .... $Q_{k,n}$

عدد پراکندگی α .... $d(\alpha)$

زیر ماتریسی از A با سطرهای α و ستون‌های β .... $A[\alpha|\beta]$

جمعاً مثبت .... TP

مثلثی جمعاً مثبت .... ΔTP

اکیداً علامت منظم .... SSR

علامت مینور مرتبه‌ی k .... ε_k

ماتریس قطری با عناصر قطری $d_۱$، ...، d_n .... $\mathrm{diag}(d_۱, \ldots, d_n)$

پایان برهان .... $\square$

فهرست مندرجات

مقدمه

یک ماتریس $n \times n$، A اکیداً علامت منظم (SSR) است اگر برای هر k $(1 \leq k \leq n)$، همه‌ی زیر ماتریس‌های $k \times k$ از A دارای دترمینانی با علامت اکید یکسان باشند. این ماتریس‌ها در بسیاری از شاخه‌های مختلف علوم مانند آنالیز عددی، آمار و کامپیوتر ظاهر می‌شوند [۲]. ماتریس‌های جمعاً مثبت (TP) یک زیر رده‌ی بسیار مهم از ماتریس‌های اکیداً علامت منظم را تشکیل می‌دهند. یک ماتریس جمعاً مثبت است اگر دترمینان همه‌ی زیر ماتریس‌های آن مثبت باشند. این ماتریس‌ها کاربردهای مهمی در بسیاری از زمینه‌ها مانند نظریه تقریب، اقتصاد، مکانیک و غیره دارند [۱, ۲]. در این تحقیق تجزیه‌هایی از ماتریس‌های جمعاً مثبت و ماتریس‌های اکیداً علامت منظم را ارائه می‌کنیم. این تجزیه‌ها در حل دستگاه معادلات خطی، یافتن معکوس و محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس به کار می‌روند.

در فصل اول نمادها، تعاریف اولیه و قضایایی که در روند تحقیق به کار گرفته شده و آشنایی با آن‌ها برای مطالعه و درک مطالب مؤثر است، را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم تجزیه‌ی LDU برای ماتریس‌های جمعاً مثبت و اکیداً علامت منظم ارائه می‌شود.

رده‌های خاصی از ماتریس‌ها در فصل سوم معرفی شده است که نقشی اساسی در مشخص سازی‌های ارائه شده در این تحقیق دارند. سپس در این فصل یک مشخص سازی برای ماتریس‌های جمعاً مثبت و اکیداً علامت منظم بر حسب تجزیه‌ی QR آن‌ها ارائه شده است.

اخیراً Golub و Yuan تجزیه‌ی متقارن-مثلثی ماتریس‌های نامنفرد را معرفی کرده‌اند [۸]. در فصل چهارم ماتریس‌های جمعاً مثبت و اکیداً علامت منظم را بر حسب تجزیه‌ی

متقارن- مثلثی آن‌ها مشخص سازی می‌کنیم.

تجزیه‌ی شور ابزاری قوی در جبر خطی محسوب می‌شود. این تجزیه از ماتریس‌های اکیداً علامت منظم در فصل پنجم ارائه شده است.

در این تحقیق مشاهده می‌شود که مشکلات و پیچیدگی‌هایی در مشخص سازی‌های ارائه شده برای ماتریس‌های اکیداً علامت منظم وجود دارد که در مشخص سازی‌های متناظر برای ماتریس‌های جمعاً مثبت با آن‌ها مواجه نیستیم.

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

این فصل شامل دو بخش است. در بخش اول بعضی مفاهیم، اصطلاحات و تعاریف و در بخش دوم قضیه‌های مورد نیاز در رابطه با فصل‌های بعدی و رده‌های خاصی از ماتریس‌ها ارائه می‌شوند.

۱.۱ نمادها و تعاریف اولیه

ابتدا چند تعریف مورد نیاز را یادآوری کرده و در ادامه به معرفی مفاهیم جدیدی از ماتریس‌ها می‌پردازیم.

فضای برداری ماتریس‌های مختلط $m \times n$ را با $\mathbb{C}^{m\times n}$ و مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های مختلط مربعی مرتبه‌ی n را با $\mathbb{C}^{n\times n}$ نشان می‌دهیم. فضای برداری $\mathbb{R}^{m\times n}$ متشکل از همه‌ی ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ می‌باشد. مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی مربعی مرتبه‌ی n را با $\mathbb{R}^{n\times n}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱ ماتریس مربعی $A = (a_{ij})$ از مرتبه‌ی n را متقارن نامیم، اگر

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = ۱, ۲, \ldots, n.$$

تعریف ۲.۱.۱ ماتریس مربعی A از مرتبه‌ی n، منفرد نامیده می‌شود هر گاه $\det A = ۰$، در غیر این صورت آن را نامنفرد گویند.

تعریف ۳.۱.۱ عدد $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس A نامیده می‌شود اگر بردار $x \neq ۰$ وجود داشته باشد به طوری که $Ax = \lambda x$. چنین برداری را بردار ویژه‌ی A متناظر با مقدار ویژه‌ی λ می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ نامنفی (مثبت، نامثبت، منفی) است اگر تمام درایه‌هایش نامنفی (مثبت، نامثبت، منفی) باشد و می‌نویسیم $A \geq ۰$ ($A > ۰$، $A \leq ۰$، $A < ۰$).

تعریف ۵.۱.۱ ماتریس $n \times n$ قطری D را با $D = \mathrm{diag}(d_۱, \ldots, d_n)$ نشان می‌دهیم، که در آن $d_۱$، $d_۲$، $\ldots$ ، d_n عناصر قطری و سایر عناصر صفر هستند.

تعریف ۶.۱.۱ مجموعه بردارهای $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ در $\mathbb{R}^n$ متعامد است هر گاه

$$x_i^T x_j = ۰, \quad i \neq j.$$

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ مجموعه‌ای از بردارهای متعامد باشد. این مجموعه از بردارها را یکا متعامد (متعامد یکه) می‌نامیم هر گاه

$$x_i^T x_i = ۱, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

تعریف ۸.۱.۱ ماتریس مربعی A متعامد نامیده می‌شود هر گاه $A^T A = I$.

تعریف ۹.۱.۱ یک نرم برداری روی $\mathbb{C}^n$ یک نگاشت حقیقی مانند $\| . \| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ است که به هر بردار $x \in \mathbb{C}^n$ یک عدد حقیقی با خواص زیر نسبت می‌دهد.

۱) برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ و $x \neq ۰$، $\|x\| > ۰$.

۲) برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و هر $x \in \mathbb{C}^n$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

۳) برای هر $x, y \in \mathbb{C}^n$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

بعضی نرم‌های برداری معروف عبارتند از

(نرم-۱) $\|x\|_۱ = \sum_{i=۱}^n |x_i|,$

(نرم اقلیدسی یا نرم-۲) $\|x\|_۲ = \left(\sum_{i=۱}^n |x_i|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}},$

(نرم ماکزیمم یا نرم بی‌نهایت) $\|x\|_\infty = \max |x_i|, \quad i = ۱, \ldots, n,$

با تعویض $\mathbb{C}^n$ با $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}$ با $\mathbb{R}$ در تعریف ۹.۱.۱ می‌توان یک نرم برداری برای $\mathbb{R}^n$ تعریف کرد.

تعریف ۱۰.۱.۱ اگر $A = (a_{ij})$ ماتریسی با درایه‌های مختلط باشد، مزدوج A را به صورت $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ ترانهاده‌ی هرمیتی ماتریس A را با A^H نشان می‌دهیم و به صورت

$$A^H = \bar{A}^T$$

تعریف می‌کنیم. پس اگر $A = (a_{ij})$، آن گاه $A^H = (\bar{a}_{ji})$.

تعریف ۱۲.۱.۱ ماتریس مربعی A را هرمیتی گوییم هر گاه

$$A^H = A.$$

قضیه ۱۳.۱.۱ مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های هرمیتی، حقیقی‌اند.

برهان. به [۱۱] رجوع شود. □

تعریف ۱۴.۱.۱ ماتریس $n \times n$، مختلط A، معین مثبت نامیده می‌شود هر گاه $A = A^H$ و برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ و $x \neq 0$،

$$x^H A x > 0.$$

در حالتی که A حقیقی باشد، A معین مثبت نامیده می‌شود هر گاه برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و $x \neq 0$، $x^T A x > 0$.

تعریف ۱۵.۱.۱ ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$، یکانی نامیده می‌شود هر گاه

$$A^H A = I.$$

تعریف ۱۶.۱.۱ دو ماتریس مربعی A و B را متشابه گویند هر گاه ماتریس نامنفردی مانند S موجود باشد به طوری که

$$A = S^{-1} B S.$$

اگر ماتریس A با یک ماتریس قطری متشابه باشد، آن گاه A قطری شدنی نامیده می‌شود.

قضیه ۱۷.۱.۱ ماتریس‌های متشابه مقادیر ویژه‌ی یکسان دارند.

برهان. به [۱۱] رجوع شود. □

قضیه ۱۸.۱.۱ فرض کنید A ماتریسی با مقادیر ویژه‌ی متمایز باشد. آن گاه یک تبدیل متشابه موجود است به قسمی که $P^{-1}AP = D$، که D ماتریسی قطری با عناصر قطری برابر با مقادیر ویژه‌ی A و P ماتریسی است که ستون‌های آن را بردارهای ویژه‌ی A تشکیل می‌دهند.

برهان. به [۱۱] رجوع شود. □

تعریف ۱۹.۱.۱ برای $k, n \in \mathbb{N}$، $1 \leq k \leq n$، $Q_{k,n}$ به صورت مجموعه‌ای از همه‌ی دنباله‌های صعودی از k عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی n تعریف می‌شود؛ یعنی،

$$Q_{k,n} = \{\alpha | \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k), 1 \leq k \leq n, \alpha_i \in \mathbb{N} \ \ \forall\, i, 1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq n\}.$$

تعداد اعضای مجموعه‌ی $Q_{k,n}$ برابر است با

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

مثال ۲۰.۱.۱ برای $n = 5$ و $k = 1, 2$ داریم

$$Q_{1,5} = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$Q_{2,5} = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\},$$

و تعداد اعضای مجموعه‌ی $Q_{2,5}$ برابر است با $\binom{5}{2} = 10$.

تعریف ۲۱.۱.۱ برای هر $\alpha \in Q_{k,n}$ عدد پراکندگی[۱] آن را با $d(\alpha)$ نشان داده و به صورت

$$d(\alpha) = \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i - 1) = \alpha_k - \alpha_1 - (k-1)$$

تعریف می‌کنیم، با این قرارداد که برای $\alpha \in Q_{1,n}$، $d(\alpha) = 0$.

[۱] dispersion number

مشاهده می‌کنیم که $d(\alpha) = ۰$، به این معنی است که α شامل k عدد صحیح متوالی است.

مثال ۲۲.۱.۱ فرض کنید $\alpha = (۱, ۳, ۵),\ \beta = (۲, ۳, ۴) \in Q_{۳,۵}$. در این صورت

$$d(\alpha) = ۲,\quad d(\beta) = ۰.$$

تعریف ۲۳.۱.۱ برای $\alpha = (\alpha_۱, \ldots, \alpha_k), \beta = (\beta_۱, \ldots, \beta_k) \in Q_{k,n}$ و $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، زیر ماتریسی $k \times k$ از A شامل سطرهای $\alpha_۱$، ... ، α_k و ستون‌های $\beta_۱$، ... ، β_k را با $A[\alpha|\beta]$ نشان داده و دترمینان آن را یک مینور[۲] A می‌نامیم. اگر $\alpha = \beta$ آن گاه $A[\alpha|\beta]$ را با $A[\alpha]$ نشان داده و آن را یک زیر ماتریس اصلی[۳] A می گوییم [۵].

زیر ماتریس‌های اصلی $A[۱, ۲, \ldots, k]$، $k = ۱, \ldots, n$، زیر ماتریس‌های اصلی پیشروی A نامیده می‌شوند.

مثال ۲۴.۱.۱ فرض می‌کنیم

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۵ & ۴ & ۳ \\ ٦ & ۷ & ۱ & ۲ \\ ۸ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۵ & ۴ & ۲ & ۳ \end{pmatrix},$$

$\alpha = (۱, ۲, ۴)$ و $\beta = (۱, ۲, ۳)$. در این صورت

$$A[\alpha|\beta] = A[۱, ۲, ۴|۱, ۲, ۳] = \begin{pmatrix} ۱ & ۵ & ۴ \\ ٦ & ۷ & ۱ \\ ۵ & ۴ & ۲ \end{pmatrix}$$

و با فرض $\alpha = (۲, ۴)$،

$$A[\alpha] = A[۲, ۴] = \begin{pmatrix} ۷ & ۲ \\ ۴ & ۳ \end{pmatrix}.$$

[۲] minor

[۳] principal submatrix

تعریف ۲۵.۱.۱ یک مینور اصلی پیشرو[۴] از مرتبه‌ی k برای ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، مینوری به صورت $\det A[۱,\dots,k]$، $k = ۱,\dots,n$ می‌باشد.

مثال ۲۶.۱.۱ ماتریس A تعریف شده در مثال ۲۴.۱.۱ را در نظر می‌گیریم. مینور اصلی پیشرو از مرتبه‌ی ۳ برای A به صورت

$$\det A[۱,۲,۳] = \det \begin{pmatrix} ۱ & ۵ & ۴ \\ ٦ & ۷ & ۱ \\ ۸ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} = -۱۸۴$$

می‌باشد.

تعریف ۲۷.۱.۱ یک مینور ستون-اول[۵] (سطر-اول[٦]) از ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ مینوری به شکل $\det A[\alpha|۱,\dots,k]$ $(\det A[۱,\dots,k|\alpha])$ می‌باشد که در آن $\alpha \in Q_{k,n}$ با $d(\alpha) = ۰$ و $۱ \le k \le n$.

مثال ۲۸.۱.۱ فرض می‌کنیم

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۵ & ٦ & ۱ \\ ۷ & ۳ & ۴ & ۲ & ۲ \\ ۵ & ۹ & ۸ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۹ & ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ٦ & ۷ & ۸ \end{pmatrix},$$

$\alpha = (۲,۳)$ و $\beta = (۳,۴,۵)$. در این صورت مینورهای ستون-اول $\det A[\alpha|۱,۲]$ و سطر-اول $\det A[۱,۲,۳|\beta]$ به ترتیب برابر با

$$\det A[\alpha|۱,۲] = \det A[۲,۳|۱,۲] = \det \begin{pmatrix} ۷ & ۳ \\ ۵ & ۹ \end{pmatrix} = ۴۸,$$

$$\det A[۱,۲,۳|\beta] = \det A[۱,۲,۳|۳,۴,۵] = \begin{pmatrix} ۵ & ٦ & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۲ \\ ۸ & ۳ & ۴ \end{pmatrix} = ٦,$$

می‌باشند.

---

[۴] leading principal minor
[۵] column-initial minor
[٦] row-initial minor

تعریف ۲۹.۱.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریسی پایین مثلثی (متناظراً بالا مثلثی) باشد. مینورهای $\det A[\alpha|\beta]$ با $\alpha_k \geq \beta_k$ (متناظراً $\alpha_k \leq \beta_k$)، برای هر k، مینورهای غیر بدیهی[۷] A نامیده می‌شوند؛ زیرا همه‌ی مینورهای باقی مانده به وضوح برابر با صفر هستند.

مثال ۳۰.۱.۱ با فرض

$$A = \begin{pmatrix} ۵ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۷ & ۰ & ۰ \\ -۴ & ۳ & ۲ & ۰ \\ -۸ & ٦ & ۱ & ۴ \end{pmatrix},$$

$\alpha = (۲, ۳, ۴)$ و$\beta = (۱, ۲, ۳)$، $\det A[\alpha|\beta]$ یک مینور غیر بدیهی از A به صورت

$$\det A[\alpha|\beta] = \det \begin{pmatrix} ۱ & ۷ & ۰ \\ -۴ & ۳ & ۲ \\ -۸ & ٦ & ۱ \end{pmatrix} = -۹۳$$

می‌باشد.

تبصره ۳۱.۱.۱ در حالت کلی مینورهای غیر بدیهی یک ماتریس مثلثی مانند A ممکن است صفر یا غیر صفر باشند. به عنوان نمونه در مثال ۳۰.۱.۱،

$$\det A[۳, ۴|۱, ۲] = \det \begin{pmatrix} -۴ & ۳ \\ -۸ & ٦ \end{pmatrix}$$

یک مینور غیر بدیهی A با مقدار صفر می‌باشد. اما می‌دانیم که اگر در ماتریس پایین (متناظراً بالا) مثلثی شرط $\alpha_k \geq \beta_k$ (متناظراً $\alpha_k \leq \beta_k$) برای هر k برقرار نباشد آن گاه به وضوح مینور $\det A[\alpha|\beta]$ برابر با صفر خواهد شد. همچنین اگر A قطری باشد آن گاه مینورهای غیر بدیهی آن به صورت $\det A[\alpha]$ می‌باشند.

[۷] nontrivial minors

در زیر به اتحّاد دترمینانی[۸] مهمی اشاره می‌کنیم که در اثبات نتایج بعدی، بسیار کاربرد دارد [۱].

فرمول کوشی- باینت[۹]: اگر A و B ماتریس‌هایی متعلق به $\mathbb{R}^{n\times n}$ باشند آن گاه

$$\det(AB)[\alpha|\beta] = \sum_{\omega\in Q_{k,n}} \det A[\alpha|\omega]\det B[\omega|\beta], \quad \alpha,\beta \in Q_{k,n}.$$

مثال ۳۲.۱.۱ فرض می‌کنیم

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ٦ & -۱ \\ ۴ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} ۴ & ۰ & ۹ \\ ۳ & ۵ & ۷ \\ ۱ & ۸ & ۰ \end{pmatrix},$$

$\alpha = (۱,۳)$ و $\beta = (۲,۳)$. داریم

$$\det(AB)[۱,۳|۲,۳] = \sum_{\omega\in Q_{۲,۳}} \det A[۱,۳|\omega]\det B[\omega|۲,۳] =$$

$$\det A[۱,۳|۱,۲]\det B[۱,۲|۲,۳] \ + \ \det A[۱,۳|۱,۳]\det B[۱,۳|۲,۳]$$

$$+ \ \det A[۱,۳|۲,۳]\det B[۲,۳|۲,۳] = -۲۷۰ - ۳٦۰ - ۱۰۰۸ = -۱٦۳۸$$

۲.۱ ماتریس‌های جمعاً مثبت و اکیداً علامت منظم

در این بخش رده‌های جدیدی از ماتریس‌ها را معرفی و بعضی از ویژگی‌های این ماتریس‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ جمعاً مثبت[۱۰] (TP) است هر گاه همه‌ی مینورهای آن مثبت باشند.

---
[۸] determinantal identity
[۹] Cauchy-Binet formula
[۱۰] totally positive