دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته

ریاضی محض(آنالیز)

عنوان

جبرهای نرم‌دار توابع مشتق‌پذیر بر مجموعه‌های فشردهٔ هامونی

استاد راهنما

جناب آقای دکتر طاهر قاسمی

دانشجو

کبری شهروسوند

دی ماه ۸۹

چکیده

در این پایان‌نامه کامل بودن جبر نرم‌دار $(D^{(1)}(X), \|\cdot\|)$ و تکمیل شدهٔ آن را برای مجموعهٔ فشردهٔ هامونی تام X بررسی خواهیم کرد. به ویژه یک مجموعه فشرده هامونی و به طور شعاعی خود جاذب مانند X را می‌سازیم که جبر نرم‌دار $(D^{(1)}(X), \|\cdot\|)$ کامل نباشد و از این طریق به سؤال بلند و فینشتین (Bland و Feinstein) پاسخ خواهیم داد. همچنین ثابت می‌کنیم که رده‌های متعددی از مجموعه‌های فشرده هامونی و همبند مانند X وجود دارد که کامل بودن $(D^{(1)}(X), \|\cdot\|)$ با نقطه‌ای منظم بودن X هم ارز است. برای مثال، می‌توان تمام مجموعه‌های فشردهٔ هامونی، محدب چند جمله‌ای و همبند طول‌پذیر که درون آن تهی است و مجموعه‌های فشرده هامونی و ستاره‌شکل و کمان‌های ژوردان در $\mathbb{C}$ را بیان کرد.

قبلاً در مقاله بلند و فینشتین (Bland و Feinstein) مفهوم $\mathcal{F}$ـ مشتق یک تابع و خانواده‌ای از جبرهای باناخ $D^{(1)}_{\mathcal{F}}(X)$ متناظر با جبر نرم‌دار $D^{(1)}(X)$، وقتی که $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای مناسب از کمان‌های طول‌پذیر است، معرفی شده‌است. در این جا قصد داریم نتیجه‌های قوی‌تری دربارهٔ این که چه وقت $D^{(1)}_{\mathcal{F}}(X)$ و $D^{(1)}(X)$ با هم برابرند و این که تحت چه شرایطی $D^{(1)}_{\mathcal{F}}(X)$ در $D^{(1)}(X)$ چگال است، ارائه دهیم. به ویژه نشان خواهیم داد که اگر X، $\mathcal{F}$ـ منظم باشد این دو جبر با هم برابرند.

مثالی از بیشاپ (Bishop) نشان می‌دهد که تکمیل شده $(D^{(1)}(X), \|\cdot\|)$ نیم ساده نیست. در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم که وقتی اجتماع همهٔ کمان‌های ژوردان طول‌پذیرX درX چگال باشد، تکمیل شده $(D^{(1)}(X), \|\cdot\|)$ نیم ساده‌است.

یکی از هدف های این پایان‌نامه این است که نشان دهیم وقتی X مجموعهٔ فشرده هامونی و تام باشد فضای سرشت‌های $D^{(1)}(X)$ برابر با X است، چه $(D^{(1)}(X), \|\cdot\|)$ کامل باشد یا نباشد. به ویژه نشان می دهیم هر سرشتی بر جبر نرم‌دار $(D^{(1)}(X), \|\cdot\|)$ به طور خودکار پیوسته است.

واژه های کلیدی: جبر نرم‌دار، توابع مشتق‌پذیر، جبر تابعی باناخ، تکمیل شده‌ها، مجموعهٔ فشرده هامونی نقطه‌ای منظم.

رده بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 46H05، 46J10، 46J15، 46E15، 46E25.

مقدمه

رده‌ای خاص از جبرهای تابعی نرم‌دار متشکل از توابع مشتق‌پذیر بر زیر مجموعه های فشرده و تام (perfect) صفحهٔ مختلط در سال ۱۹۷۳ میلادی توسط دو ریاضیدان معروف H.G. Dales و A.M. Davie معرفی شد و مورد مطالعه قرار گرفت. این جبرها، که اخیراً جبرهای دیلز-دیوی (Dales-Davie) نامیده شده‌اند خواص جالبی دارند و از سال ۱۹۷۳ تا کنون بررسی‌های زیادی روی آنها انجام شده‌است. در فصل اول ابتدا مقدمه‌ای بر جبرهای باناخ و خواص اساسی آنها آورده شده‌است و سپس جبر تابعی نرم‌دار و جبر تابعی باناخ به شرح زیر معرفی می‌شود.

فرض کنیم X یک فضای فشرده و هاسدرف باشد. جبر تابعی نرم‌دار بر X، یک جبر نرم‌دار مانند $(A, \|\cdot\|)$ است به طوری‌که A زیر جبری از $C(X)$ باشد که A نقاط X را از هم جدا کند و ثابت‌ها را شامل باشد و به علاوه به‌ازای هر $f \in A$، $\|f\|_X \leq \|f\|$. اگر $(A, \|\cdot\|)$ کامل باشد A را جبر تابعی باناخ بر X می‌نامیم. با توجه به این تعریف هر همریختی مقداری بر جبر تابعی نرم‌دار A به طور خودکار پیوسته است.

با استفاده از قضیهٔ T.G. Honary در [13] نشان می‌دهیم که جبر تابعی نرم‌دار A بر مجموعه فشردهٔ X ، طبیعی است اگر و تنها اگر بستار یکنواخت A طبیعی باشد و به ازای هر $f \in A$، اگر $\|f\|_X = ۱$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{۱}{n}} = ۱$. در فصل دوم ابتدا جبر $D^{(۱)}(X)$ را به شرح زیر معرفی می‌کنیم:

فرض کنیم X یک مجموعه فشرده و تام از صفحهٔ مختلط باشد. تابع مختلط مقدار f بر X را در نقطهٔ $z_\circ \in X$ مشتق‌پذیر گوییم هر گاه

$$f'(z_\circ) = \lim_{\substack{z\in X \\ z\to z_\circ}} \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ}$$

موجود باشد. جبر توابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر بر X را با $D^{(۱)}(X)$ و تکمیل شدهٔ $(D^{(۱)}(X), \|\cdot\|)$ را با $\tilde{D}^{(۱)}(X)$ نمایش می‌دهیم، که در آن به ازای هر $f \in D^{(۱)}(X)$ ، $\|f\| = \|f\|_X + \|f'\|_X$. برای بسیاری از زیر مجموعه‌های فشرده و تام صفحهٔ مختلط جبر $D^{(۱)}(X)$ کامل نیست. دیلز و دیوی شرایطی را روی X گذاشته‌اند که کامل بودن این جبر را تضمین می‌کند. همچنین آنها ثابت کرده‌اند که برای هر مجموعهٔ فشرده هامونی(صفحه‌ای) و یکنواخت منظم، $D^{(۱)}(X) \subseteq R(X)$. در این فصل با ارائهٔ مثالی، که تعدیل شدهٔ مثال ۲.۴ در [3] است، این ادعا را رد می‌کنیم. در این فصل نشان می‌دهیم وقتی X مجموعهٔ فشرده هامونی و تام باشد فضای سرشت‌های $D^{(۱)}(X)$ برابر با X است، چه $D^{(۱)}(X)$ کامل باشد یا نباشد. به ویژه نشان می‌دهیم هر سرشتی بر جبر نرم‌دار

$(D^{(1)}(X), ||\cdot||)$ به طور خودکار پیوسته است.

در مقاله بلند و فینشتین (Feinstein, Bland) مفهوم $\mathcal{F}$ـمشتق یک تابع و خانواده‌ای از جبرهای باناخ $D^{(1)}_{\mathcal{F}}(X)$ متناظر با جبر $D^{(1)}(X)$، وقتی که $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای مناسب از کمان‌های طول‌پذیر است، معرفی شده است.

در فصل سوم دو مفهوم نیم‌طول‌پذیر و $\mathcal{F}$ـمنظم و واژه «مؤثر» را که تعدیلی از واژهٔ «مفید» تعریف شده در [3] است، معرفی می‌نماییم و محدودیت روی مسیرهای معرفی شده در [3] را ضعیف می‌کنیم، در حالی که نتیجه‌های قوی‌تری دربارهٔ این که چه وقت $D^{(1)}_{\mathcal{F}}(X)$ و $D^{(1)}(X)$ با هم برابرند و این که چه وقت $D^{(1)}(X)$ در $D^{(1)}_{\mathcal{F}}(X)$ چگال است، ارائه می‌دهیم. همچنین رابطهٔ بین $D^{(1)}(X)$، $A^{(1)}(X)$ و $D^{(1)}_{\mathcal{F}}(X)$ را وقتی درون X در X چگال و $\mathcal{F}$ خانوادهٔ موثر از مسیرها در X است، بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم وقتی X، $\mathcal{F}$ـمنظم است این سه جبر با هم برابرند.

در فصل چهارم مثالی از یک مجموعه فشرده هامونی که یکنواخت منظم و درونش در آن چگال است ارائه خواهیم داد، که $A^{(1)}(X)$ با $D^{(1)}(X)$ برابر نیست. همچنین یک مجموعهٔ فشرده هامونی که یکنواخت‌منظم و درونش در آن چگال است ارائه می‌دهیم که $A^{(1)}(X)$ در $(A(X), ||\cdot||)$ چگال نیست، که در آن به ازای هر $f \in A(X)$، $||f|| = ||f||_X$. در بخش دوم فصل چهار نشان خواهیم داد که برای هر مجموعهٔ فشردهٔ هامونی، محدب چندجمله‌ای و کراندار ژئودزیکی مانند X، جبر نرم‌دار $(D^{(1)}(X), ||\cdot||)$ کامل است اگر و تنها اگر شرط زیر برقرار باشد:

برای هر $z \in X$ وجود دارد $B_z > 0$ به طوری‌که برای هر چندجمله‌ای p، و هر $w \in X$،

$$|p(z) - p(w)| \leq B_z ||p'||_X |z - w|.$$

در فصل پنجم در مورد ناکامل بودن $D^{(1)}(X)$ بحث خواهیم کرد و مثال‌هایی ارائه می‌دهیم که در آن $D^{(1)}(X)$ ناکامل است. برای مثال یک مجموعهٔ فشردهٔ هامونی و به طور شعاعی خود جاذب می سازیم که جبر نرم‌دار $D^{(1)}(X)$ کامل نباشد و از این طریق به سؤال بلند و فینشتین در [3] پاسخ خواهیم داد. همچنین ثابت می کنیم که رده‌های متعددی از مجموعه‌های فشردهٔ هامونی و همبند وجود دارد که کامل بودن $(D^{(1)}(X), ||\cdot||)$ با نقطه‌ای منظم بودن X هم‌ارز است. برای مثال می توان تمام مجموعه‌های فشردهٔ هامونی، محدب چندجمله‌ای و همبند طول‌پذیر، که درون آن تهی است و مجموعه‌های فشرده هامونی و ستاره‌شکل و کمان ژوردان در $\mathbb{C}$ را بیان

کرد. در پایان این فصل سؤال‌های جالبی را که هنوز باز هستند مطرح خواهیم کرد.

امیدواریم که مطالب این پایان‌نامه برای خواننده مفید واقع شود و علاقه‌مندان به محتوای این پایان‌نامه در جهت پاسخ‌گویی به سؤالات باز مطرح شده موفقیت‌های جالبی کسب کنند و چنانچه نتایج جدیدی بدست آوردند، اینجانب را مطلع نمایند.

این پایان‌نامه بر اساس مقالهٔ ذیل تدوین شده‌است.

H.G. Dales and J.F. Feinstein, Normed alghebras of differentiable functions on compact plane sets, Indian J. Pure Appl. Math. **41(1):** February(2010), 153-187.

فهرست مطالب

فصل اول

مفاهیم اولیه در جبرهای باناخ و جبرهای تابعی

۱.۱ معرفی جبرهای باناخ

در این بخش به معرفی برخی از مفاهیم و ویژگی‌های جبرهای باناخ می پردازیم.

۱.۱.۱ تعریف. یک جبر (حقیقی یا مختلط) عبارت است از فضای برداری A بر روی میدان اسکالر F (میدان حقیقی $\mathbb{R}$ یا میدان مختلط $\mathbb{C}$) به همراه نگاشت ضرب $A \times A \underset{(x,y)\mapsto x\cdot y}{\longrightarrow} A$، به طوری‌که برای هر $x, y, z \in A$ و هر اسکالر α داشته باشیم:

۱) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ و $(y + x) \cdot z = y \cdot z + x \cdot z$

۲) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

۳) $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)$

معمولاً به جای $x \cdot y$ می‌نویسند xy و ما نیز همین نماد را برای حاصلضرب x و y به کار می‌بریم. چنانچه جبر A مجهز به یک نرم جبری باشد، یعنی نرمی مانند $\|\cdot\|$ که به ازای هر $x, y \in A$، $\|xy\| \le \|x\|\|y\|$، آنگاه $(A, \|\cdot\|)$ را یک جبر نرم‌دار گوییم.

۲.۱.۱ تعریف. جبر نرم‌دار $(A, \|\cdot\|)$ را یک جبر باناخ گوییم هرگاه A تحت نرمش کامل باشد. جبر باناخ A را یکدار گوییم هرگاه نسبت به عمل ضرب عنصر یکه داشته باشد و معمولاً فرض می کنند $\|e\| = ۱$، که در آن e همان عنصر یکه است. جبر A را جابه جایی گوییم هرگاه به‌ازای هر $x, y \in A$ داشته باشیم $xy = yx$. عضو $x \in A$ را وارون‌پذیر گوییم هرگاه عضو $x^{-۱}$ در A موجود باشد که $xx^{-۱} = x^{-۱}x = e$.

نگاشت $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \delta)$ را طولپایی گویند هرگاه به ازای هر $x, y \in X$،

$d(x,y)=\delta(f(x),f(y))$.

۳.۱.۱ تعریف. فضای متریک کامل (Y,δ) را تکمیل شدهٔ فضای متریک (X,d) می نامیم هرگاه نگاشت طولپایی مانند $f:(X,d)\longrightarrow(Y,\delta)$ وجود داشته باشد به طوری‌که $f(X)$ در Y چگال باشد. اگر X و $f(X)$ را یکی تصور کنیم آنگاه می توان X را یک زیر مجموعهٔ Y تلقی کرد.

برای دو دنباله کوشی $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ تعریف می‌کنیم $\{p_n\}\sim\{q_n\}$ اگر $\lim\limits_{n\to\infty}d(p_n,q_n)=0$. به راحتی می توان ثابت کرد که $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی A است. فرض کنیم X^* مجموعهٔ تمام رده‌های هم ارزی باشد، یعنی $X^*=\{[\{p_n\}]:\{p_n\}\in A\}$. اکنون نگاشت Δ را از $X^*\times X^*$ به $\mathbb{R}$ چنین تعریف می‌کنیم.

$$\Delta([\{p_n\}],[\{q_n\}])=\lim_{n\to\infty}d(p_n,q_n).$$

چون دنباله‌های $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ کوشی هستند لذا با استفاده از نامساوی مثلث دنبالهٔ $\{d(p_n,q_n)\}$ کوشی است. پس حد بالا موجود و متناهی است. اینک فرض می کنیم $([\{p_n\}],[\{q_n\}])=([\{r_n\}],[\{s_n\}])$ که این چهار دنباله از اعضای A هستند. پس $\{p_n\}\sim\{r_n\}$ و $\{q_n\}\sim\{s_n\}$ و لذا $\lim\limits_{n\to\infty}d(p_n,r_n)=0$ و $\lim\limits_{n\to\infty}d(q_n,s_n)=0$. از طرفی به ازای هر n داریم

$$d(p_n,q_n)\le d(p_n,r_n)+d(r_n,s_n)+d(s_n,q_n).$$

$$d(r_n,s_n)\le d(r_n,p_n)+d(p_n,q_n)+d(q_n,s_n).$$

در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty}d(p_n,q_n)\le\lim\limits_{n\to\infty}d(r_n,s_n)$ و $\lim\limits_{n\to\infty}d(r_n,s_n)\le\lim\limits_{n\to\infty}d(p_n,q_n)$

و لذا $\lim\limits_{n\to\infty}d(r_n,s_n)=\lim\limits_{n\to\infty}d(p_n,q_n)$. بنابراین $\Delta([\{p_n\}],[\{q_n\}])=\Delta([\{r_n\}],[\{s_n\}])$ و لذا Δ خوش تعریف است. به آسانی می توان نشان داد که Δ در حقیقت یک متریک روی X^* است.

حال فرض می‌کنیم $p\in X$. اگر به ازای هر n، $p_n=p$ آنگاه دنبالهٔ $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ کوشی است و لذا $P_p=[\{p_n\}]=[\{p\}]\in X^*$. اگر $f:X\longrightarrow X^*$ با ضابطهٔ $f(p)=[\{p\}]$ تعریف شود f بوضوح تابعی یک به یک است. همچنین به ازای هر $p,q\in X$،

$$\Delta(f(p),f(q))=\Delta(P_p,P_q)=\lim_{n\to\infty}d(p_n,q_n)=d(p,q)$$

لذا f یک طولپایی از X بتوی X^* است. حال نشان می دهیم $f(X)$ در X^* چگال است. فرض کنیم $P = [\{p_n\}] \in X^*$. به ازای هر n قرار می‌دهیم:

$$P_{p_1} = [\{p_1\}], P_{p_2} = [\{p_2\}], .., P_{p_n} = [\{p_n\}], ...$$

که در آن $\{p_n\} = \{p_n, p_n, ..., p_n, ...\}$ ، یعنی تمام جملات این دنباله همان p_n هستند.

چون به ازای هر n، $f(p_n) = P_{p_n}$، لذا $P_{p_n} \in f(X)$. اینک ثابت می‌کنیم $\lim_{n\to\infty} P_{p_n} = P$. چون به ازای هر n، $\Delta(P_{p_n}, P) = \lim\limits_{k\to\infty} d(p_n, p_k)$، برای اثبات $P_{p_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P$، کافی است نشان دهیم $\lim\limits_{k,n\to\infty} d(p_n, p_k) = 0$، که این هم ازکوشی بودن دنبالهٔ $\{p_n\}$ بدیهی است. بنابراین $f(X)$ در X^* چگال است.

حال نشان می‌دهیم X^* با متریک Δ کامل است. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی در X^* باشد. چون $f(X)$ در X^* چگال است به ازای هر n، $y_n \in X$ وجود دارد به طوری‌که $\Delta(x_n, f(y_n)) < \frac{1}{n}$. بنابراین

$$\begin{aligned}\Delta(f(y_m), f(y_n)) &\leq \Delta(f(y_m), x_m) + \Delta(x_m, x_n) + \Delta(x_n, f(y_n))\\ &< \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \Delta(x_m, x_n).\end{aligned}$$

چون $\{x_n\}$ در X^* کوشی است لذا $\{f(y_n)\}$ نیز در X^* کوشی است. از طرفی

$$\Delta(f(y_n), f(y_m)) = d(y_m, y_n)$$

در نتیجه $\{y_k\}$ یک دنباله کوشی در X است و لذا $x = [\{y_k\}] \in X^*$. بنابراین

$$\Delta(x_n, x) \leq \Delta(x_n, f(y_n)) + \Delta(f(y_n), x) < \frac{1}{n} + \Delta(f(y_n), x).$$

چون

$$\Delta(f(y_n), x) = \Delta([\{y_n\}], [\{y_k\}]) = \lim_{k\to\infty} d(y_n, y_k)$$

پس $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta(f(y_n), x) = \lim\limits_{k,n\to\infty} d(y_n, y_k) = 0$ و در نتیجه $\Delta(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. بنابراین X^* تحت متریک Δ کامل است و در نتیجه می‌توان گفت که (X^*, Δ) در حقیقت تکمیل شدهٔ (X, d) است. ضمناً می‌توان نشان داد که هر فضای متریک تکمیل شده‌ای یکتا دارد. در حقیقت اگر X^{**} تکمیل شده‌ای دیگر از X باشد آنگاه X^* و X^{**} به طور طولپا یکسان‌ریخت هستند. توجه شود که هر جبر نرم‌دار نیز تکمیل شده‌ای یکتا دارد که در حقیقت یک جبر باناخ است. برای اطلاعات بیشتر می توانید به کتاب آنالیز حقیقی Aliprantis مراجعه نمایید.

۴.۱.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر مختلط و $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابعک خطی بر A باشد. اگر به‌ازای هر $f, g \in A$، $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ آنگاه φ را یک همریختی مختلط گویند. **هر همریختی مختلط و ناصفر را یک سرشت(مشخصه)** $(Character)$ **نامیم.**

۵.۱.۱ قضیه. [18, 10.7]فرض کنیم φ یک سرشت بر جبر باناخ یکدار A باشد. در این صورت

۱) φ پیوسته است و $\|\varphi\| = ۱ = \varphi(۱)$

۲) برای هر عضو وارون‌پذیر A مثل f، $\varphi(f) \neq ۰$.

۶.۱.۱ تعریف. زیرمجموعهٔ J از جبر باناخ یکدار و جابه‌جایی A را یک ایده‌آل A گوییم هرگاه:

۱) J زیرفضای برداری A باشد.

۲) برای هر $g \in J$ و هر $f \in A$، $fg \in J$.

اگر $J \neq A$، J را ایده‌آل سره (واقعی) گوییم. ایده‌آل بیشین (ماکسیمال)، یک ایده‌آل واقعی است که جزء هیچ ایده‌آل واقعی دیگری نیست.

۷.۱.۱ قضیه. [18, 11.2]فرض کنیم A جبر باناخ یکدار و جابه‌جایی باشد. در این صورت

۱) هر ایده‌آل واقعی A، شامل هیچ عضو وارون‌پذیر نیست.

۲) اگر J ایده‌آل A باشد آنگاه $\bar{J}$ نیز ایده‌آل A است.

۳) هر ایده‌آل واقعی A جزء یک ایده‌آل ماکسیمال A است.

۴) هر ایده‌آل ماکسیمال بسته است.

۸.۱.۱ قضیه. [18, 11.5]فرض کنیم A جبر باناخ یکدار و جابه‌جایی و Φ_A مجموعهٔ همهٔ سرشت‌ها بر A باشد. در این صورت

۱) برای هر ایده‌آل ماکسیمال A مانند M، $\varphi \in \Phi_A$ای موجود است که

$$M = \ker(\varphi) = \{f \in A : \varphi(f) = ۰\}$$

۲) اگر $\varphi \in \Phi_A$ آنگاه هستهٔ φ ایده‌آل ماکسیمال A است.

۳) عضو $f \in A$ در A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\varphi \in \Phi_A$ داشته باشیم $\varphi(f) \neq ۰$.

۴) عضو $f \in A$ در A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر f در هیچ ایده‌آل واقعی A نباشد.

فرض کنیم A جبر مختلط باشد. همان طوری که در [6, 1.3.27] توضیح داده شده است، فضای همهٔ سرشت‌ها بر A را با Φ_A نشان می‌دهیم. اگر A جبر نرم‌دار باشد، فضای سرشت‌های پیوسته بر A را با Ψ_A نشان می‌دهیم. فضای Ψ_A نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره، فضایی موضعاً فشرده است.[6, 1.3.27]

ملاحظه: بنابر قضیه ۵.۱.۱ اگر A جبر باناخ باشد آنگاه $\Psi_A = \Phi_A$.

۹.۱.۱ تعریف. فرض کنیم A جبر باناخ یکدار و جابه‌جایی باشد و Φ_A مجموعهٔ همهٔ سرشت‌های مختلط (پیوسته)بر A باشد. به هر $f \in A$ تابع $\hat{f} : \Phi_A \longrightarrow \mathbb{C}$ را با ضابطهٔ $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$ نسبت می‌دهیم. نگاشت $\hat{f}$ را تبدیل گلفاند f می‌نامیم. البته با فرض $\hat{A} = \{\hat{f} : f \in A\}$، منظور از تبدیل گلفاند نگاشت زیر است

$$A \underset{f \mapsto \hat{f}}{\longrightarrow} \hat{A}$$

توپولوژی ضعیف تولید شده توسط $\hat{A}$ بر Φ_A را توپولوژی گلفاند بر Φ_A نامیم.

پس توپولوژی گلفاند ضعیف‌ترین توپولوژی بر Φ_A است که تحت آن هر $\hat{f}$ پیوسته است. اگر فضای دوگان A را با A^* نمایش دهیم آنگاه $\Phi_A \subseteq A^*$. خانواده $\{F_f : f \in A\}$ توپولوژی ضعیف ستاره را بر A^* تولید می‌کند که در آن نگاشت $F_f : A^* \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه $F_f(\Lambda) = \Lambda(f)$ تعریف می‌شود. در واقع هر $\hat{f}$ تحدید F_f به Φ_A است. چون توپولوژی ضعیف ستاره، ضعیف‌ترین توپولوژی است که تحت آن هر F_f پیوسته است، پس تحدید توپولوژی ضعیف ستارهٔ A^* به Φ_A، ضعیف‌ترین توپولوژی بر Φ_A است که تحت آن هر $\hat{f}$ پیوسته است. بنابراین توپولوژی گلفاند روی Φ_A، تحدید توپولوژی ضعیف ستارهٔ A^* به Φ_A است. با این توپولوژی، Φ_A به یک فضای توپولوژیک تبدیل می‌گردد و چون یک تناظر یک به یک بین ایده‌آل‌های ماکسیمال A و اعضای Φ_A وجود دارد، Φ_A را فضای ایده‌آل ماکسیمال A نیز می‌نامیم و به M_A نشان می‌دهیم.

۱۰.۱.۱ قضیه. [18, 11.9]فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار و جابه‌جایی باشد. در این صورت M_A، فضای ایده‌آل ماکسیمال A، فشرده و هاسدورف است.

۱۱.۱.۱ تعریف. فرض کنیم A جبر باناخ یکدار و جابه‌جایی باشد. چون تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال A شامل صفر هستند لذا مقطع آنها ناتهی است. مقطع همهٔ ایده‌آل‌های

ماکسیمال A را رادیکال A می‌نامیم و به $\mathrm{Rad}(A)$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$، A را نیم ساده گوییم.

۲.۱ همبندی و مشتق‌پذیری

۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. یک جداسازی برای X، زوج U و V از زیرمجموعه‌های باز و ناتهی و مجزای X است که، اجتماع آنها برابر X است. فضای X را همبند گوییم اگر هیچ جداسازی برای آن موجود نباشد.

تعریف معادل همبندی به صورت زیر است:

فضای X همبند است اگر و تنها اگر تنها زیرمجموعه‌های X که هم باز و هم بسته هستند مجموعهٔ تهی و خود X باشند.

۲.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و Y زیرفضای آن باشد. یک جداسازی برای Y زوج A و B از زیرمجموعه‌های ناتهی X است که اولاً اجتماع آنها برابر Y است و ثانیاً $A \cap \bar{B} = \phi$ و $\bar{A} \cap B = \phi$.

۳.۲.۱ لم. [18] اگر C و D یک جداسازی برای فضای X و Y زیرمجموعهٔ همبندی از X باشد، آنگاه $Y \subseteq C$ یا $Y \subseteq D$.

۴.۲.۱ قضیه. [18] تصویر مجموعه‌های همبند تحت نگاشت‌های پیوسته، همبند است.

۵.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $x, y \in X$. رابطه هم‌ارزی $\sim$ را بر X به این صورت تعریف می‌کنیم که $x \sim y$ اگر زیرمجموعه همبندی از X موجود باشد که شامل x و y باشد. هر ردهٔ هم‌ارزی را یک مؤلفهٔ X گوییم.

۶.۲.۱ تعریف. هر زیر مجموعهٔ باز و همبند صفحه را یک حوزه یا دامنه گوییم.

۷.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک باشند. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را باز گوئیم اگر برای هر مجموعهٔ بازی مانند U از X، $f(U)$ در Y باز باشد.

۸.۲.۱ ساختار مجموعهٔ کانتور. بازهٔ $C_{۰} = [۰, ۱]$ را به سه قسمت برابر تقسیم و بازهٔ باز میانی، یعنی $d_{۱,۱} = (\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$ را حذف می‌کنیم. قرار می‌دهیم $C_{۱} = [۰, \frac{۱}{۳}] \cup [\frac{۲}{۳}, ۱]$ و ملاحظه می‌کنیم که $C_{۱}$ برابر است با اجتماع $۲ = ۲^{۱}$ بازهٔ بسته جدا از هم. حال هر یک از بازه‌های بستهٔ $C_{۱}$ را به سه قسمت برابر تقسیم و بازهٔ باز میانی هر یک از آنها را حذف می‌کنیم و بازه‌های میانی را با $d_{۲,۱} = (\frac{۱}{۹}, \frac{۲}{۹})$ و $d_{۲,۲} = (\frac{۷}{۹}, \frac{۸}{۹})$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ای راکه پس از حذف این بازه‌ها از $C_{۱}$ باقی می‌ماند $C_{۲}$ می‌نامیم، یعنی $C_{۲} = [۰, \frac{۱}{۹}] \cup [\frac{۲}{۹}, \frac{۱}{۳}] \cup [\frac{۲}{۳}, \frac{۷}{۹}] \cup [\frac{۸}{۹}, ۱]$. اکنون فرآیند (استقرایی) ساختن $C_{n+۱}$ از C_n روشن است. هر یک از ۲^n بازهٔ بستهٔ جدا از هم C_n را به سه قسمت برابر تقسیم و بازه‌های میانی آنها را حذف می‌کنیم و بازه‌های میانی را با $d_{n,۱}, ..., d_{n,۲^n}$ نشان می‌دهیم. آنچه از C_n باقی می ماند $C_{n+۱}$ نام دارد. مجموعهٔ کانتور به صورت $C = \cap_{n=۱}^{\infty} C_n$ تعریف می شود. بنابرکتاب آشنایی با آنالیز حقیقی در [۲۲] چنانچه $x \in C$ آنگاه نمایشی از x در مبنای ۳ وجود داردکه درآن رقم ۱ ظاهر نمی شود، یعنی می‌توان نوشت $x = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{a_n}{۳^n}$ که درآن $a_n \in \{۰, ۲\}$.

۹.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $x = (۰/a_۱a_۲a_۳...)_۳$ که $a_i \in \{۰, ۲\}$ و تابع $f : C \longrightarrow [۰, ۱]$ را با ضابطهٔ $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{a_n}{۳^n} \mapsto \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{b_n}{۲^n}$ تعریف می کنیم، که در آن $b_n = \frac{a_n}{۲}$. تابع f در نقاط انتهایی $d_{p,k}$ مقداری یکسان دارد، برای مثال در $d_{۱,۱} = (\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$، $f(\frac{۱}{۳}) = f(۰/۰۲۲...) = (۰/۰۱۱...)_۲ = (۰/۱)_۲ = \frac{۱}{۲}$ از طرفی دیگر $f(\frac{۲}{۳}) = f((۰/۲)_۳) = (۰/۱)_۲ = \frac{۱}{۲}$ و این برای دیگر بازه‌ها نیز به طور یکسان به کار می رود. تابع f را می‌توان روی بازهٔ $[۰, ۱]$ توسیع داد به طوری‌که تابع f روی بازه‌های $d_{p,k}$ مقداری ثابت داشته باشد که همان مقدار تابع در نقاط انتهایی بازهٔ $d_{p,k}$ است این تابع را تابع کانتور نامند.

مجموعهٔ کانتور هیچ نقطه تنها ندارد و تابع کانتور f یکنوا است و به علاوه تابعی پیوسته بر $[۰, ۱]$ است و جالب اینکه تابع کانتور f در بازه‌های میانی مشتق‌پذیر و مشتق آن برابر صفر است اما در نقاط مجموعهٔ کانتور مشتق‌پذیر نیست. زیرا فرض کنیم $x_۰$ یک نقطه انتهایی بازهٔ میانی باشد در این صورت با توجه به تعریف f چون مقدار تابع روی بازهٔ میانی ثابت است مقدار مشتق صفر است لذا از یک طرف مشتق صفر است اما از طرف دیگر چون $x_۰$ عضو مجموعهٔ کانتور است پس نقطه تنها نیست لذا به ازای هر همسایگی $x_۰$ بی‌نهایت نقطه‌کانتوروجود دارد پس مشتق f موجود نیست.

۳.۱ جبرهای تابعی و جبرهای تابعی باناخ

ابتدا قضیه‌های در مورد فضاهای باناخ را متذکر می شویم.

۱.۳.۱ قضیه. (قضیه نگاشت باز) [6, A.3.23]فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و f از X به Y یک نگاشت خطی، پیوسته و پوشا باشد. در این صورت f یک نگاشت باز است.

۲.۳.۱ نتیجه. فرض کنیم $(X, \|\cdot\|_۱)$ و $(Y, \|\cdot\|_۲)$ دو فضای باناخ باشند و $f : (X, \|\cdot\|_۱) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|_۲)$ نگاشت خطی، پیوسته، پوشا و یک به یک باشد. در این صورت $a, b > ۰$ وجود دارد که به‌ازای هر $x \in X$، $a\|x\|_۱ \leq \|f(x)\|_۲ \leq b\|x\|_۱$

در این بخش جبرهای تابعی (باناخ) را تعریف کرده و برخی از خواص کلی آنها را، که در بخش‌های بعد موردنیاز هستند، ذکر می‌کنیم. فرض کنیم X یک فضای فشرده و هاسدورف و $C(X)$ جبر توابع مختلط پیوسته بر X باشد. چنانکه می‌دانیم ض $C(X)$ با نرم یکنواخت $\|f\|_X = \sup_{x\in X} |f(x)|$ یک جبر باناخ است.

۳.۳.۱ تعریف. فرض کنیم X فضای فشرده و هاسدورف و $C(X)$ جبر توابع مختلط پیوسته بر X و A زیرجبری از $C(X)$ باشد. گوییم A نقاط X را جدا می‌کند هرگاه به‌ازای هر دو عضو متمایز X مانند x, y، عضوی از A مانند f یافت شود که $f(x) \neq f(y)$.

۴.۳.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای فشرده باشد. جبر تابعی نرم‌دار بر X، یک جبر نرم‌دار مانند $(A, \|\cdot\|)$ است، به طوری‌که A زیر جبری از $C(X)$ باشد که A نقاط X را از هم جدا کند و ثابت‌ها را شامل باشد. و به علاوه به ازای هر $f \in A$، $\|f\|_X \leq \|f\|$. اگر $(A, \|\cdot\|)$ تحت نرمش کامل باشد A را جبر تابعی باناخ بر X می‌نامیم. در حالت خاص که نرم A با نرم یکنواخت هم‌ارز باشد A را جبر یکنواخت گوییم. ضمناً توجه می‌کنیم که اگر A زیر جبری از $C(X)$ باشد که تحت نرم $\|\cdot\|$ باناخ نیز باشد آنگاه شرط $\|f\|_X \leq \|f\|$ به طور خودکار برای هر $f \in A$ برقرار است.

نکته. شرط $\|f\|_X \leq \|f\|$ معادل است با اینکه بگوییم هومومورفیسم‌های مقداری بر A پیوسته است.

۵.۳.۱ تعریف. فرض کنیم A جبر تابعی بر X باشد. برای هر $x \in X$، همریختی مقداری $\varepsilon_x : A \longrightarrow \mathbb{C}$ را به‌ازای هر $f \in A$ با ضابطهٔ $\varepsilon_x(f) = f(x)$ تعریف می‌کنیم.

۶.۳.۱ قضیه. فرض کنیم که A یک جبر تابعی نرم‌دار بر فضای فشردهٔ X باشد. در این صورت به ازای هر $x \in X$ $\varepsilon_x \in \Psi_A$ و نگاشت $\eta : X \longrightarrow \Psi_A$ با ضابطهٔ $x \mapsto \varepsilon_x$ یک به یک و پیوسته است. اگر این نگاشت پوشا نیز باشد آنگاه η نگاشتی باز است.

برهان. با توجه به تعریف جبر تابعی نرم‌دار، به ازای هر $f \in A$ داریم $|\varepsilon_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_X \leq \|f\|$. پس $\varepsilon_x \in \Psi_A$. حال فرض کنیم $\varepsilon_x = \varepsilon_y$. در این صورت به ازای هر $f \in A$، $\varepsilon_x(f) = \varepsilon_y(f)$. یعنی به ازای هر $f \in A$، $f(x) = f(y)$. چون جبر تابعی نرم‌دار A جداکنندهٔ نقاط X است لذا $x = y$. پس نگاشت η یک به یک است. فرض کنیم $\{x_w\}$ توری در X باشد که $x_\omega \longrightarrow x_\circ$. در این صورت به ازای هر $f \in A$، $\varepsilon_{x_\omega}(f) = f(x_\omega) \longrightarrow f(x_\circ) = \varepsilon_{x_\circ}(f)$. و لذا در Ψ_A (با توپولوژی ضعیف ستاره) $\varepsilon_{x_\omega} \longrightarrow \varepsilon_{x_\circ}$. بنابراین نگاشت η پیوسته است. حال اگر η پوشا نیز باشد با توجه به یک به یک بودن نگاشت η، به راحتی می توان گفت که به ازای هر مجموعهٔ باز مانند U در X داریم $\eta(U^c) = (\eta(U))^c$. چون X فضای فشرده است پس U^c مجموعه‌ای فشرده است و چون Ψ_A هاسدورف است از پیوستگی η نتیجه می‌شود که $(\eta(U))^c$ بسته است و لذا $\eta(U)$ باز و نگاشت η یک نگاشت باز است. □

۷.۳.۱ تعریف. اگر نگاشت η در قضیه ۳.۳.۱ پوشا باشد آنگاه A را یک جبر **طبیعی** می نامیم.

۸.۳.۱ قضیه. [قضیه ۵.۱.۲ ,۲۳]هر جبر تابعی باناخ بر X، بالاخص $C(X)$، نیم ساده است.

۹.۳.۱ قضیه. [قضیه ۶.۱.۲ ,۲۳] فرض کنیم A جبر تابعی باناخ بر X باشد. اگر f در A وارون‌پذیر باشد آنگاه f همواره بر X مخالف صفر است ولی عکس مطلب برقرار نیست مگر آن که A طبیعی باشد.

۱۰.۳.۱ قضیه. اگر A جبر تابعی نرم‌دار و طبیعی بر X باشد آنگاه برای هر $f \in A$، $\|f\|_X = \|\hat{f}\|_{\Psi_A}$.

برهان. چون A طبیعی است، بنابراین هر عضو Ψ_A یک همریختی مقداری است. در نتیجه به ازای هر $f \in A$،
$\|f\|_X = \sup_{x\in X} |f(x)| = \sup_{x\in X} |\varepsilon_x(f)| = \sup_{\psi\in\Psi_A} |\phi(f)| = \|\hat{f}\|_{\Psi_A}$ □

۱۱.۳.۱ قضیه. (Honary) [13] اگر A یک جبر تابعی باناخ بر X باشد آنگاه نگاشت تحدید $F : \Phi_{\bar{A}} \longrightarrow \Phi_A$ یک همسانریختی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $f \in A$، $\|f\|_X = \|\hat{f}\|_{\Phi_A}$. در اینجا $\bar{A}$ بستار یکنواخت A است.

۱۲.۳.۱ نتیجه. [13] اگر A جبر تابعی باناخ طبیعی بر X باشد آنگاه $\bar{A}$، بستار یکنواخت A، نیز طبیعی است، ولی عکس آن برقرار نیست.

۱۳.۳.۱ نتیجه. [13]اگر A و B دو جبر تابعی باناخ بر X باشند، به طوری که

۱) $A \subseteq B$

۲) ثابت $K > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به‌ازای هر $f \in A$، $\|f\|_A \leq K\|f\|_B$

۳) B یک جبر طبیعی باشد.

آنگاه $\Phi_A \cong \Phi_{\bar{A}}$. به ویژه اگر $\bar{A} = \bar{B}$ آنگاه A طبیعی است.

حال تعمیمی از قضیهٔ ۷.۳.۱ را به شرح ذیل ارائه می‌دهیم:

۱۴.۳.۱ قضیه. فرض کنیم که X یک فضای فشرده، $(A, \|\cdot\|)$ یک جبر تابعی نرم‌دار بر X و B بستار یکنواخت A باشد. در این صورت A طبیعی است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشد:

الف) B یک جبر طبیعی بر X است.

ب) به‌ازای هر $f \in A$ اگر $\|f\|_X = 1$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}} = 1$.

برهان. چون A جبر تابعی نرم‌دار است پس به ازای هر $f \in A$، $\|f\|_X \leq \|f\|$ و لذا هر همریختی مقداری بر A پیوسته است. اگر A طبیعی باشد آنگاه هر سرشت پیوسته بر A مقداری است. از طرفی B جبر تابعی یکنواخت است، پس هر سرشت بر B (تحت نرم یکنواخت) پیوسته است، به عبارت دیگر $\Phi_B = \Psi_B$. اگر $F : \Psi_B \longrightarrow \Psi_A$ را یک نگاشت تحدید در نظر بگیریم، یعنی به ازای هر $\psi \in \Phi_B$، $F(\psi) = \psi|_A$ آنگاه این نگاشت خوش‌تعریف است، زیرا به‌ازای هر سرشت ψ از Ψ_B تحدید آن به A نیز یک همریختی ناصفر و لذا عضوی از Φ_A است. از طرفی به ازای هر $f \in A$، $|\psi|_A(f)| = |\psi(f)| \leq \|f\|_X \leq \|f\|$ و در نتیجه $\psi|_A \in \Psi_A$.

حال اگر $f \in B$ و $\phi \in \Psi_A$ آنگاه دنباله‌ای مانند $\{f_n\}$ در A و $x \in X$ وجود دارد به طوری‌که $\|f_n - f\|_X \longrightarrow 0$ و $\phi = \varepsilon_x$. چون

$$|\phi(f_n) - \phi(f_m)| = |\varepsilon_x(f_n) - \varepsilon_x(f_m)| = |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_X \longrightarrow 0$$

لذا $\lim_{n\to\infty} \phi(f_n)$ موجود است. حال نگاشت ψ را به صورت $\psi(f) = \lim_{n\to\infty} \phi(f_n)$ تعریف می‌کنیم. برای اینکه نشان دهیم ψ خوش‌تعریف است فرض می‌کنیم $\{g_n\}$ دنبالهٔ دیگری باشد که $\|g_n - f\|_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. چون

$$\begin{aligned}|\phi(g_n) - \phi(f_n)| &\leq |\phi(g_n) - \phi(g_m)| + |\phi(g_m) - \phi(f_m)| + |\phi(f_m) - \phi(f_n)|\\ &\leq \|g_n - g_m\|_X + \|g_m - f_m\|_X + \|f_m - f_n\|_X \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \phi(g_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(f_n)$. واضح است که ψ توسیع ϕ به B است، $\psi \in \Psi_B$ و لذا $F(\psi) = \phi$. بنابراین نگاشت F پوشا و یک به یک است. از طرفی با توجه به ویژگی توپولوژی ضعیف ستاره F پیوسته‌است (کافی است از همگرایی تورها استفاده کنیم). چون Ψ_B فشرده و Ψ_A هاسدورف است، بنا بر قضیه‌ای از توپولوژی، F^{-1} هم پیوسته است. بنابراین $\Psi_A \cong \Psi_B$ و لذا B طبیعی است. از طرفی چون A طبیعی است بنا بر قضیه ۶.۳.۱ به ازای هر $f \in A$، $\|f\|_X = \|\hat{f}\|_{\Psi_A}$. حال فرض کنیم A_0 تکمیل شدهٔ A باشد که یک جبر باناخ است. چون به ازای هر $f \in A$

$$\lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}} = \|\hat{f}\|_{\Psi_{A_0}} = \sup_{\psi\in\Psi_{A_0}} |\psi(f)| \leq \sup_{\psi\in\Psi_A} |\psi(f)| = \|\hat{f}\|_{\Psi_A} = \|f\|_X$$

از طرفی $\|f\|_X \leq \|f\|$ و لذا $\lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|f\|_X$ پس $\|f\|_X = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$ لذا بند (ب) نیز برقرار است.

حال با فرض‌های (الف) و (ب) ثابت می‌کنیم A جبر طبیعی است. به ازای هر $f \in A$ و هر $\psi \in \Psi_A$ داریم $|\psi(f)| \leq \|f\|$ و لذا به ازای هر n، $|\psi(f)| = |\psi(f^n)|^{\frac{1}{n}} \leq \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$. بنابراین $\|\hat{f}\|_{\Psi_A} \leq \lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$. چون بنابر فرض (ب) $\lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}} = \|f\|_X$ پس $\|\hat{f}\|_{\Psi_A} \leq \|f\|_X$. حال اگر $f \in B$ آنگاه دنباله‌ای مانند $\{f_n\}$ از اعضای A وجود دارد که $\|f_n - f\|_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. درنتیجه به ازای هر $\psi \in \Psi_A$،

$$|\psi(f_n) - \psi(f_m)| = |\psi(f_n - f_m)| \leq \|f_n - f_m\|_X \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

لذا $\lim_{n\to\infty} \psi(f_n)$ موجود است و می‌توان نشان داد که اگر دنبالهٔ $\{g_n\}$ نیز در شرط $\|g_n - f\|_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ صدق کند $\lim_{n\to\infty} \psi(g_n) = \lim_{n\to\infty} \psi(f_n)$. پس $\psi(f) = \lim_{n\to\infty} \psi(f_n)$ خوش‌تعریف است. از طرفی ψ بر B خطی و ضربی است و چون ناصفر است پس $\psi \in \Phi_B = \Psi_B$. چون B بنابر (الف) طبیعی است پس عضوی از X مانند x یافت می‌شود به‌طوری‌که برB داریم $\psi = \varepsilon_x$. لذا بر A نیز $\psi = \varepsilon_x$، یعنی ψ همریختی مقداری است و در نتیجه A طبیعی است. $\square$

۱۵.۳.۱ تعریف. فرض کنیم $X \subseteq \mathbb{C}^n$ فشرده باشد. غلاف محدب چندجمله‌ای X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{hull}(X) = \hat{X} = \{\lambda \in \mathbb{C}^n : |p(\lambda)| \leq \|p\|_X \quad \text{برای هر چندجمله‌ای } p\}.$$

مجموعهٔ X را محدب چندجمله‌ای گوییم هرگاه $X = \hat{X}$.

در حالت خاص غلاف محدب چندجمله‌ای مجموعهٔ فشردهٔX از صفحه مختلط برابر است با مکمل مؤلفه بی‌کران $\mathbb{C}\backslash X$، که با $\hat{X}$ نشان می‌دهیم. مرز $\hat{X}$ را مرز بیرونی X گویند.

۱۶.۳.۱ قضیه. [12, Lemma II.1.3]زیرمجموعهٔ فشرده X از $\mathbb{C}$ محدب چندجمله‌ای است اگروتنها اگر $\mathbb{C}\backslash X$ همبند باشد.

۴.۱ جبرهای یکنواخت استانده

اکنون تعاریفی از جبرهای یکنواخت $P(X)$، $R(X)$ و $A(X)$ بر مجموعهٔ فشردهٔX از صفحه مختلط $\mathbb{C}$ و تعدادی نتیجهٔ متعارف دربارهٔ این جبرها ارائه می‌دهیم. برای جزئیات بیشتر به [6]، [12]، [19] مراجعه شود.

۱.۴.۱ تعریف. فرض کنیم $P_o(X)$ جبر توابع چندجمله‌ای بر X و $R_o(X)$ جبر توابع گویا با قطب‌های خارج از X باشد. لذا $P_o(X)$ و $R_o(X)$ زیرجبرهایی از $C(X)$ می‌باشند. بستار یکنواخت این زیرجبرها در $C(X)$ را به ترتیب با $P(X)$ و $R(X)$ نشان می‌دهیم و در نتیجه $P(X)$ و $R(X)$ جبرهای یکنواخت بر X هستند.