بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان‌نامه جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار ریاضی گرایش محض

عنوان پایان نامه

بررسی فرایند استهلاک در تحلیل بقا تحت مخاطره های رقابتی

استادان راهنما:

دکتر سید رضا هاشمی

دکتر داوود قزوینی نژاد

نگارش:

فرزانه رضیئی

اردیبهشت ماه ۱۳۹۰

کلیه ی حقوق اعم از چاپ و تکثیر، نسخه برداری، ترجمه، اقتباس و ... از

این پایان نامه برای دانشگاه رازی محفوظ است. نقل مطالب با ذکر

مأخذ بلا مانع است.

تقدیم به:

خانواده عزیزم

که الفبای زندگی را به من آموختند

و

اساتید فرزانه ام

که از دریای علم و معرفت خود جرعه ای به من نوشاندند.

سپاس اول خدای را بایسته است که در سایه ی الطاف بی پایان خود، مرا در این جایگاه سپاس قرار داد تا بتوانم مراتب قدردانی ام را به پیشگاه اساتید گرانقدر و شایسته ام، آقایان دکتر سید رضا هاشمی و دکتر داوود قزوینی نژاد که شخصیت علمی و اخلاقی ایشان همواره برایم الگو بوده است، تقدیم کنم.

از اساتید محترم، خانم دکتر فیروزه حقیقی و آقای دکتر عبدالرضا سیاره سپاسگزارم که بزرگوارانه زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند و با دقت عالمانه ی خود نکات ظریفی را در زیبا شدن این پایان نامه بیان داشتند.

سپاس از خانواده ی عزیزم (پدر، مادر، خواهر و برادرم)که در سایه روشن زندگی ام همواره از خورشید محبت و درک آنها بهره مند بوده ام.

همچنین از همه ی دوستان، بخصوص خانم زهرا قاسمی که در انجام این کار مرا یاری کردند سپاسگزارم.

فرزانه رضیئی

اردیبهشت ۱۳۹۰

چکیده

در مطالعات مربوط به تحلیل بقا در بسیاری از زمینه ها مانند مهندسی و پزشکی، مؤلفه های تحت بررسی قبل از این‌که به شکست برسند، در طول زمان دچار استهلاک می‌شوند. به دلیل این‌که استهلاک یک مکانیسم تصادفی وابسته به زمان است، معمولاً توسط یک فرایند تصادفی که دارای روندی صعودی نسبت به زمان است مدل بندی می‌شود. در چنین مواردی فرایند استهلاک می‌تواند به صورت مستقیم و یا غیر مستقیم بر روی مکانیسم شکست اثر بگذارد. بنابراین در مطالعات مربوط به تحلیل بقا، در مورد مؤلفه هایی که در طول زمان دچار استهلاک می شوند، اگر علاوه بر داده های مربوط به زمان های شکست، داده های مربوط به مشاهده‌ی فرایند استهلاک در زمان های گسسته نیز در دسترس باشند، این داده ها می توانند اطلاعات ارزشمندی را در زمینه ی تحلیل بقا و قابلیت اعتماد، در اختیار قرار دهند و راه دومی را علاوه بر تحلیل بقای کلاسیک که تنها بر اساس داده های مربوط به زمان های شکست است، از طریق مدل بندی استهلاک و تأثیر آن بر مکانیسم شکست، تحت مدل های استهلاک- آستانه و استهلاک- شوک، ارایه کنند.

در این پایان نامه به معرفی تابع بقا و تابع درستنمایی در مدل های مذکور پرداخته شده است و به طور خاص مدلی تحت عنوان مدل استهلاک- آستانه- شوک معرفی و بررسی شده است که در آن استهلاک و ضربه به عنوان دو عامل شکست رقابتی در شکست مؤلفه هایی که در طول زمان دچار استهلاک می‌شوند نقش دارند. در مدل استهلاک-آستانه-شوک، شکست می تواند از نوع شکست ضربه ای یا از نوع شکست غیرضربه‌ای باشد. همچنین در این پایان نامه با در نظر گرفتن دو مدل فرایند واینر با انباشتگی مثبت و مدل مسیر استهلاک عمومی، به عنوان دو مدل خاص برای فرایند استهلاک، مدل‌های مذکور مورد بررسی قرار گرفته اند.

واژه های کلیدی: فرایند استهلاک، مخاطره های رقابتی، فرایند واینر، شکست ضربه‌ای، شکست غیرضربه‌ای.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول : تعاریف و مفاهیم اولیه ۱

۱-۱- مقدمه ۲

۱-۲- اهمیت فرایند استهلاک در تحلیل بقا ۲

۱-۳- معرفی مدل مناسب برای استهلاک ۶

۱-۳-۱- مدل فرایند واینر با انباشتگی مثبت ۷

۱-۳-۲- مدل مسیر استهلاک عمومی ۷

۱-۴- مدل بندی توأم داده های استهلاک و زمان های شکست ۹

۱-۴-۱- مدل استهلاک- آستانه (DT) ۹

۱-۴-۲- مدل استهلاک شوک (DS) ۱۰

۱-۵- مدل استهلاک- آستانه- شوک (DTS) ۱۳

۱-۵-۱- مخاطره های رقابتی ۱۳

۱-۵-۲- تعریف نمادها و مکانیسم شکست در مدل DTS ۱۵

فصل دوم : تابع بقا و تابع درستنمایی در مدل DTS و زیرکلاس های آن ۱۷

۲-۱- مقدمه ۱۸

۲-۲- بررسی تابع بقا در مدل DTS و زیر کلاس های آن ۱۸

۲-۲-۱- تابع بقا در مدل DTS ۱۸

۲-۲-۲- تابع بقا در مدل DT ۲۴

۲-۲-۳- تابع بقا در مدل DS ۲۴

۲-۳- تابع درستنمایی در مدل DTS ۲۵
۲-۳-۱- محاسبه ی احتمال بقا در مدل DTS در حضور مشاهدات فرایند استهلاک ۲۵
۲-۳-۲- تابع درستنمایی ۳۰
۲-۴- مدل DTS در حضور m عامل شکست ضربه ای رقابتی ۴۱
فصل سوم : فرایند واینر با انباشتگی مثبت به عنوان مدلی برای استهلاک ۴۶
۳-۱- مقدمه ۴۷
۳-۲- فرایند واینر ۴۷
۳-۲-۱- برخی خواص مهم فرایند واینر ۴۷
۳-۲-۲- اولین زمان عبور فرایند واینر ۴۹
۳-۲-۳- فرایند واینر با انباشتگی مثبت ۵۱
۳-۳- مدل DT بر اساس فرایند واینر با انباشتگی مثبت ۵۳
۳-۳-۱- بررسی مدل DT بر اساس مشاهدات فرایند استهلاک ۵۴
۳-۳-۲- بررسی مدل DT بر اساس مشاهدات زمان های شکست ۵۹
۳-۳-۳- بررسی مدل DT بر اساس مشاهدات فرایند استهلاک و زمان های شکست ۶۰
۳-۴- مدل DS بر اساس مدل فرایند واینر با انباشتگی مثبت ۶۶
۳-۵- مدل DTS بر اساس مدل فرایند واینر با انباشتگی مثبت ۶۷
۳-۶ - بررسی حالتی خاص در مدل DT بر اساس فرایند واینر با انباشتگی مثبت ۷۳
فصل چهارم : مدل مسیر استهلاک عمومی به عنوان مدلی برایاستهلاک ۷۹
۴-۱- مقدمه ۸۰
۴-۲- معرفی مدل مسیر استهلاک عمومی ۸۰

۴-۳- برآورد تابع بقا در مدل DT ۸۲
۴-۴- برآورد تابع بقا در مدل DTS ۸۴
۴-۵- واژه نامه فارسی به انگلیسی ۸۸
۴-۶- منابع و مآخذ ۸۹

لیست اشکال

شکل (۳-۲-۱) ۴۹

شکل (۳-۳-۲) ۵۴

شکل (۳-۳-۳) ۵۶

شکل (۴-۲-۱) ۸۱

نمادها و علائم اختصاری

فرایند استهلاک X

آستانه ی مربوط به شکست غیرضربه ای ..... X^*

مسیر فرایند تصادفی X از زمان صفر تا زمان t ..... X_0^t

زمان شکست غیر ضربه ای در مدل DTS ..... D

زمان شکست ضربه ای در مدل DTS C

تابع احتمال ..... $P(.)$

امید ریاضی ..... E

تابع نشانگر مربوط به مجموعه ی A ..... $I_{\{A\}}$

به شرط آن که ..... $|$

به طور مستقل و مشابه توزیع شده ..... iid

بی نهایت ..... ∞

توزیع شدن ..... $\sim$

عملگر متناسب بودن ..... $\propto$

عملگر مشتق ..... ∂

صور عمومی ..... $\forall$

عضویت مجموعه ای ..... $\in$

عملگر تقریب ..... $\approx$

عملگر مجموعه ای اینفیمم ..... inf

عملگر مجموعه ای ماکسیمم ..... max

عملگر مجموعه ای مینیمم ..... min

عملگر تابع $log_e^{(.)}$ ..... ln

مجموعه ی اعداد حقیقی ..... R

مجموعه ی اعداد حقیقی n بعدی ..... R^n

سیگما میدان بورل ..... **B**

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

فصل ۲

تابع بقا و تابع درستنمايي در مدل **DTS**

و زير كلاس هاي آن

فصل ۳

فرايند واينر با انباشتگي مثبت به عنوان مدلي

براي استهلاك

فصل ۴

مدل مسیر استهلاک عمومی به عنوان مدلی

برای استهلاک

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱ – ۱ مقدمه

در این فصل ابتدا اهمیت فرایند استهلاک در تحلیل بقا شرح داده می‌شود. سپس به معرفی مدل‌هایی پرداخته می‌شود که در آنها با استفاده از اطلاعات موجود در مشاهدات مربوط به فرایند استهلاک، راه دومی علاوه بر تحلیل بقا بر اساس داده های مربوط به زمان‌های شکست، ارائه می‌شود تادر مواقعی که مشاهدات شامل مقادیر سانسور شده هستند، اطلاعات سانسور شده جبران شوند و تحلیل بقا به صورت دقیق تری صورت گیرد.

۱ – ۲ اهمیت فرایند استهلاک در تحلیل بقا

تحلیل بقا مجموعه‌ای شامل تکنیک های آماری متنوع برای تجزیه و تحلیل متغیرهای تصادفی است که دارای مقادیر مثبت هستند. یکی از برجسته ترین مشخصات این متغیرهای تصادفی، زمان از کار افتادگی یک پدیده‌ی فیزیکی (مکانیکی یا الکتریکی) و یا زمان مرگ یک واحد بیولوژیک (انسان، حیوان و یا سلول زنده) است.

مطالعات اولیه در زمینه‌ی تجزیه و تحلیل بقا به کارهای ابتدایی روی جداول مرگ و میر که توسط جان‌گرانت [۱] (۱۶۶۲) و همچنین ستاره شناس معروف ادموند هالی [۲] (۱۶۹۳) انجام گرفته، نسبت داده می‌شود و دوره‌ی جدید آن حدوداً از پنجاه سال پیش با کاربرد در مهندسی و صنعت آغاز شده است.

در بسیاری از تحقیقات پزشکی، مطالعات صنعتی و مهندسی، نتیجه‌ی مورد علاقه، زمان وقوع یک پیشامد خاص است. برای مثال در بیماری سرطان پیشامد مورد نظر معمولاً مرگ و یا بازگشت مجدد بیماری است و در مطالعات صنعتی پیشامد مورد نظر می تواند از کار افتادگی سیستم ها باشد. این زمان که یک متغیر تصادفی مثبت است معمولاً با T نشان داده می‌شود. در متون علمی داده‌های مربوط به مشاهدات این گونه متغیرهای تصادفی به نام های زیر معروف اند:

۱) داده های طول عمر

۲) داده های زمان شکست

۳) داده های بقا

۴) داده های زمان پیشامد

---

۱ John Grant

۲ Edmond Hally

صرف نظر از این‌که کدام اصطلاح در مورد این داده‌ها به کار می رود ملاحظات زیر در تحلیل این داده‌ها ضروری به نظر می رسد:

- عوامل شکست و فرسایش که منجر به شکست مؤلفه می‌شود
- تأثیر عوامل مؤثر محیطی بر شکست مؤلفه
- تعیین زمان مبدأ و زمان شکست مؤلفه

یکی از مفاهیم مهم در تحلیل بقا، تابع بقا است که از آن با عنوان تابع قابلیت اعتماد نیز یاد می‌شود. قابلیت اعتماد، احتمال این است که مؤلفه‌ای بتواند در یک بازه‌ی زمانی معین و تحت شرایط مشخص بدون شکست کار کند. اگر T دارای تابع چگالی f باشد، تابع بقا یا تابع قابلیت اعتماد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(s)ds$$

به موازات مطالعه بر روی $S(t)$ معمولاً یکی دیگر از مفاهیم مهم در تحلیل بقا، نرخ شکست است که متناسب با احتمال شکست یک مؤلفه در بازه‌ی زمانی $(t, t+\Delta t]$ است، با فرض این که مؤلفه تا زمان t هنوز به شکست نرسیده است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(T > t) - P(T > t + \Delta t)}{P(T > t)\Delta t} \\ &= \frac{-\partial \ln S(t)}{\partial t} \end{aligned}$$

تخمین $S(t)$ و $h(t)$ یکی از اهداف مهم در تحلیل بقا است.

تحلیل بقا معمولاً، تنها بر اساس داده‌های زمان شکست است، اما اغلب اوقات در عمل جمع آوری داده‌های زمان شکست، زمان بر و پر هزینه است. زیرا ممکن است مؤلفه‌های تحت مطالعه اغلب زمان‌های شکست طولانی داشته باشند و تعدادی از مؤلفه‌های تحت بررسی در طول دوره‌ی زمانی آزمایش به شکست نرسند. در چنین حالتی گفته می‌شود که سانسور راست نوع یک اتفاق افتاده و زمان شکست این مؤلفه‌ها به عنوان مقادیر سانسور شده در نظر گرفته می‌شوند. همچنین ممکن است مؤلفه‌های تحت بررسی گران قیمت باشند و محقق از نظر تعداد آزمایش هایی که می‌تواند انجام دهد محدودیت داشته باشد و آزمایش تا مشاهده ی شکست همه ی مؤلفه‌ها ادامه نیابد. در این حالت گفته

می‌شود که سانسور راست نوع دو اتفاق افتاده است. تحلیل بقا بر اساس داده‌های مربوط به زمان های شکست مؤلفه‌ها که شامل مقادیر سانسور شده نیز باشند، در بسیاری از متون علمی مورد بررسی قرار گرفته است. در این زمینه برای دسترسی به اطلاعات بیشتر می توان به کلاین [۳] (۲۰۰۸) مراجعه کرد. در چنین مواردی که مشاهده ی زمان شکست همه ی مؤلفه‌ها به دلیل سانسور امکان پذیر نیست، در موارد خاصی می توان راه کاری را ارائه داد تا اطلاعات سانسور شده جبران پذیر باشند و تحلیل بقا به صورت دقیق تری صورت گیرد. در ادامه به معرفی چنین مواردی پرداخته می‌شود.

در مطالعات مربوط به بقا در بسیاری از زمینه‌ها مانند مهندسی و پزشکی، مؤلفه‌های تحت بررسی قبل از این که به شکست برسند از نظر فیزیکی تنزل پیدا می کنند. یا به عبارت دیگر دچار استهلاک [۴] می‌شوند و استهلاک آنها در اغلب موارد تا قبل از زمان شکست، در زمان های گسسته‌ای قابل مشاهده و اندازه گیری است.

در زمینه‌ی مهندسی، تجهیزاتی که در طول زمان در معرض فرسایش قرار دارند و در زمینه‌ی آمارحیاتی سیستم ایمنی بیماران مبتلا به ویروس HIV، نمونه ای از مؤلفه‌هایی هستند که در طول زمان دچار استهلاک می‌شوند.

به طور کلی در زمینه ی مهندسی، استهلاک عبارت است از خسارت یا زیانی که در طول حیات مؤلفه به صورت غیر قابل بازگشتی انباشته می‌شود و سر انجام موجب شکست می‌شود و یا بر روی نرخ شکست اثر می گذارد و ممکن است شامل خوردگی، فرسودگی مواد و یا کهنگی در اثر استعمال باشد. در چنین مواردی یا استهلاک مؤلفه‌ها به صورت مستقیم قابل مشاهده و اندازه گیری است. مانند ساییدگی تایر اتومبیل (الیوریا[۵] و کلسیمو [۶] (۲۰۰۴)) و شکاف های فرسودگی مواد آلیاژآلومینیم (میکر[۷] و اسکوبار [۸] (۱۹۹۸))، یا این که به صورت مستقیم قابل اندازه گیری نیست. در این حالت استهلاک توسط یک فرایند جانشین که در ارتباط با فرایند استهلاک است مشخصه سازی و اندازه گیری می‌شود. در آمار حیاتی نیز معمولاً استهلاک به صورت مستقیم قابل مشاهده نمی باشد و توسط نشانگر هایی [۹] که وضعیت سلامت و یا کیفیت حیات را تعیین می کنند، مشخصه سازی و اندازه گیری می‌شود. به عنوان مثال نقص سیستم ایمنی بدن بیماران مبتلا به ویروس HIV توسط میزان سلول های $CD۴$ موجود در خون این بیماران، به عنوان نشانگر وضعیت سلامتی اندازه گیری می‌شود.

---

۳ Klein

۴ Degradation

۵ Oliveria

۶ Colosimo

۷ Meeker

۸ Escobar

۹ markers