دانشگاه خوارزمی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

جبرهای ابرتاوبری و میانگین پذیری ضعیف جبرهای فیگا-تالامانکا-هرز

تدوین

سمیه اسمعیلی جهرمی

استاد راهنما

دکتر جواد لآلی

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحيم

پروردگارا

به پیشگاه پاک و مقدست تقدیم می داریم

که بندگی فقط تو را سزد

آنچه داده ای بیش از شایستگی ماست

گرچه در خور بخشندگی توست

این اثر را به **پدر و مادر عزیزم** که همواره مشوق و یار و یاور من در تمام مراحل زندگی هستند تقدیم می دارم.

تقدیر و تشکر

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

سپاس و ستایش به درگاه پروردگار متعال که همه ی موفقیت هایم را مرهون الطاف بیکرانش هستم.

اکنون که با توفیق و عنایت الهی مراحل تدوین این پژوهش را به پایان رسانده ام، وظیفه ی خود می دانم که مراتب سپاس و قدردانی خود را تقدیم بزرگوارانی بنمایم که من را در انجام این پروژه یاری رسانده اند.

در ابتدا از والدین گرانقدرم، بخصوص **مادر عزیز و فداکارم** که در طول تمام دوران تحصیل همواره حامی و مشوقم بوده، از صمیم قلب تشکر و قدردانی می نمایم و از خدای مهربان برایشان آرزوی سلامتی و عمر با عزت و خیر دنیا و آخرت خواستارم.

به ویژه از حمایت ها و زحمات بی دریغ استاد فرهیخته و عالیقدرم **جناب آقای دکتر جواد لآلی** که مسئولیت راهنمایی این پایان نامه را متقبل شدند و خالصانه و دلسوزانه من را در تدوین این پروژه یاری فرمودند، کمال تشکر و امتنان را دارم.

همچنین از اساتید گرامی و ارجمندم **جناب آقای پروفسور علیرضا مدقالچی** و **جناب آقای پروفسور عبدالرسول پورعباس** که بازنگری و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند و از نظرات و پیشنهادات ایشان بهره مند شدم، نهایت سپاس و تشکر را دارم.

بر خود می بالم که اساتیدی چون شما را دارم. هیچ چیز با ارزش تر از استادان نیک سرشتی چون شما عزیزان نیست واز خداوند منان برای همه ی اساتید بزرگوارم سلامتی و توفیقات روزافزون مسئلت می نمایم.

سمیه اسمعیلی جهرمی

تهران–شهریور ۱۳۹۱

چکیده

ایده‌ی این پایان‌نامه انگیزه‌ی ابتدایی برای مطالعه‌ی اشتقاق‌های موضعی از جبرهای باناخ بوده است. مطالعه‌ی برخی از جبرهای باناخ نیم‌ساده‌ی منظم جابه‌جایی را ادامه می‌دهیم. در این جا این نوع جبرها را جبرهای ابرتاوبری می‌نامیم. ابتدا نشان می‌دهیم که رده‌ی جبرهای ابرتاوبری به صورت زیررده‌ی سره‌ای از جبرهای تاوبری ضعیفاً میانگین‌پذیر هستند. سپس، ویژگی‌های موروثی و بنیادی آن‌ها را برحسب ایده‌آل‌ها، ضرب‌های تانسوری و هم‌ریختی‌های جبری آن‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم. به علاوه، رابطه‌ای نزدیک بین جبرهای ابرتاوبری و مجموعه‌ی ترکیب‌ها(موضعی) وجود دارد. همچنین، اشتقاق‌های تقریباً موضعی کراندار از جبرهای ابرتاوبری اشتقاق هستند. به ویژه، این مستلزم این است که فضای خطی از اشتقاق‌های کراندار از جبرهای ابرتاوبری، بازتابی است. ما همچنین، برخی نتایج را، در باره‌ی بازتاب پذیری جبری فضای خطی از اشتقاق‌ها ازیک جبر ابرتاوبری، بیان می‌کنیم.

فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد و همچنین فرض کنیم به ازای $p \in (۱, \infty)$، $A_p(G)$ جبر فیگاـتالامانکاـهرز از G باشد. نشان داده شده است که اگر مؤلفه‌ی اصلی G آبلی باشد، آن گاه جبر فوریه‌ی $A(G) := A_۲(G)$ ضعیفاً میانگین‌پذیر است. ما این نتیجه را با نشان دادن این که برای این نوع ازگروه‌ها، $A_p(G)$ ابرتاوبری است، توسعه می‌دهیم. به ویژه، $A_p(G)$ ضعیفاً میانگین‌پذیر است. در پایان، نتیجه می‌شود که برای هر گروه موضعاً فشرده‌ی G، $A_p(G)$ جبر ابرتاوبری کوانتیده است. این مستلزم این است که $A_p(G)$ ضعیفاً میانگین‌پذیر عملگری باشد. همچنین، نشان داده می‌شود که اشتقاق‌های تقریباً موضعی کاملاًکراندار از $A_p(G)$، اشتقاق هستند.

واژه‌های کلیدی: جبر تاوبری، عملگر موضعی، اشتقاق تقریباً موضعی، گروه موضعاً فشرده، جبر فوریه، جبرفیگاـتالامانکاـهرز، فضای عملگری، میانگین‌پذیری ضعیف.

رده‌بندی موضوعی ریاضی 2010: 43A22، 46J10، 47B38.

مقدمه

با توجه به مفاهیمی که در این پایان نامه ارائه می‌شود، ابتدا می‌بایستی مفهوم اشتقاق‌های موضعی از جبرهای باناخ نیم‌ساده‌ی منظم جابه‌جایی مورد مطالعه قرارگیرد. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. یک عملگر D از A به توی Aـ دو مدول باناخ X رایک اشتقاق موضعی می‌نامند، در صورتی که اشتقاقی، مانند D_a، از A به توی Aـدومدول باناخ X موجود باشد به طوری که $D(a) = D_a(a)$.

این مفهوم، در سال ۱۹۹۰ توسط «کادیسون[1]» در مقاله‌ای در [18] معرفی شد و با بررسی قبلی که به وسیله‌ی او و «رینگروس[2]» از «همانستگی هاخ شیلد[3]» جبرهای عملگری مختلف انجام گرفت، انگیزه‌ای برای بررسی آن ایجاد گردید. همچنین، این نگاشت‌ها از مطالعه‌ی بازتاب‌پذیری جبری فضای خطی از اشتقاق‌ها نتیجه می‌شود [20]. کادیسون نشان داد که اگر A یک جبر فون‌ـنویمان و X یک Aـدومدول باناخ دوگان باشد، آن گاه اشتقاق‌های موضعی کراندار از A به توی X یک اشتقاق هستند. در سال ۲۰۰۰، «جانسون[4]» این نتایج را توسعه داد و ثابت کرد که اگر A یک C^* ـجبر باشد آن گاه اشتقاق‌های موضعی از A به توی هر Aـدومدول باناخ اشتقاق هستند [17]. در ضمن، جانسون نشان داد که کافی است این نتیجه را برای جبر باناخ نیم ساده‌ی منظم جابه‌جایی $C_\circ(\mathbb{R})$ برقرارکنیم. در مورد $C_\circ(\mathbb{R})$، او نتیجه‌اش را با مطالعه‌ی «عملگرهای موضعی» از این جبر و با به کار بردن برخی ویژگی‌های موروثی از $C_\circ(\mathbb{R})$، به دست آورد.

در مقاله‌ی [27] ثابت شده است که بخش اساسی رهیافت جانسون، این حقیقت است که «عملگرهای موضعی کراندار از $C_\circ(\mathbb{R})$ به توی $C_\circ(\mathbb{R})^*$ ضربگر هستند». این موضوع برای توسعه‌ی نتیجه‌ی او به رده‌ای دیگر از جبرهای باناخ نیم‌ساده‌ی منظم جابه‌جایی که دارای ویژگی بالا هستند، به کاربرده شده است (برای مشاهده‌ی نتایج بیشتر در مورد اشتقاق‌های موضعی به مقاله‌های [12, 28] و منابع آن‌ها مراجعه کنید). در این پایان نامه، مطالعه‌ی این نوع از جبرهای باناخ جابه‌جایی ادامه می‌یابد که آن‌ها را جبرهای ابرتاوبری می‌نامند.

اینک، فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد و به ازای $p \in (۱, \infty)$، $A_p(G)$ جبر فیگاـتالامانکاـهرز

1) Kadison 2) Ringrose 3) Hochschild cohomology 4) Johnson

باشد. «فارست[1]» و «رُنده[2]» در مقاله‌ی [9] نشان دادند که جبر فوریه‌ی $A(G) := A_۲(G)$ ضعیفاً میانگین‌پذیر است در صورتی که مؤلفه‌ی اصلی G (یعنی، بزرگ‌ترین مجموعه‌ی همبند در G که شامل عضو همانی است) آبلی باشد.

نتایج آن‌ها با نشان دادن اینکه برای این نوع از گروه‌ها، $A_p(G)$ ابرتاوبری است (قضیه‌ی ۵.۱.۳)، توسعه می‌یابد و به عنوان یک نتیجه، ثابت می‌شود که $A_p(G)$ ضعیفاً میانگین‌پذیر است. چون $A(G)$ پیش دوگان جبر فون نویمان $VN(G)$ است، پس دارای یک ساختار فضای عملگری طبیعی است که آن را به یک جبر باناخ «کوانتیده» تبدیل می‌کند [5]. در مقاله‌ی [24]، «روآن[3]» نشان داد که یک گروه موضعاً فشرده‌ی G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $A(G)$ میانگین‌پذیر عملگری باشد. در مقاله‌ی [19]، «لامبرت[4]»، «نیوفانگ[5]» و رُنده، یک ساختار فضای عملگری را روی $A_p(G)$ معرفی کردند که $A_p(G)$را به یک جبر باناخ کوانتیده تبدیل می‌کند. به عنوان یک کاربرد، آن‌ها نتیجه‌ی روآن را توسیع دادند و نشان دادند که G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر و یا به طور هم‌ارز به ازای یک $p \in (۱, \infty)$، $A_p(G)$ میانگین‌پذیر است. در مرجع مذکور فوق این سؤال مطرح شد که آیا ویژگی‌های همانستگی کوانتیده‌ی دیگری از $A(G)$ می‌تواند به $A_p(G)$ توسیع یابد. یکی از این نتیجه‌ها، که توسط «اسپرونک[6]» به دست آمده است، بیان می‌کند که $A(G)$ همواره ضعیفاً میانگین‌پذیر عملگری است؛ مقاله‌های [30] و همچنین [27] را ببینید.

این پایان نامه شامل سه فصل می‌باشد.

فصل اول؛ به تعریف مباحثی چون جبرهای باناخ، جبرهای تابعی باناخ و منظم، مدول‌ها و اشتقاق‌ها، ضرب‌های تانسوری، جبرفوریه $A(G)$ و $A_p(G)$ پرداخته می‌شود. تعاریف و قضایای مطرح شده در این فصل، پیش‌نیاز فصل‌های بعدی می‌باشد.

در فصل دوم؛ جبرهای ابرتاوبری و برخی از خواص آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در بخش اول از این فصل، مفاهیمی چون عملگرهای موضعی، عملگرهای ضربگر و Aـمدول‌های باناخ اساسی تعریف می‌شود. با توجه به این مطالب، نشان داده می‌شود که اگر عملگرهای موضعی کراندار از جبر باناخ A به

1) Forrset 2) Runde 3) Ruan 4) Lambert 5) Neufang 6) Spronk

توی A^* ضربگر باشند آن گاه می‌توان عملگرهای موضعی کراندار از مدول‌های اساسی A به توی دوگان آن‌ها را توصیف کرد.

همچنین، در بخش‌های دوم و سوم، ابتدا نشان داده می‌شود که جبرهای ابرتاوبری به صورت زیر رده‌ای از جبرهای تاوبری ضعیفاً میانگین‌پذیرند. سپس، ویژگی‌های موروثی و بنیادی آن‌ها بر حسب ایده‌آل‌ها، ضرب‌های تانسوری و هم‌ریختی‌های جبری آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در ادامه، ثابت می‌شود که رابطه‌ای بین جبرهای ابرتاوبری و مجموعه‌ی ترکیب‌ها (موضعی) وجود دارد (قضیه‌های ۳.۲.۲، ۱.۳.۲ و نتیجه ۲.۳.۲).

در بخش پایانی از فصل دوم، بازتاب‌پذیری جبری(به ترتیب، بازتاب پذیری) فضای خطی از اشتقاق‌ها(به ترتیب، اشتقاق‌های کراندار) از یک جبر ابرتاوبری مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در ضمن، با استفاده از مفهوم اشتقاق‌های تقریباً موضعی که در مقاله‌ی [28] معرفی شده است، ثابت می‌شود که اشتقاق‌های تقریباً موضعی کراندار از جبرهای ابرتاوبری، اشتقاق هستند. به ویژه، این شرایط ایجاب می‌کند که فضای خطی از اشتقاق‌های کراندار، از یک جبر ابرتاوبری، بازتابی است. این موضوع، که به عنوان نتیجه‌ی اصلی مقاله‌ی [27] است، توسیع می‌یابد. همچنین، برخی نتایج درباره‌ی بازتاب‌پذیری جبری فضای خطی از اشتقاق‌ها از یک جبر ابرتاوبری بیان می‌گردد.

در فصل سوم، ابتدا ساختار مؤلفه‌ی اصلی G مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس نشان داده می‌شود که $A(G)$ ابرتاوبری است در صورتی که مؤلفه‌ی اصلی G آبلی باشد. همچنین، ثابت می‌شود که برای این نوع از گروه‌ها، $A_p(G)$ نیز ابرتاوبری است.

در بخش پایانی از فصل سوم، نشان داده می‌شود که جواب این سؤال: آیا ویژگی‌های همانستگی کوانتیده‌ی دیگری از $A(G)$ به $A_p(G)$ می‌تواند توسیع یابد؟ مثبت است. برای انجام چنین منظوری، ابتدا جبرهای ابرتاوبری کوانتیده در نظر گرفته می‌شود و نتایج کوانتیده‌ای را که برای جبرهای ابرتاوبری به دست آمده است، نتیجه می‌شود. سپس نشان داده می‌شود که به ازای هر گروه موضعاً فشرده‌ی G، $A_p(G)$ یک جبر ابرتاوبری کوانتیده است. به ویژه، با این شرایط، موجب می‌شود که $A_p(G)$ ضعیفاً میانگین‌پذیر عملگری باشد. همچنین، به عنوان آخرین مطلب ثابت می‌شود که اشتقاق‌های تقریباً موضعی کاملاً کراندار از $A_p(G)$ اشتقاق هستند.

در تدوین این پایان‌نامه از مقاله‌های زیر استفاده شده است که مقاله‌ی شماره‌ی ۱، مقاله‌ی اصلی و مقاله‌های شماره‌های ۲ و ۳ مقاله‌های فرعی‌اند. این مقاله‌ها به ترتیب، با شماره‌های [26]، [27] و [28] در مراجع ذکر شده است.

1. Ebrahim Samei, Hyper-Tauberian algebras and weak amenability of Figa-Talamanca-Herz algebras, Journal of Functional Analysis, 231 (2006) 195-220.

2. Ebrahim Samei, Bounded and completely bounded local derivations from certain commutative semisimple Banach algebras, Proseedings of the American Mathematical Society, 133 (2005) 229-238.

3. Ebrahim Samei, Approximately local derivations, J. London Mathematical Socity, 71(2) (2005) 759-778.

فهرست مطالب

ل

ل

فصل اول

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل به معرفی تعاریف و قضایای مقدماتی که در سرتاسر این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد، می‌پردازیم.

۱.۱ آنالیز تابعی

۱.۱.۱ فضاهای باناخ. فضای برداری مختلط X را یک **فضای خطی نرم‌دار** نامیم در صورتی که به هر $x \in X$، یک عدد حقیقی نامنفی، مانند $\|x\|$، به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که

۱) به ازای هر x و y در X، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

۲) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$؛

۳) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq ۰$ و $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$.

روی فضای برداری نرم‌دار X با ضابطه‌ی $d(x,y) = \|x-y\|$ متریکی بر حسب نرم تعریف می‌کنیم که آن را **متریک القایی به وسیله‌ی نرم** می‌نامیم.

هر فضای نرم‌دار مانند X را که نسبت به متریک القایی به وسیلهٔ نرم، فضایی کامل باشد یک **فضای باناخ** می‌نامیم. به عبارت دیگر، هر دنباله‌ی کوشی در این فضا به عضوی از این فضا همگرا باشد.

به عنوان مثال، به ازای $1 \leq p < \infty$، فرض کنیم فضای ℓ_p گردایه‌ی همه‌ی دنباله‌های حقیقی $x = (x_1, x_2, \dots)$ باشد به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. با اعمال جبری ذیل، ℓ_p یک فضای برداری است.

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) \quad \text{و} \quad \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots)$$

به ازای هر $x \in \ell_p$، نرم $\|x\|_p$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

با این نرم، ℓ_p یک فضای باناخ است [1, Example 27.3].

به ازای $p = \infty$، فضای ℓ_∞ گردایه‌ی همه‌ی دنباله‌های کراندار است که به ازای هر $x \in \ell_p$،

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

در این صورت، $(\ell_p, \|\cdot\|_\infty)$ یک فضای باناخ است. حال فرض کنیم که c گردایه‌ی همه‌ی دنباله‌های همگرا باشد و c_0 گردایه‌ی همه‌ی دنباله‌هایی باشد که حد آن صفر است. در این صورت، c و c_0 فضاهای باناخ هستند و داریم

$$\ell_1 \subseteq \ell_p \subseteq \ell_q \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq \ell_\infty$$

که در آن، $1 < p < q < \infty$ [1, Theorem 31.15].

فرض کنیم نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی (تبدیل خطی) بین دو فضای نرم‌دار باشد. نرم T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| | \|x\| = 1, x \in X\} = \sup\{\|T(x)\| | \|x\| \leq 1, x \in X\}.$$

اگر $\|T\|$ متناهی باشد، T را یک **عملگر کراندار** (و همچنین اگر $\|T\| = \infty$، T را یک **عملگر بیکران**) می‌نامیم. متناظر با فضاهای باناخ X و Y، فضاهای عملگرهای خطی و عملگرهای خطی کراندار از X به توی Y را به ترتیب، با نمادهای $L(X, Y)$ و $B(X, Y)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم $T : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی بین دو فضای نرم‌دار باشد. گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱) T عملگری کراندار است؛

۲) عددی حقیقی مانند $M \geq 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$، $\|T(x)\| \leq M\|x\|$؛

۳) T در صفر پیوسته است؛

۴) T پیوسته است [1, Theorem 28.6].

قضیه‌ی نمودار بسته[1]. [1,Theorem 28.15]فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی باشد. اگر نمودار T یک زیرفضای بسته‌ی $X \times Y$ باشد، آن گاه T عملگری کراندار است .

درحالت خاص، $B(X, \mathbb{C})$ را با X^* نمایش می‌دهیم و آن را **فضای دوگان** X گوییم. اعضای X^* را **تابعک‌های خطی کراندار** بر X می‌نامیم.

اگر Y یک فضای باناخ باشد، آن گاه $B(X, Y)$ نیز یک فضای باناخ است [1, Theorem 28.7]. چون میدان اعداد مختلط با نرم $\|x\| = |x|$ یک فضای باناخ است، پس X^* همواره یک فضای باناخ می‌باشد. به ویژه، دوگان دوم فضای X، یعنی $(X^*)^*$، نیز یک فضای باناخ است و آن را با X^{**} نشان می‌دهیم.

نگاشت $x \mapsto \hat{x}$ (از X در X^{**}) را **نشانده‌ی طبیعی** X در دوگان دوم خود، یعنی X^{**}، می‌نامیم. که در آن، به ازای هر $f \in X^*$، $\hat{x}(f) = f(x)$.

قضیه. [1, Theorem 29.6]نشانده‌ی طبیعی $x \mapsto \hat{x}$ از فضایی نرم‌دار مانند X در دوگان دوم خود، یعنی X^{**}، یک عملگر خطی حافظ نرم است (و بنابراین، می‌توان X را به عنوان یک زیرفضای X^{**} تلقی کرد).

عملگری خطی مانند $T : X \longrightarrow Y$ بین دو فضای نرم‌دار را که به ازای هر $x \in X$، در رابطه‌ی $\|T(x)\| = \|x\|$ صدق کند، یک **طولپای خطی** می‌نامیم.

با این تعریف، می‌توانیم قضیه‌ی بالا را به صورت زیر بیان کنیم:

نشانده‌ی طبیعی $x \mapsto \hat{x}$ یک طولپای خطی است؛ یعنی، $\|\hat{x}\| = \|x\|$.

اینک حالتی را در نظر می‌گیریم که نشانده‌ی طبیعی پوشا باشد. در چنین حالتی، فضای جدیدی تعریف می‌شود؛

1) The Closed Graph Theorem

یعنی، اگر نشاننده‌ی طبیعی یک فضای باناخ مانند X در دوگان دوم خود X^{**} پوشا باشد، X را یک **فضای باناخ بازتابی** می‌نامیم و این امر را با نماد $X^{**}=X$ نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال، فضای $L_p(\mu)$، به ازای $1<p<\infty$، یک فضای باناخ بازتابی است. امّا $L_1(\mu)$ بازتابی نیست. زیرا $L_1(\mu)^{**}=L_\infty(\mu)^*\neq L_1(\mu)$. همچنین، $c_\circ$ بازتابی نیست. زیرا $c_\circ^*=\ell_1$ و $c_\circ^{**}=(\ell_1)^*=\ell_\infty$ [۳۲، صفحه ۱۴۰].

فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. به ازای هر $T\in B(X,Y)$، عملگر یکتای $T^*\in B(Y^*,X^*)$ به نام الحاقی T، نظیر است که به ازای هر $x\in X$ و هر $y^*\in Y^*$، در رابطه‌ی ذیل صدق می‌کند.

$$\langle T(x),y^*\rangle=\langle x,T^*y^*\rangle.$$

به سادگی ثابت می‌شود که نرم T^* در رابطه‌ی $\|T^*\|=\|T\|$ صدق می‌کند [25, Theorem 4.10].

۲.۱.۱ انواع توپولوژی. حال می‌خواهیم توپولوژی ضعیف (wـتوپولوژی) و توپولوژی ضعیف ستاره (w^* ـتوپولوژی) را تعریف کنیم.

فرض کنیم که X یک فضای نرم‌دار و X^* فضای دوگان آن باشد. توپولوژی القا شده به وسیله‌ی X^* بر روی X را **توپولوژی ضعیف** روی X می‌نامیم (گاهی این توپولوژی را با $\sigma(X,X^*)$ نشان می‌دهیم).

همچنین، توپولوژی القا شده به وسیله‌ی $X\cong\hat{X}=\{\hat{x}|x\in X\}\subseteq X^{**}$ بر روی X^* را **توپولوژی ضعیف ستاره** می‌نامیم (گاهی این توپولوژی را با $\sigma(X^*,X)$ نشان می‌دهیم). توپولوژی ضعیف ستاره (w^*ـتوپولوژی) روی X^*، ضعیف‌ترین توپولوژی روی X^* است که تحت آن تمام تابعک‌های $\hat{x}$ پیوسته‌اند.

قضیه‌ی باناخ آل اوغلو[1]. [25, Theorem 3.15]هرگاه V یک همسایگی صفر در فضای برداری توپولوژیک X باشد و

$$K=\{\Lambda\in X^*||\Lambda(x)|\leq 1 \quad \text{به ازای هر } x\in V،\}$$

آن گاه K مجموعه‌ای w^*ـفشرده می‌باشد.

1) The Banach-Alaoglu Theorem

۳.۱.۱ جبرهای باناخ و C^*-جبرها. یک **جبر** عبارت است از یک فضای برداری مانند A روی میدان $\mathbb{K}$ با نگاشتی مانند $A \times A \longrightarrow A$، $(a,b) \mapsto ab$ که به ازای هر a و b و c متعلق به A و هر $\lambda \in \mathbb{K}$، در روابط ذیل صدق می‌کند:

۱) $a(bc) = (ab)c$؛

۲) $a(b+c) = ab + ac$ و $(a+b)c = ac + bc$؛

۳) $(\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b)$.

اگر A یک جبر و $\|\cdot\|$ یک نرم روی A باشد به طوری که به ازای هر $a, b \in A$،

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \qquad (1)$$

آن گاه، $(A, \|\cdot\|)$ را یک **جبر نرم‌دار** می‌نامیم. به طور کلی نرمی که در رابطه‌ی (۱) صدق کند، **نرم جبری** نامیده می‌شود.

اگر جبر نرم‌دار $(A, \|\cdot\|)$، به عنوان یک فضای برداری نرم‌دار تحت نرم $\|\cdot\|$ کامل باشد (یعنی، هر دنباله‌ی کوشی در این فضا همگرا باشد) و به ازای هر x و y متعلق به A، $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$، A را **جبر باناخ** می‌نامیم.

عنصر $e \in A$ را یک **عنصر همانی یا واحد** A گوییم در صورتی که به ازای هر $x \in A$، $ex = xe = x$.
همچنین، جبر نرم‌دار $(A, \|\cdot\|)$ را **واحددار(یکدار)**[1] نامیم، هرگاه A دارای عنصر همانی e باشد به طوری که $\|e\| = 1$.

اگر جبر باناخ A بدون واحد باشد، می‌توان به روش زیر به آن عنصر همانی الحاق کرد (یا اصطلاحاً واحددار کرد). **جبر باناخ واحددار شده‌ی** A را با نماد $A^\#$ نمایش می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A^\# = A \times \mathbb{C} = \{(x, \alpha) | x \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

1) Unital

اعمال فضای برداری بر $A^{\#}$ را همان اعمال مؤلفه به مؤلفه تعریف می‌کنیم. همچنین، ضرب و نرم روی $A^{\#}$ به صورت ذیل خواهند بود.

$$(x,\alpha)(y,\beta) = (xy+\alpha y+\beta x, \alpha\beta) \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{C}, x,y\in A);$$

$$\|(x,\alpha)\| = \|x\| + |\alpha| \qquad (\alpha\in\mathbb{C}, x\in A).$$

در این صورت، $e=(0,1)$ عضو همانی $A^{\#}$ می‌باشد. باتوجه به مطالب فوق، $(A^{\#}, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ و در نتیجه یک جبر باناخ واحددار است [7, pp. 12-13].

جبر A را **جابه‌جایی** (یا **تعویض‌پذیر**) گوییم، هرگاه به ازای هر x و y از A، $xy=yx$.

فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد. زیر مجموعه‌ی I از A را یک **ایده‌آل چپ (راست)** گوییم، هرگاه

۱) I زیرفضای برداری A باشد؛

۲) به ازای هر $a\in A$ و هر $b\in I$، $ab\in I$ $(ba\in I)$.

فرض کنیم که I هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست در A باشد. در این صورت، I را یک **ایده‌آل دو طرفه (ایده‌آل)** در A می‌نامیم. به علاوه، اگر $I\neq A$، I را **ایده‌آل حقیقی (سره)** گوییم. یک ایده‌آل حقیقی را که مشمول در هیچ ایده‌آل حقیقی دیگری نباشد، **ایده‌آل ماکسیمال** می‌نامیم.

فرض کنیم A یک جبر نرم‌دار با نرم $\|\cdot\|$ باشد. **همانی تقریبی چپ**[1]**(راست)** برای A، توری مانند (e_α) در A است که به ازای هر $a\in A$،

$$\lim_\alpha e_\alpha a = a \qquad (\lim_\alpha ae_\alpha = a).$$

یک **همانی تقریبی** برای A، توری مانند (e_α) در A است که همانی تقریبی چپ و همانی تقریبی راست باشد. به علاوه، همانی تقریبی (e_α) کراندار است، در صورتی که $\sup_\alpha \|e_\alpha\| < \infty$.

فرض کنیم A یک جبر باشد. نگاشت $* : A \longrightarrow A$ که $x\mapsto x^*$ را یک **برگشت** بر A گوییم، هرگاه به ازای هر x و y از A و هر λ از $\mathbb{K}$ ، خواص زیر را داشته باشد:

1) Left approximate identity

۱) $(x+y)^*=x^*+y^*$؛

۲) $(\lambda x)^*=\overline{\lambda}x^*$؛

۳) $(xy)^*=y^*x^*$؛

۴) $(x^*)^*=x$.

در این صورت، A را یک $*$**ـجبر** نامیم، هرگاه برگشت $*$ روی جبر A موجود باشد به طوری که به ازای هر $x\in A$، $\|x^*\|=\|x\|$. $*$ـجبر باناخ A را یک C^***ـجبر** گوییم، هرگاه به ازای هر $x\in A$، $\|xx^*\|=\|x\|^۲$.

مثال. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $B(H)$ گردایه‌ی همه‌ی عملگرهای خطی و کراندار روی H باشد. در این صورت، $B(H)$ با جمع و ضرب اسکالر معمولی توابع یک فضای برداری است. نرم $\|\cdot\|$ را روی $B(H)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\|=\sup\{\|T(x)\| \| \|x\|\leq ۱,\ x\in H\}.$$

لذا، $B(H)$ با نرم عملگری و ترکیب توابع یک جبر باناخ واحددار است و با در نظر گرفتن الحاقی T، یعنی T^*، به عنوان برگشت T، $B(H)$ یک C^*ـجبر باناخ واحددار غیر جابه‌جایی می‌باشد. توپولوژی‌های زیر روی $B(H)$ وجود دارند.

۱) **توپولوژی نرم:** فرض کنیم $\{T_n\}$ دنباله‌ای از $B(H)$ باشد. در این صورت، $T_n\xrightarrow{\|\cdot\|}T$، اگر $\lim_{n\longrightarrow\infty}\|T_n-T\|=۰$.

۲) **توپولوژی عملگری قوی (S.O.T):** فرض کنیم $\{T_\alpha\}$ یک تور در $B(H)$ باشد. در این صورت، $T_\alpha\xrightarrow{S.O.T}T$، اگر به ازای هر $u\in H$، $\lim_\alpha\|T_\alpha u-Tu\|=۰$.

۳) **توپولوژی عملگری ضعیف (W.O.T):** فرض کنیم $\{T_\alpha\}$ یک تور در $B(H)$ باشد. در این صورت، $T_\alpha\xrightarrow{W.O.T}T$، اگر به ازای هر $u,v\in H$، $\lim_\alpha\langle T_\alpha u,v\rangle=\langle Tu,v\rangle$.

۴.۱.۱ هم‌ریختی‌های مختلط و تبدیلات گلفاند.

فرض کنیم A و B دو جبر باناخ باشند. نگاشت خطی $h : A \longrightarrow B$ را یک **هم‌ریختی** می‌نامیم، اگر به ازای هر $x, y \in A$، $h(xy) = h(x)h(y)$. در چنین حالتی A وB را **هم‌ریخت** نامیم. همچنین، اگر h یک به یک و پوشا باشد، h را یک **یک‌ریختی** گوییم. در این حالت نیز A و B را **یکریخت** نامیم.

حال، فرض کنیم A یک جبر مختلط و $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابعک خطی بر A باشد، که تابع ثابت صفر نیست و به ازای هر x و y در A، $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. در این صورت، φ را **هم‌ریختی مختلط (سرشت، مشخصه)** بر A می‌نامیم.

مجموعه‌ی تمام هم‌ریختی‌های مختلط بر جبر باناخ جابه‌جایی واحددار A را با Φ_A نشان می‌دهیم. فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی واحددار و Φ_A مجموعه‌ی همه‌ی هم‌ریختی‌های مختلط بر A باشد. در این صورت:

(i) برای هر ایده‌آل ماکسیمال A، مانند M، عضوی، مانند $\varphi \in \Phi_A$، موجود است به طوری که

$$M = \ker \varphi = \{f \in A | \varphi(f) = \circ\}.$$

(ii) اگر $\varphi \in \Phi_A$، آن گاه $\ker \varphi$ یک ایده‌آل ماکسیمال A است [25, Theorem 11.5].

فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه جایی واحددار باشد. در این صورت، نگاشت $\varphi \mapsto \ker \varphi$ یک تناظر یک‌به یک بین Φ_A و مجموعه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال A است [7, Theorem 1.12].

فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی واحددار باشد و $x \in A$. نگاشت $\hat{x} : \Phi_A \longrightarrow \mathbb{C}$ را به ازای هر $h \in \Phi_A$، به صورت $\hat{x}(h) = h(x)$ تعریف می‌کنیم. همچنین، نگاشت $\Gamma_A : A \longrightarrow C(\Phi_A)$ را که با ضابطه‌ی $x \mapsto \hat{x}$ تعریف می‌شود، **تبدیل گلفاند** می‌نامیم. فرض کنیم $\hat{A} = \{\hat{x} | x \in A\}$. توپولوژی تولید شده به وسیله‌ی $\hat{A}$ روی Φ_A را **توپولوژی گلفاند** روی Φ_A گوییم.

پس، توپولوژی گلفاند ضعیف‌ترین توپولوژی روی Φ_A است که تحت آن هر $\hat{x}$ پیوسته است و به علاوه، $\Phi_A \subseteq A^*$. چون توپولوژی ضعیف ستاره، ضعیف‌ترین توپولوژی است که تحت آن هر $\hat{x}$ پیوسته است پس تحدید توپولوژی