بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

كلك ١٤١٧

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی

تحت عنوان

تحلیل روش های تکراری برای حل دستگاه های فازی و روش های فوق تخفیف متوالی بلوکی برای حل مسائل کمترین مربعات دستگاه های فازی

استاد راهنما:

پرفسور محمد تقی درویشی

نگارنده:

عباس نظافتی

شهریور ماه ۱۳۸۹

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی

تحت عنوان

تحلیل روش های تکراری برای حل دستگاه های فازی و روش های فوق تخفیف متوالی بلوکی برای حل مسائل کمترین مربعات دستگاه های فازی

در تاریخ ۱۳۸۹/۶/۲۷ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصمیب نهایی رسید.

۱- استاد راهنما	دکتر محمد تقی درویشی	با مرتبه ی علمی استاد تمام
۲- استاد داور داخل	دکتر محمد جاویدی	با مرتبه ی علمی استادیار
۳- استاد داور خارج	دکتر محمد رضاپیغامی	با مرتبه ی علمی استادیار

ستایش و سپاس

حمد خدای را که طاعتش موجب رحمت است و به شکر اندرش مزید نعمت.

شکر وسپاس خدایی را که در این فصل زندگی ام توفیق تحصیل، بر من عنایت فرمود.

محبت های پدر و مادرم را که صمیمانه بر من ارزانی داشتند، سپاسگذارم و از همسرم که طی دوران تحصیل سختی های فراوانی را تحمل کرد، کمال تشکر و قدر دانی را دارم.

از استاد گرامی دکتر محمد تقی درویشی به خاطر راهنمایی های ارزشمندشان و دکتر کیوان امینی نهایت سپاس را دارم.

در آخر از همه دوستان عزیزی که در این را مرا یاری دادند تشکر می کنم از جمله آقایان ناصر عثمان پور، مسعود آهوخوش، هادی نصرتی پور، محمد نجفی، صبا احمدیان، قباد برمال زن و مهرزاد علیجانی و خانمها سمیه بهرامی، شادی امیری، رضایی و محمدی.

تقدیم به

همسرم، پدر و مادرم

چکیده

در بسیاری از علوم کاربردی مانند فیزیک، شیمی، مهندسی الکترونیک و ... نیاز شدیدی به حل دستگاه های معادلات فازی وجود دارد و گاهی نیز با دستگاه های معادلات فازی رو به رو می شویم که جواب ندارند ولی نیاز به یافتن یک جواب با معیاری مشخص وجود دارد.

وقتی با اعداد معمولی کار می کنیم و با دستگاه هایی با ابعاد بزرگ رو به رو می شویم روش های مستقیم را کنار می گذاریم و از روش های تکراری استفاده می کنیم بنابراین در این پایان نامه روش های تکراری برای دستگاه های فازی با ماتریس ضرایب اعداد معمولی ارائه کرده ایم و در مورد همگرایی روش ها نیز به بحث پرداخته ایم. برای این که بتوانیم از حساب اعداد معمولی استفاده کنیم دستگاه فازی را با یک دستگاه اعداد معمولی متناظر کرده ایم و اصول کار این پایان نامه تا پایان بر اساس این روش قرار گرفته است.

زمانی که با دستگاه هایی رو به رو هستیم که ماتریس ضرایب آن شامل اعداد معمولی از مرتبه $m \times n$ که $m > n$ و دستگاه ناساز گار است جوابی برای دستگاه وجود ندارد در این مواقع به دنبال جوابی برای دستگاه هستیم که دارای کمترین نرم با شد اما زمانی که متغیرها فازی هستند تعریف نرم به شکلی که برای اعداد معمولی وجود دارد قابل استفاده نیست به همین منظور در این پایان نامه برای اولین بار روشی برای هماهنگ سازی مسائل کمترین مربعات معمولی و فازی انجام گرفته است.

فصل اول پایان نامه را به برخی از تعاریف و قضایای مورد نیاز اختصاص داده ایم. فصل دوم مقدمه ای از اعداد فازی است و در فصل سوم روش های تکراری برای مسائل فازی آورده شده است و دو فصل آخر در مورد مسائل کمترین مربعات فازی و معمولی هستند.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

تعاریف و مقدمات

مقدمه

در این فصل، برخی از مفاهیم به کار رفته شده در این پایان نامه، ارائـه شـده اسـت. خواننـده محتـرم برای اطلاعات بیشتر در مورد این مفاهیم می تواند به منابع مراجعه نماید. در ضمن شرحی نیز از زنـدگی نامـه دکتر لطفعلی عسکرزاده آورده شده است.

لطفعلی عسکرزاده، مشهور به لطفی ع.زاده استاد دانـشگاه برکلـی در کالیفرنیـا و بنیـان گـذار نظریـه منطق فازی (Fuzzy logic) است. در بخش یاد کرد منابع اکثر متون فنی مربـوط بـه منطـق فـازی نـام او بـه صورت " L.A.Zadeh " ذکر می شود.

وی در سال ۱۹۲۱ میلادی در شهر باکو در جمهوری آذربایجان متولد شد. پـدرش روزنامـه نگـاری ایرانی و اهل اردبیل و مادرش اهل روسیه بود. وی تحصیلات ابتدایی و متوسطه را در تهران (دبیرستان البرز) و تحصیلات عالی را در دانشگاه تهران انجام داد.

لطفی زاده در امتحانات کنکور سراسری، مقام دوم را کسب نمود. در سال ۱۹۴۲ رشـته الکترونیـک دانشگاه تهران را با موفقیت به پایان رساند و در طی جنگ دوم جهانی بـرای ادامـه تحـصیل بـه دانـشگاه فنـی ماساچوست (ام.آی.تی) در آمریکا رفت و در سال ۱۹۴۶ درجه کارشناسی ارشد را در مهندسی برق دریافت کرد. در ام.آی.تی و دانشگاه کلمبیا ادامه تحصیل داد.

وی در دانشگاه کلمبیا با تدریس در زمینه " تئوری سیستم ها" کارش را آغاز کرد. سپس به تدریس در چند دانشگاه معتبر آمریکا پرداخت. در سال ۱۹۵۹ به برکلی رفت تـا بـه تـدریس الکترونیـک بپـردازد. از سال ۱۹۶۳ ابتدا در رشته الکترونیک و پس از آن در رشته علوم کامپیوتر کرسی استادی گرفت.

پرفسور لطفی زاده به طور رسمی از سال ۱۹۹۱ بازنشسته شده است، وی مقیم سانفرانسیسکو اسـت و در آنجا به پروفسور " زاده" مـشهور اسـت. پروفـسور لطفـی زاده دارای بیـست و پـنج دکتـرای افتخـاری از دانشگاه های معتبر دنیاست، بیش از دویست مقاله علمی را به تنهایی در کارنامه علمی خـود دارد و در هیئـت تحریریه پنجاه مجله علمی دنیا مقام " مشاور" را داراست. وی یکی از پژوهشگرانی است کـه دارای بیـشترین یادکرد (Highly_Cited) در مقالات علمی دنیا می باشد. با توجه به نقش منطـق فـازی در پیـشرفت هـای نظری و عملی علم، نام پرفسور زاده در کنار فیلسوفان تاریخ علم از جمله ارسـطو (بنیـان گـذار منطـق صـفرو یک) و افلاطون ثبت شده است.

۱-۱: تعاریف

تعریف ۱- ۱: ماتریس $A_{n\times n}$ را در نظر بگیرید. چند جمله ای $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ را چند جمله ای مشخصه ماتریس A گوییم که در آن λ یک متغیر مختلط است.

تعریف ۱- ۲: فرض کنیم $P(\lambda)$ چند جمله ای مشخصه ماتریس $A_{n\times n}$ باشدآن گاه ریشه های $P(\lambda)$ را مقادیر ویژه A می گویند. اگر λ مقدار ویژه ماتریس A باشد و بردار مخالف صفر x در دستگاه $(A-\lambda I)x=o$ صدق کند آن گاه بردار x را بردار ویژه ماتریس A می نامیم که نظیر مقدار ویژه λ است.

تعریف ۱- ۳: فرض کنید $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ باشند. شعاع طیفی ماتریس A را با $\rho(A)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\rho(A)=\max_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|$$

توجه: مجموعه کلیه مقادیر ویژه ماتریس مربعی A را طیف ماتریس A می گوییم و با $\sigma(A)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱- ۴: نرم برداری روی یک فضای برداری V تابعی است مانند $\|.\|:V\to R$ که دارای خواص زیر باشد:

۱) برای هر $x\in V$، $\|x\|\geq 0$،

۲) $x=o \quad \Leftrightarrow \quad \|x\|=0$،

۳) برای هر $\lambda\in R$ و هر $x\in V$، $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$،

۴) برای هر x و y متعلق به V، $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

توجه کنید که نرم های معروف در R^n به صورت زیر تعریف شده اند:

الف) نرم یک:

$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

ب) نرم ۲:

$$\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ج) نرم p که حالت کلی نرم یک و نرم دو است:

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i{}^p\right|\right)^{\frac{1}{p}}$$

د) نرم بی نهایت:

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

تعریف ۱- ۵: نرم ماتریسی یک تابع $\|.\|$ از $R^{m\times n}$ به مجموعه اعداد حقیقی نامنفی است در صورتی که خواص زیر را دارا باشد:

۱) برای هر ماتریس A، $\|A\|\ge 0$ و همچنین $\|A\|=0$ اگر و تنها اگر $A=o$،

۲) برای هر عدد حقیقی α: $\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$،

۳) برای هر دو ماتریس هم مرتبه A و B: $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$،

۴) برای ماتریس $A_{m\times n}$ و ماتریس $B_{n\times r}$: $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$.

نرم برداری $\|.\|$ و نرم ماتریسی $\|.\|'$ سازگار نامیده می شوند هر گاه برای هر بردار x و هر ماتریس A داشته باشیم:

$$\|Ax\|\le\|A\|'\|x\|$$

نرم ماتریسی را به صورت نرمی که وابسته به نرم برداری باشد به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|A\| = \sup_{x\ne o}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

که آن را نرم طبیعی نیز می نامیم.

نرم های معروف ماتریسی به صورت زیر هستند:

الف) نرم یک:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

ب) نرم بی نهایت:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

ج) نرم اقلیدسی:

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف ۱- ۶: اگر $A\in R^{n\times n}$ یک ماتریس نامنفرد باشد آن گاه عدد حالت آن عبارت است از

$$cond(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$$

و چون

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \le \|A\|\|A^{-1}\|$$

پس $cond(A) \ge 1$.

تعریف ۱- ۷: ماتریس A را غیر منفی می نامیم هر گاه همه درایه های آن غیر منفی باشند.

تعریف ۱- ۸: گیریم A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند. می گوییم $A \ge B$ هر گاه هر درایه ماتریس A از درایه نظیرش در ماتریس B بزرگتر یا مساوی باشد یا

$$\forall i, j \quad : a_{ij} \ge b_{ij}.$$

تعریف ۱- ۹: گوییم ماتریس غیر صفر A دارای رتبه r است هر گاه حداقل یکی از زیر دترمینان های مربع مرتبه r آن مخالف صفر باشد و هر زیر دترمینان مرتبه $(r+1)$اُم آن (در صورت وجود) صفر باشد. رتبه ماتریس A را با $rank(A)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱- ۱۰: هر گاه ماتریس A ماتریسی $n \times n$ با $rank(A) = n$ باشد، ماتریس A را تمام رتبه می نامیم و به طور مشابه هر گاه A ماتریسی $m \times n$ با $rank(A) = m$ باشد، ماتریس A را تمام رتبه سطری و هر گاه $rank(A) = n$ آن را تمام رتبه ستونی می نامیم.

تعریف ۱- ۱۱: ماتریس متقارن A یک ماتریس معین مثبت نامیده می شود اگر به ازای هر بردار $x \ne o$ داشته باشیم:

$$x^T Ax > 0$$

اگر $x^T Ax \ge 0$ باشد آن گاه A یک ماتریس معین نامنفی (نیمه معین مثبت) است.

هر ماتریس معین مثبت دارای ویژگی های زیر است:

۱) همواره مؤلفه های روی قطر اصلی مثبت هستند یعنی به ازای هر $i = 1,2,...,n$، $a_{ii} > 0$.

۲) $\det(A) \ne 0$.

۳) مقادیر ویژه A مثبت هستند.

۴) $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.(البته این خاصیت برای هر ماتریس مربعی برقرار است.)

۵) تمام زیر ماتریس های پیشرو A معین مثبت هستند.

۶) قدر مطلق هر مؤلفه ماتریس A از ماکسیم قدر مطلق مؤلفه های روی قطر اصلی کوچکتر یا مساوی هستند یعنی $\forall i, j = 1,2,...,n: \quad |a_{ij}| \le \max_{1\le i\le n} |a_{ii}|$.

۷) اگر $i_1 < i_2 < ..i_m$ و $j_1 < j_2 < ...j_m$ در این صورت ماتریس زیر معین مثبت است:

$$\begin{bmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_m} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_m,j_1} & a_{i_m,j_2} & \cdots & a_{i_m,j_m} \end{bmatrix}$$

تعریف ۱- ۱۲: یک ماتریس $A_{n\times n}$ ، قطر غالب ضعیف است هر گاه

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

به طوری که حداقل یکی از نامساوی های بالا به صورت اکید باشد یعنی حداقل برای یک مقدار i داشته باشیم

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

و اگر همه نامساوی ها به صورت اکید برقرار باشند ماتریس A را اکیداً قطر غالب گوییم.

تعریف ۱- ۱۳: ماتریس $A \in C^{n\times n}$ هرمیتی است اگر $A^H = A$ به طوری که $A^H = (A^*)^T$ و A^* مزدوج ماتریس A است و هنگامی که $A \in R^{n\times n}$ و $A = A^T$ ، در این صورت A را متقارن می گوییم.

تعریف ۱- ۱۴: فرض کنیم $A \in C^{m\times n}$ آن گاه فضای تولید شده توسط ستون های A را برد A گوییم و آن را با $R(A)$ نمایش می دهیم، به عبارت دیگر

$$R(A) = \{y \in C^m \mid Ax = y \,,\, x \in C^n\}.$$

تعریف ۱- ۱۵: مجموعه تمام xهایی که در دستگاه $Ax = o$ صدق می کنند فضای پوچ ماتریس A نامیده می شود و آن را با $N(A)$ نمایش می دهیم.

$$N(A) = \{x \in C^n \mid Ax = o\}$$

تعریف ۱- ۱۶: دستگاه $Ax = b$ را سازگار گوییم اگر رتبه A و ماتریس افزوده $(A:b)$ برابر باشد یعنی بتوان بردار b را به صورت یک ترکیب خطی از ستون های A نوشت. و دستگاه $Ax = b$ را ناسازگار گوییم هر گاه رتبه ماتریس افزوده $(A:b)$ بیشتر از رتبه ماتریس ضرایب A باشد، در این صورت نمی توان بردار b را به صورت هیچ ترکیب خطی از ستون های A نوشت.

تعریف ۱- ۱۷: روش های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی: دستگاه معادلات خطی زیر را که شامل n معادله و n مجهول است در نظر بگیرید

$$Ax = b \qquad (1-1)$$

که در آن A یک ماتریس $n\times n$ و b یک بردار n بعدی معلوم هستند و x یک بردار n بعدی مجهول است که به دنبال یافتن مقدار آن هستیم. این دستگاه جواب یکتا دارد اگر و تنها اگر ماتریس A نامنفرد باشد. فرض کنید که مولفه های روی قطر اصلی A، a_{ii}ها $(i=1,2,\ldots,n)$ همگی غیر صفر و اعداد حقیقی باشند، در غیر این صورت چون A نامنفرد است پس n سطر و ستون مستقل خطی دارد و با اعمال سطری مقدماتی می توان آن را به ماتریسی با مولفه های قطری غیر صفر تبدیل کرد.

یک روش تکراری برای حل این دستگاه با یک تقریب اولیه $x^{(0)}$ شروع می شود و دنباله ای از بردارها را به صورت $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ که به x همگرا است به وجود می آورد. در اکثر این روش ها دستگاه $(1-1)$ به دستگاه زیر تبدیل می شود:

$$x = Tx + c \qquad (1-2)$$

که در آن T یک ماتریس $n\times n$ است که ماتریس تکرار نامیده می شود و c یک بردار n بعدی است. فرض بر این است که هر دو دستگاه $(1-1)$ و $(1-2)$ دارای یک جواب یکتا هستند. بعد از این که بردار اولیه $x^{(0)}$ انتخاب شد دنباله بردارهای جواب تقریبی به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c \qquad , \quad k = 0,1,2,3,\ldots.$$

تعریف ۱- ۱۸: در تعریف ۱- ۱۷ تفکیک زیر را برای ماتریس A در نظر می گیریم:

$$A = D - A_L - A_U \qquad (1-3)$$

که در آن $D = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ یک ماتریس قطری از A و $-A_L$ ماتریس اکیداً پایین مثلثی شامل مولفه های زیر قطر اصلی ماتریس A و $-A_U$ ماتریس اکیداً بالا مثلثی شامل مولفه های بالای قطر اصلی ماتریس A هستند. با تجزیه فوق می توان رابطه $(1-1)$ را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}(D - A_L - A_U)x &= b\\ Dx &= (A_L + A_U)x + b\end{aligned}$$

چون A نامنفرد است، عناصر روی قطر D ناصفر بوده و D^{-1} موجود است لذا داریم:

$$x = D^{-1}(A_L + A_U)x + D^{-1}b$$

عبارت فوق یک فرم تکراری به صورت زیر دارد:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(A_L + A_U)x^{(k)} + D^{-1}b \qquad k = 0,1,2,\ldots \qquad (1-4)$$

طرح تکراری (۱-۴) برای تعیین جواب دستگاه (۱-۱) طرح تکراری ژاکوبی نامیده می شود و ماتریس $T = D^{-۱}\left(A_L + A_U\right)$ ماتریس ژاکوبی نامیده می شود.

تعریف ۱- ۱۹: ماتریس جایگشت $(Permutation\ matrix)$:ماتریس P را ماتریس جایگشت گوییم در صورتی که P از جا به جایی سطرهای یک ماتریس واحد به دست آمده باشد. توجه کنید که حاصل ضرب دو ماتریس جایگشت نیز یک ماتریس جایگشت است.

تعریف ۱- ۲۰: ماتریس $B_{n\times n}$، دوری ضعیف از مرتبه $p \geq ۱$ $(weakly\ \ p\_cyclic)$ نامیده می شود اگر یک ماتریس جایگشت $P_{n\times n}$ وجود داشته باشد که

$$PBP^T = \begin{pmatrix} o & o & \cdots & o & B_p \\ B_۱ & o & \cdots & o & o \\ o & B_۲ & \cdots & o & o \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ o & o & \cdots & B_{p-۱} & o \end{pmatrix}$$

به طوری که زیر ماتریس های قطری صفر، مربعی باشند و لزوماً مرتبه B_i ها یکسان نیست.

مثال ۱- ۱:الف) ماتریس

$$B = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ & ۲ & ۰ \\ -۵ & ۰ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۳ & ۹ & ۰ \end{pmatrix}$$

یک ماتریس ۲_دوری ضعیف است زیرا ماتریس جایگشت

$$P = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

موجود است که

$$PBP^T = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & -۵ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۹ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

در این حالت $B_۱ = \begin{pmatrix} -۱ & ۲ \\ -۳ & ۹ \end{pmatrix}$ و $B_۲ = \begin{pmatrix} -۵ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix}$.

ب) ماتریس

$$B=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۰ & ۶ \\ ۷ & -۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۰ & ۸ \\ -۱ & ۳ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

یک ماتریس ۳_دوری ضعیف است زیرا ماتریس جایگشت

$$P=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

موجود است که

$$PBP^T=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۴ \\ ۳ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۷ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸ & ۳ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

در این حالت $B_۱=\begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ -۲ & ۷ \end{pmatrix}$ و $B_۲=\begin{pmatrix} ۶ & ۳ \\ ۸ & ۳ \end{pmatrix}$ و $B_۳=\begin{pmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & -۴ \end{pmatrix}$.

تعریف ۱- ۲۱: اگر ماتریس تکرار ژاکوبی T برای ماتریس A دوری ضعیف از مرتبه $p \geq ۲$ باشد، در این صورت A، p_دوری (p_cyclic) نامیده می شود و ساختاری به شکل زیر می تواند داشته باشد:

$$A=\begin{pmatrix} A_{۱۱} & o & \cdots & o & A_{۱p} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} & \cdots & o & o \\ o & A_{۳۲} & \ddots & o & o \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ o & o & \cdots & A_{p,p-۱} & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

مثال ۱- ۲: ماتریس زیر را در نظر می گیریم