فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱.۱ : فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان حقیقی یا مختلط باشد و $\| \, . \, \| : X \longrightarrow F$ یک تابع باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in F$، در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\| \, x \, \| \geq \circ$ ؛

ب) $\| \, x \, \| = \circ$ اگر و تنها اگر $x = \circ$ ؛

پ) $\| \, \alpha \, x \, \| = | \, \alpha \, | \, \| \, x \, \|$ ؛

ت) $\| \, x + y \, \| \leq \| \, x \, \| + \| \, y \, \|$.

در این صورت $\| \, . \, \|$ را یک نرم روی X می‌نامیم و $(X \, , \, \| \, . \, \|)$ را یک فضای نرم‌دار گوییم. هر نرم در X، یک متر d به صورت $d(x,y) = \| \, x - y \, \|$ تعریف می‌کند که آن را متر تولید شده توسط نرم روی X می‌نامیم. بنابراین هر فضای نرم‌دار یک فضای متری است.

فضای نرم‌دار $(X \, , \, \| \, . \, \|)$ را یک فضای باناخ می‌گوییم، هرگاه تحت متر تولید شده توسط

نرم کامل باشد یعنی، هر دنباله‌ی کشی در آن همگرا باشد.

تذکر ۲.۱.۱ : در این رساله فضاهای برداری را روی میدان $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم، مگر آن‌که خلاف آن ذکر شود.

تعریف ۳.۱.۱ : فرض کنیم $(X \ , \ \| \ . \ \|_X)$ و $(Y \ , \ \| \ . \ \|_Y)$ دو فضای نرم‌دار باناخ باشند.

الف) $\| \ . \ \|_1 : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\| \ (x,y) \ \|_1 = \| \ x \ \|_X + \| \ y \ \|_Y$$

نشان خواهیم داد $((X \times Y) \ , \ \| \ . \ \|_1)$ یک فضای نرم‌دار باناخ است و آن را با $X \oplus_1 Y$ نمایش می‌دهیم.

ب) $\| \ . \ \|_\infty : \ X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\| \ (x,y) \ \|_\infty = \max \Big\{ \ \| \ x \ \|_X \ , \ \| \ y \ \|_Y \Big\}$$

نشان خواهیم داد $((X \times Y) \ , \ \| \ . \ \|_\infty)$ یک فضای نرم‌دار باناخ است و آن را با $X \oplus_\infty Y$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۴.۱.۱ : $X \oplus_1 Y$ و $X \oplus_\infty Y$ فضای نرم‌دار باناخ هستند.

اثبات: به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\| \ . \ \|_1$ و $\| \ . \ \|_\infty$ روی $X \times Y$ تابع نرم هستند. ثابت می‌کنیم $X \times Y$ تحت $\| \ . \ \|_1$ کامل است و با روش مشابه می‌توان ثابت کرد $X \times Y$ تحت $\| \ . \ \|_\infty$ نیز کامل است.

فرض کنیم (x_n, y_n) دنباله‌ای کشی در $X \times Y$ باشد یعنی،

$$\lim_{m,n\to\infty} \| (x_n, y_n) - (x_m, y_m) \|_1 = 0$$

$$\lim_{m,n\to\infty} \| (x_n - x_m , y_n - y_m) \|_1 = 0$$

با توجه به تعریف $\| . \|_1$ داریم:

$$\lim_{n,m\to\infty} \Big(\| x_n - x_m \|_X + \| y_n - y_m \|_Y \Big) = 0$$

هم‌چنین با توجه به نامنفی بودن تابع نرم، می‌توان نتیجه گرفت

$$\lim_{m,n\to\infty} \| x_n - x_m \|_X = 0 \qquad \text{و} \qquad \lim_{m,n\to\infty} \| y_n - y_m \|_Y = 0$$

دو رابطه‌ی بالا نشان می‌دهند (x_n) در X و (y_n) در Y کشی هستند. لذا $x \in X$ و $y \in Y$ وجود دارند، به قسمی که

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \|_X = 0 \qquad \text{و} \qquad \lim_{n\to\infty} \| y_n - y \|_Y = 0$$

از این‌جا می‌توان نوشت

$$\lim_{n\to\infty} \| (x_n, y_n) - (x, y)\|_1 = \lim_{n\to\infty} \| (x_n - x , y_n - y) \|_1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \| x_n - x \|_X + \lim_{n\to\infty} \| y_n - y \|_Y = 0$$

این تساوی نشان می‌دهد (x_n, y_n) به نقطه‌ی $(x, y) \in X \times Y$ همگرا است. بنابراین $X \times Y$ باناخ است. ■

تعریف ۵.۱.۱ : فرض کنیم C زیرمجموعه‌ی ناتهی از فضای نرم‌دار X باشد. به ازای هر $y \in X$، فاصله‌ی y از C را چنین تعریف می‌کنیم :

$$dist(y,C) = \inf \Big\{ \parallel x - y \parallel \ : \ x \in C \Big\}$$

تعریف ۶.۱.۱ : فرض کنیم C زیرمجموعه‌ی ناتهی از فضای نرم‌دار X باشد. به ازای هر $y \in X$، $P_C(y)$ را چنین تعریف می‌کنیم :

$$P_C(y) = \Big\{ \ x \ : \ x \in C \ \text{و} \parallel x - y \parallel = dist(y,C) \Big\}$$

اگر $P_C(y)$ تک عضوی باشد، C را یک مجموعه‌ی چبیشف می‌گوییم.

تعریف ۷.۱.۱ : فرض کنیم C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از فضای نرم‌دار X باشد. C را محدب گوییم، هرگاه به ازای هر $x,y \in C$ و هر $\alpha \in (0, 1)$ داشته باشیم $\alpha\, x + (1-\alpha)\, y \in C$.

تعریف ۸.۱.۱ : فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای نرم‌دار X باشد. یک ترکیب محدب از عناصر A، عنصری است مانند $b \in X$، به قسمی که

$$b = \Sigma_{i=1}^{n} t_i\, a_i \quad ; n \in \mathbb{N} \ \text{و} \ \forall i \in \mathbb{N} \ \ a_i \in A \ \ \text{و} \ \ t_i \in \mathbb{R} \text{و} \ \ \Sigma_{i=1}^{n} t_i = 1$$

مجموعه‌ی متشکل از تمام ترکیبات محدب از اعضای A را غلاف محدب A می‌نامیم و با $\mathrm{CO}(A)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱ : فرض کنیم K زیرمجموعه‌ای از فضای نرم‌دار X باشد. نگاشت $T : K \longrightarrow K$ را یک خودنگاشت نامنبسط گوییم، هرگاه به ازای هر x و $y \in K$، $\parallel T(x) - T(y) \parallel \leq \parallel x - y \parallel$.

تعریف ۱۰.۱.۱ : فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. عملگر خطی $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابعک خطی روی X گوییم. هرگاه f کران‌دار باشد، آن‌گاه f را یک تابعک خطی کران‌دار خوانیم.

مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی کران‌دار روی X را با X^* نشان می‌دهیم و آن را فضای دوگان X می‌نامیم.

X^* با نرم تعریف شده در زیر یک فضای باناخ است.

$$\| f \| = \sup \{ \, | f(x) | \, : \, x \in X \text{ و } \| x \| = ۱ \, \}$$

برای اثبات به[۱۷] رجوع شود. ■

قضیه ۱۱.۱.۱ قضیه‌ی (هان – باناخ) : فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و f یک تابعک خطی کران‌دار روی زیرفضای Z از X باشد. آن‌گاه تابعک خطی و کران‌دار $\tilde{f}$ روی X وجود دارد به طوری که برای هر $x \in Z$، $\tilde{f}(x) = f(x)$ و $\| \tilde{f} \|_X = \| f \|_Z$

اثبات: به مرجع[۱۷] رجوع شود. ■

قضیه ۱۲.۱.۱ : فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار، $x_\circ \in X$ و $x_\circ \neq \circ$ باشد. آن‌گاه تابعک خطی و کران‌دار $\tilde{f}$ روی X وجود دارد به قسمی که

$$\tilde{f}\,(x_\circ) = \| x_\circ \| \qquad \text{و} \qquad \| \tilde{f} \| = ۱$$

اثبات: فرض کنیم Z زیرفضای تولید شده توسط بردار $x_\circ$ باشد. آن‌گاه تابعک خطی f روی Z با ضابطه‌ی

$$f(x) = f(\alpha\, x_\circ) = \alpha \, \| x_\circ \| \qquad (۱)$$

کران‌دار با نرم ۱ $= \| f \|$ است. زیرا

$$| f(x) | = | f(\alpha x_\circ) | = | \alpha | \| x_\circ \| = \| \alpha x_\circ \| = \| x \|$$

از قضیه‌ی ۱.۱.۱۱ نتیجه می‌شود که f دارای توسیع خطی و کران‌دار از Z به X مانند $\tilde{f}$ است، به قسمی که $\| \tilde{f} \| = \| f \|$. اما $\| f \| = ۱$، پس $\| \tilde{f} \| = ۱$. به علاوه، از (۱) نتیجه می‌شود که $\tilde{f}(x_\circ) = f(x_\circ) = \| x_\circ \|$. ■

نکته ۱.۱.۱۳ : فرض کنیم X یک فضای برداری باشد که دو تابع نرم، $\| . \|_۱$ و $\| . \|_۲$ روی آن تعریف شده باشند. این دو نرم را معادل گوییم هرگاه اعداد حقیقی مثبت چون a و b وجود داشته باشند که برای هر $x \in X$، $a\| x \|_۲ < \| x \|_۱ < b\| x \|_۲$. همچنین فضای دوگان $(X, \| . \|_۱)$ و $(X, \| . \|_۲)$ یکی است. زیرا اگر تابعک خطی f متعلق به فضای دوگان $(X, \| . \|_۱)$ باشد، برای هر $x \in X$ داریم

$$| f(x) | \leq \| f \|_۱ \| x \|_۱ \leq b \| f \|_۱ \| x \|_۲$$

یعنی، f متعلق به فضای دوگان $(X, \| . \|_۲)$ نیز هست و به طریق مشابه بالا می‌توان نشان داد هر تابعک خطی چون g که متعلق به فضای دوگان $(X, \| . \|_۲)$ باشد متعلق به فضای دوگان $(X, \| . \|_۱)$ نیز هست. ■

تعریف ۱.۱.۱۴ : فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و X^{**} فضای دوگان X^* باشد. X^{**} را فضای دوگان مضاعف X می‌گوییم. نگاشت C از X به X^{**} را به صورت

$$\begin{aligned} C: \quad X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longrightarrow g_x \quad ; \quad g_x(f) = f(x) \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم.

فضای نرم‌دار X را انعکاسی گوییم، هرگاه نگاشت C پوشا باشد. فضاهای نرم‌دار با بعد متناهی، فضاهای هیلبرت و فضاهای l_P به ازای هر $1 < p < \infty$، انعکاسی هستند.

۲.۱ توپولوژی ضعیف

تعریف ۱.۲.۱ : فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و X^* فضای دوگان X باشد، آن‌گاه کوچک‌ترین توپولوژی روی X را به قسمی که هر $f \in X^*$ نسبت به آن توپولوژی پیوسته باقی بماند، توپولوژی ضعیف روی X می‌نامیم. این توپولوژی را با $w(X, X^*)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱ (همگرایی در توپولوژی ضعیف) : فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و (x_n) دنباله‌ای در این فضا باشد. (x_n) در فضای توپولوژی $w(X, X^*)$ به نقطه‌ی $x \in X$ همگراست، اگر و تنها اگر به ازای هر $f \in X^*$، $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ وقتی $n \to \infty$. در این صورت (x_n) را به x همگرای ضعیف می‌گوییم و می‌نویسیم $x = w - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ یا $x_n \xrightarrow{w} x$.

بدیهی است همگرایی قوی، همگرایی ضعیف را نتیجه می‌دهد اما عکس آن الزاماً درست نیست. هم‌چنین هر زیرمجموعه‌ی فضای نرم‌دار X، که در توپولوژی ضعیف بسته باشد، در توپولوژی نرم نیز بسته است. عکس این مطلب نیز الزاماً درست نیست.

قضیه ۳.۲.۱ : فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و C زیرمجموعه‌ای محدب و بسته (نسبت به توپولوژی نرم) از این فضا باشد. در این صورت C بسته ضعیف است.

اثبات: به مرجع [۵] رجوع شود. ■

قضیه ۴.۲.۱ : فرض کنیم M زیرمجموعه‌ای از فضای نرم‌دار X باشد که در توپولوژی ضعیف، فشرده است به عبارتی دیگر فشرده ضعیف است ،آن‌گاه هر دنباله در M زیردنباله‌ای دارد که به طور ضعیف به نقطه‌ای از M همگراست .

اثبات: به مرجع [۲] رجوع شود. ■

قضیه ۵.۲.۱ : فضای نرم‌دار X انعکاسی است اگر و تنها اگر $\mathcal{B}_X$ (گوی یکه بسته در فضای نرم‌دار X) فشرده ضعیف باشد.

اثبات: به مرجع [۲] رجوع شود. ■

قضیه ۶.۲.۱ : فضای نرم‌دار X انعکاسی است اگر و تنها اگر برای هر $f \in X^*$، $\mathcal{B}_X \longrightarrow \mathbb{R}$: $| f |$ در $\mathcal{B}_X$ به ماکسیمم خود برسد.

اثبات: به مرجع [۱۵] رجوع شود.

قضیه ۷.۲.۱ : فضای نرم‌دار X انعکاسی است اگر و تنها اگر فضای دوگان X ؛ یعنی، X^* انعکاسی باشد.

اثبات: به [۲] رجوع شود.

قضیه ۸.۲.۱ : فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و K زیرمجموعه ای فشرده ضعیف از این فضا باشد. در این صورت $\overline{\mathrm{CO}K}$ نیز فشرده ضعیف است.

اثبات: به [۲] رجوع شود.

فصل ۲

نگاشت‌های مرکزدار

۱.۲ معرفی نگاشت‌های نوع (J)

در این بخش به تعریف نگاشت نوع (J) خواهیم پرداخت. تعریف این نگاشت از نگاشت شبه نامنبسط الهام گرفته شده است اما در حالت کلی یک نگاشت نوع (J) الزاماً شبه نامنبسط نیست.

تعریف ۱.۱.۲ : فرض کنیم C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از فضای نرم‌دار X و نگاشت $T : C \longrightarrow X$ روی مجموعه‌ی C تعریف شده باشد. $y_\circ \in X$ را یک مرکز برای T گوییم، هرگاه برای هر $x \in C$، داشته باشیم $\| T(x) - y_\circ \| \leq \| x - y_\circ \|$. بدیهی است اگر $y_\circ \in C$، $T(y_\circ) = y_\circ$.

مثال ۲.۱.۲ : نگاشت $T : [\circ, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [\circ, 1]$ با ضابطه‌ی $T(x) = \sin(x)$ تعریف شده است. صفر، یک مرکز برای این نگاشت است.

با توجه به این‌که برای هر $x \in [\circ, \frac{\pi}{2}]$، $\sin(x) \leq x$. لذا

$$\| T(x) - \circ \| = | \sin(x) | \leq | x | = \| x \|$$

مثال ۳.۱.۲ : نگاشت $T : [1, 2] \longrightarrow [1, \frac{3}{2}]$ با ضابطه‌ی $T(x) = \frac{x+1}{2}$، را در نظر می‌گیریم. $y_\circ = \frac{1}{2}$، یک مرکز برای T است.

$$\| T(x) - \frac{1}{2} \| = | \frac{x}{2} | \leq | x - \frac{1}{2} | = \| x - \frac{1}{2} \| \quad ; \quad \forall x \in [1, 2]$$

به طور کلی می‌توان نشان داد برای هر $\alpha \leq 1$، $y_\circ = \alpha$ یک مرکز برای T است. در واقع برای $y_\circ = \alpha$ و هر $x \in [1, 2]$ داریم

$$\| T(x) - y_\circ \| = | \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \alpha | = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \alpha \leq x - \alpha = \| x - y_\circ \|$$

در ضمن می‌توان نتیجه گرفت، مرکز یک نگاشت منحصر به فرد نیست. ■

تعریف ۴.۱.۲ : فرض کنیم C یک زیرمجموعه‌ی فضای نرم‌دار X و نگاشت $T : C \longrightarrow X$ پیوسته باشد. T را نگاشت نوع (J) گوییم، هرگاه دارای حداقل یک مرکز در X باشد.

تعریف ۵.۱.۲ : نگاشت $T : C \longrightarrow X$ را شبه نامنبسط گوییم، هرگاه درصورت وجود نقطه ثابت برای T، آن نقطه یک مرکز برای T باشد.

مثال ۶.۱.۲ : نگاشت‌های تعریف شده در مثال‌های ۲.۱.۲ و ۳.۱.۲ هر دو شبه نامنبسط هستند.

گزاره ۷.۱.۲ : فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و C زیرمجموعه‌ی ناتهی آن باشد.هرگاه $T : C \longrightarrow X$ یک نگاشت نوع (J) باشد ؛ یعنی، مرکزی مانند $y_\circ$ در X داشته باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرارند.

الف) گیریم $r \in (0, 1)$ و I نگاشت همانی روی C باشد، آن‌گاه نگاشت $T_r : C \longrightarrow X$ که به صورت $T_r := rI + (1-r)T$ تعریف می‌شود، یک نگاشت نوع (J) است و y_0، مرکز T_r نیز هست.

ب) اگر C تحت T ناوردا باشد ؛یعنی، $T : C \longrightarrow C$ تعریف شود، آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $T^n : C \longrightarrow C$ یک نگاشت نوع (J) است و y_0، مرکز T^n نیز هست.

اثبات:

الف) نشان می‌دهیم y_0، مرکز T_r نیز هست. برای هر $x \in C$ داریم

$$T_r(x) = r(x) + (1-r)T(x)$$

لذا

$$\begin{aligned} \| T_r(x) - y_0 \| &= \| rx + (1-r)T(x) - y_0 \| \\ &= \| rx + (1-r)T(x) - ry_0 - (1-r)y_0 \| \\ &\leq r\| x - y_0 \| + (1-r)\| T(x) - y_0 \| \\ &\leq r\| x - y_0 \| + (1-r)\| x - y_0 \| = \| x - y_0 \|. \end{aligned}$$

در ضمن پیوستگی T_r، از پیوستگی T به راحتی نتیجه می‌شود.

ب) این گزاره را به استقراء ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $n = 2$، برای هر $x \in C$ داریم

$$\| T^2(x) - y_0 \| = \| T(T(x)) - y_0 \| \leq \| T(x) - y_0 \| \leq \| x - y_0 \|$$

یعنی، y_0 مرکز T^2 است. فرض کنیم این گزاره برای $n = k$ درست باشد ؛ یعنی،

$$\| T^k(x) - y_0 \| \leq \| x - y_0 \| \quad ; \quad \forall x \in C$$

حال برای $n = k + 1$ خواهیم داشت

$$\| T^{k+1}(x) - y_0 \| = \| T^k(T(x)) - y_0 \| \leq \|T(x) - y_0 \| \leq \| x - y_0 \|$$

پس این گزاره برای هر n دلخواه، صحیح است.

هم‌چنین پیوستگی T^n، از پیوستگی T نتیجه می‌شود. ■

تعریف ۸.۱.۲ : نگاشت $T : C \longrightarrow X$ را نگاشت لیپ‌شیتس[1] از درجه‌ی n، می‌گوییم، اگر $n \in \mathbb{N}$ و $K > 0$ وجود داشته باشد، به قسمی که برای هر $x, y \in C$، $\| T(x) - T(y) \| \leq K \| x - y \|^n$.

مثال ۹.۱.۲ : نگاشت $T : [\frac{1}{2}, 2] \longrightarrow [\frac{1}{2}, 2]$ با ضابطه‌ی $T(x) = \frac{1}{x}$، یک نگاشت لیپ‌شیتس از درجه‌ی ۱ است.

$$\| T(x) - T(y) \| = | \frac{1}{x} - \frac{1}{y} | = \frac{1}{xy} | x - y | \leq 4 \| x - y \|$$

تنها نقطه ثابت این نگاشت، $x = 1$ است. این نقطه مرکز T نیست زیرا برای هر $x \in [\frac{1}{2}, 1)$

$$\| T(x) - 1 \| = | \frac{1}{x} - 1 | = \frac{1}{x} | 1 - x | > | x - 1 |$$

می‌توان نشان داد، این نگاشت هیچ مرکزی ندارد.

به ازای هر $2 \geq y_0$ و $x = 2$ داریم

$$\| T(x) - y_0 \| = | \frac{1}{2} - y_0 | = y_0 - \frac{1}{2} > y_0 - 2 = \| x - y_0 \|$$

و برای هر $y_0 < 2$ و $x = \frac{1}{2}$ داریم

$$\| T(x) - y_0 \| = | 2 - y_0 | = 2 - y_0 > \frac{1}{2} - y_0 = \| x - y_0 \|$$

بنابراین هر نگاشت لیپ‌شیتس، الزاماً نگاشت نوع (J) نیست. ■

[1] Lipschitzian mapping

مثال ۱۰.۱.۲ : نگاشت $T_n : [۰, ۱] \longrightarrow [۰, ۱]$ با ضابطه‌ی $T_n(x) = x^n$، یک نگاشت نوع (J) است.

$y_۰ = ۰$ یک مرکز برای T_n است زیرا برای هر $x \in [۰, ۱]$

$$\parallel T_n(x) - y_۰ \parallel = \mid x^n \mid \leq \mid x \mid = \parallel x - y_۰ \parallel$$

نقاط ثابت این نگاشت $y_۱ = ۱$ و $y_۰ = ۰$ هستند که $y_۰$ مرکز نگاشت اما $y_۱$ مرکز نیست زیرا برای هر $x \in (۰, ۱)$ داریم

$$\parallel T_n(x) - y_۱ \parallel = \mid x^n - ۱ \mid = ۱ - x^n > ۱ - x = \mid x - ۱ \mid = \parallel x - y_۱ \parallel$$

پس T_n، شبه نامنبسط نیست، زیرا نقطه ثابتی ($y_۱ = ۱$) دارد که مرکز نیست. ضمناً برای $n \geq ۲$، T_n نامنبسط نیست. کافی است $y = ۱$ و $x \in (۰, ۱)$ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت

$$\parallel T_n(x) - T_n(y) \parallel = \mid x^n - ۱ \mid = ۱ - x^n > ۱ - x = \parallel x - y \parallel$$

این مثال نشان می‌دهد که هرنگاشت نوع (J) ، الزاماً شبه نامنبسط یا نامنبسط نیست. ■

مثال ۱۱.۱.۲ : نگاشت $T : [۰, ۱] \longrightarrow [۰, ۱]$ با ضابطه‌ی $T(x) = \sqrt{x}$، یک نگاشت نوع (J) است.

این نگاشت دو نقطه ثابت $y_۱ = ۱$ و $y_۰ = ۰$ دارد. $y_۱$ مرکز نگاشت است اما $y_۰$ مرکز نیست.

$$\parallel T(x) - y_۱ \parallel = \mid \sqrt{x} - ۱ \mid = ۱ - \sqrt{x} \leq ۱ - x = \parallel x - y_۱ \parallel \quad , \quad \forall x \in [۰, ۱]$$

$$\parallel T(x) - y_۰ \parallel = \mid \sqrt{x} - ۰ \mid = \sqrt{x} > x = \parallel x - ۰ \parallel \quad , \quad \forall x \in (۰, ۱)$$

پس نگاشت T، شبه نامنبسط نیست. در ادامه نشان می‌دهیم T، لیپ‌شیتس نیز نیست، که این مطلب را با استفاده از برهان خلف اثبات می‌کنیم.

گیریم T، لیپ‌شیتس باشد، بنابراین $n \in \mathbb{N}$ و $K > 0$ وجود دارند که برای هر $x, y \in [0, 1]$، $\| T(x) - T(y) \| \leq K \| x - y \|^n$. اگر در نامساوی اخیر $x = 0$ و $y = \frac{1}{m^2}$ قرار داده شود، نامساوی $\frac{1}{m} \leq K(\frac{1}{m^{2n}})$ به دست می‌آید. به عبارتی $m^{2n-1} \leq K$. حال m را چنان بزرگ اختیار می‌کنیم که $2K < m^{2n-1}$ که یک تناقض است.

و همین‌جا می‌توان نتیجه گرفت یک نگاشت نوع (J)، الزاماً لیپ‌شیتس نیست. ■

مثال ۱۲.۱.۲ : نگاشت $T : l^\infty \longrightarrow l^\infty$ با ضابطه‌ی

$$T(x) = y \quad ; \quad y_i = \frac{x_i}{i} \qquad \forall x \in l^\infty$$

تعریف شده است. این نگاشت، یک نگاشت نوع (J) است.

ابتدا نشان می‌دهیم این نگاشت نامنبسط است. برای هر $x, y \in l^\infty$ داریم

$$\| T(x) - T(y) \| = \sup_{i \in \mathbb{N}} | \frac{x_i - y_i}{i} | \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} | x_i - y_i | = \| x - y \|$$

به علاوه این نگاشت تعداد نامتناهی نقطه ثابت دارد. در واقع برای هر $x \in l^\infty$، که برای هر $i > 1$، $x_i = 0$ باشد، داریم $T(x) = x$.

واضح است هر نقطه ثابت این نگاشت، یک مرکز نگاشت است.

مثال ۱۳.۱.۲ : نگاشت $T : C[0, 1] \longrightarrow C[0, 1]$ با ضابطه‌ی

$$T(x)(t) = \int_0^t x(s) ds \quad ; \quad \forall x \in C[0, 1]$$

تعریف شده است. این نگاشت، یک نگاشت نوع (J) است.

نشان می‌دهیم $y_\circ = \circ$ یک مرکز و یک نقطه ثابت برای T است.

$$\| T(x) - y_\circ \| = \| T(x) \| = \sup_{t\in[\circ,1]} | T(x)(t) | \quad ; \quad (1)$$

از سوی دیگر

$$| T(x)(t) | = | \int_\circ^t x(s)ds | \leq \int_\circ^t | x(s) | ds \leq t \| x \| \leq \| x \|$$

لذا

$$\sup_{t\in[\circ,1]} | T(x)(t) | \leq \| x \| \quad ; \quad (2)$$

از (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت

$$\| T(x) - y_\circ \| \leq \| x \| = \| x - y_\circ \|$$

پس $y_\circ = \circ$ مرکز T در $C[\circ,1]$ است. T در $C[\circ,1]$ نقطه ثابت دیگری ندارد. برای نشان دادن این واقعیت فرض می‌کنیم $y_\circ \neq \circ$ نقطه ثابت دیگری از این نگاشت باشد ؛ یعنی، $T(y) = y$.

$$y(t) = \int_\circ^t y(s)ds \qquad (1)$$

با توجه به (۱) و بنا به قضیه‌ی اصلی حساب دیفرانسیل داریم

$$y'(t) = y(t) \quad ; \quad \forall t \in [\circ, 1] \qquad (2)$$

(۲) نتیجه می‌دهد $y(t) = e^{t+c}$ $(c \in \mathbb{R})$. بنابراین $y(\circ) = e^c$. از سوی دیگر بنا به (۱)، $y(\circ) = \circ$ و این تناقض است. ■

مثال ۱۴.۱.۲ : نگاشت T را روی B_{c_0} گوی یکه‌ی بسته در فضای c_0 (فضای دنباله‌های همگرا به صفر) چنین تعریف می‌کنیم :

$$T(x) = (x_1, x_2, \ldots) = (1, x_1, x_2, \ldots)$$

T یک نگاشت نوع (J) است.

ابتدا نشان می‌دهیم T، نامنبسط است و از نامنبسط بودن T، پیوستگی آن را نتیجه می‌گیریم.

$$\| T(x) - T(y) \| = \sup_{i \in \mathbb{N}} | x_i - y_i | = \| x - y \|$$

حال نشان می‌دهیم T، در c_0 مرکز دارد. گیریم $y_0 = 2e_1$ و $x \in B_{c_0}$، در این صورت:

$$\| T(x) - y_0 \| = \| (-1, x_1, x_2, \ldots) \| = \max\{ 1, \| x \| \}$$

با توجه به این‌که $x \in B_{c_0}$ و $\| x \| \leq 1$، $\| T(x) - y_0 \| = 1$.

رابطه‌ی زیر نشان می‌دهد $y_0 = 2e_1$ مرکز T است.

$$\| x - y_0 \| \geq \| y_0 \| - \| x \| \geq 2 - 1 = 1 = \| T(x) - y_0 \|$$

T، در c_0 نقطه ثابت ندارد زیرا $T(x) = x$، ایجاب می‌کند $x_i = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$ که بدیهی است دنباله ثابت $x_n = 1$ به c_0 تعلق ندارد. ■

مثال ۱۵.۱.۲ : نگاشت $T : [\frac{1}{3\pi}, \frac{3}{\pi}] \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $T(x) = \frac{x}{2} \sin \frac{1}{x}$ تعریف شده است. این نگاشت، یک نگاشت نوع (J) است.

واضح است که T بر مجموعه‌ی داده شده پیوسته است. نشان می‌دهیم $y_0 = 0$ مرکز این

نگاشت است.

$$\| T(x) - y_\circ \| = | \frac{x}{۲} \sin \frac{۱}{x} | \leq | \frac{x}{۲} | < | x | = \| x - \circ \|$$

در ضمن برای $x = \frac{۲}{۳\pi}$ و $y = \frac{۱}{۲\pi}$ داریم

$$\| T(x) - T(y) \| = | \frac{۱}{۳\pi} | > | \frac{۱}{٦\pi} | = | \frac{۲}{۳\pi} - \frac{۱}{۲\pi} | = \| x - y \|$$

بنابراین T، نامنبسط نیست. هم‌چنین T، نقطه ثابت ندارد، زیرا $T(x) = x$ ایجاب می‌کند $x = \circ$ یا $\sin \frac{۱}{x} = ۲$. ■

تعریف ۱٦.۱.۲ : فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و C زیرمجموعه‌ای از آن باشد. نگاشت $T : C \longrightarrow X$ را یک نگاشت (ACN)[۲] گوییم، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $x_۱, x_۲, \ldots x_n, y \in C$ داشته باشیم

$$\| \sum_{i=۱}^{n} \frac{(-۱)^{i+۱}}{n} T(x_i) - T(y) \| \leq \| \sum_{i=۱}^{n} \frac{(-۱)^{i+۱}}{n} x_i - y \|$$

بدیهی است یک نگاشت ACN ، نامنبسط نیز هست. کافی است $n = ۱$ اختیار شود. البته عکس این مطلب برقرار نیست.

مثال ۱۷.۱.۲ : $T : [\circ, ۱] \longrightarrow [\circ, ۱]$ با ضابطه‌ی $T(x) = \frac{۱}{۲}(x + ۱)$، نامنبسط است اما ACN نیست.

T نامنبسط است زیرا $\| T(x) - T(y) \| = \frac{۱}{۲} \| x - y \|$.

اگر $n = ۳$، $y = \circ$، $x_۳ = ۱$، $x_۲ = \frac{۱}{۲}$ و $x_۱ = \circ$ اختیار شوند، خواهیم داشت

$$\| \sum_{i=۱}^{۳} \frac{(-۱)^{i+۱}}{۳} T(x_i) - T(y) \| = \frac{۱}{۲} > \| \sum_{i=۱}^{۳} \frac{(-۱)^{i+۱}}{۳} x_i - y \| = \frac{۱}{۳}$$

[۲] alternate convexically nonexpansive

که نامساوی بالا نشان می‌دهد T، ACN نیست. اما نگاشت نوع (J) هست زیرا $y = ۱$ یک مرکز برای آن است.

$$\| T(x) - ۱ \| = | \frac{x}{۲} - \frac{۱}{۲} | = \frac{۱}{۲} \| x - ۱ \| \leq \| x - ۱ \|$$

■

در قسمت بعد نشان می‌دهیم هر نگاشت ACN، یک نگاشت نوع (J) است و با توجه به مثال ۱۷.۱.۲، مجموعه نگاشت‌های ACN روی یک زیرمجموعه از فضای نرم‌دار، زیرمجموعه‌ی سره‌ی نگاشت‌های نوع (J) هستند.

ابتدا به بیان و اثبات گزاره‌هایی می‌پردازیم که در اثبات قضیه‌ی ۲۱.۱.۲ به آن‌ها نیاز داریم.

گزاره ۱۸.۱.۲ : فرض کنیم C زیرمجموعه‌ی محدب، بسته و کران‌دار فضای باناخ X بوده و $T : C \longrightarrow C$ یک نگاشت نامنبسط باشد. در این صورت دنباله‌ای چون (x_n) از اعضای C وجود دارد، به طوری که

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+۱} - x_n) = ۰ \qquad \text{و نیز} \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n - T(x_n)) = ۰$$

اثبات: $z \in C$ را ثابت می‌گیریم و برای هر $n \in \mathbb{N}$، نگاشت $f_n : C \longrightarrow C$ را به صورت $f_n(x) = \frac{z}{n} + (۱ - \frac{۱}{n})T(x)$ تعریف می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\| f_n(x) - f_n(y) \| = (۱ - \frac{۱}{n}) \| T(x) - T(y) \| \leq (۱ - \frac{۱}{n}) \| x - y \|$$

نامساوی بالا نشان می‌دهد f_n روی C یک انقباض است و از آن‌جا که C کامل است، بنا به اصل انقباض باناخ، دارای نقطه ثابتی در C است که آن را x_n می‌نامیم. لذا برای هر $n \in \mathbb{N}$،