به نام خدا

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

عنوان پایان نامه:

رهیافتهای نو برای حل رده ای از مسائل بهینه سازی غیرخطی ناهموار

مولف:

اسداله محمودزاده وزیری

ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات جهت اخذ درجه دکتری در رشته ریاضی کاربردی

استاد راهنما

دکتر علی وحیدیان کامیاد

اساتید مشاور:

دکتر محمد هادی فراهی- دکتر سهراب عفتی

آبان ماه ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

به نام خدا

فصل اول

مقدمه و مفاهیم اولیه

۱-۱ تقریب توابع هموار و ناهموار

بهینه‌سازی یک اصل زیربنایی است که در تحلیل بسیاری از مسائل پیچیده تصمیم‌گیری بکار برده می‌شود. با استفاده از بهینه‌سازی می‌توان یک مسأله پیچیده تصمیم‌گیری را با در نظرگرفتن یک هدف مشخص که جهت اندازه‌گیری و سنجش کمی و کیفی تصمیم مطرح می شود بررسی نمود. این هدف با توجه به قیودی که بر مقدار بهینه متغیرهای تصمیم‌گیری تأثیرگذار است ماکزیمم یا مینیمم می‌شود. به عنوان نمونه‌هایی از مسائل بهینه سازی می‌توان به مسائل برنامه‌ریزی‌خطی، بهینه‌سازی نامقید و برنامه‌ریزی غیرخطی اشاره نمود. برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید و برنامه‌ریزی غیرخطی روشهای تحلیلی و تقریبی گوناگونی وجود دارد (برای آشنائی با این روشها می توان به مرجع [۱۳] مراجعه نمود.)

برخی روشهای بهینه‌سازی مبتنی بر محاسبه مشتق توابع غیرخطی می‌باشند و اگر حداقل یکی از توابع موجود در مسأله مشتق‌پذیر نباشد نمی‌توان این روشها را به کار برد. در این رساله برای اینگونه مسائل مفهوم جدیدی بنام دیفرانسیل ضعیف سراسری برای توابع ناهموار معرفی شده است. با استفاده از این مفهوم می‌توان توابع ناهموار را با توابع قطعه‌ای خطی تقریب نمود. با انجام این عمل مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی با دسته‌ای از مسائل برنامه‌ریزی خطی تقریب می‌شود. برای رسیدن به این هدف ناحیه شدنی مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی را افراز می‌کنیم. روی هریک از زیرنواحی این افراز تقریب خطی پارامتری را برای توابع غیرخطی در نظر می‌گیریم. ازحل این دسته از مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌توان تقریبی برای جواب بهینه مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی به دست آورد. در بسیاری از روشهای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید حتی در صورت وجود مشتق نمی‌توان با اطمینان بهینه سراسری بودن جواب بدست آمده را تضمین نمود. به علاوه اگر بخواهیم یک جواب تقریبی برای مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی با دقت مطلوب بیابیم نمی‌توانیم تعداد تکرارهای لازم برای رسیدن به دقت مطلوب را برآورد کنیم. در رهیافت ارائه شده در این رساله ابتدا افراز متناظر با خطای مطلوب برای ناحیه شدنی به دست آورده می شود سپس روی هریک از زیر نواحی این افراز توابع غیرخطی با توابع خطی پارامتری تقریب می گردند. با این عمل مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی با دسته‌ای از مسائل برنامه‌ریزی خطی تقریب می‌شود. از حل

این دسته از مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌توانیم تقریبی برای جواب بهینه سراسری مسأله بهینه‌سازی غیرخطی با دقت مطلوب بیا بیم.

۱-۲ تاریخچه ای بر بهینه سازی غیرخطی

تا آنجائیکه می‌دانیم کتاب "عناصر"[۱] اقلیدس[۲] اولین کتاب درسی ریاضیات در تاریخ بشر است. این کتاب شامل نمونه‌هائی از مسائل بهینه‌سازی است. یافتن یک روش برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی تا گسترش حساب دیفرانسیل و انتگرال[۳] به تعویق افتاد.

اولین این روشها منسوب به فرما[۴] (۱۶۶۵-۱۶۰۱) است. به دلیل کارهایی که او انجام داده است لاگرانژ[۵] (۱۸۱۳-۱۷۳۶) او را به عنوان مخترع حساب دیفرانسیل و انتگرال معرفی کرده است. شهرت لاگرانژ به دلیل گسترش روش فرما برای حل مسائل بهینه‌سازی مقید (قیود تساوی) می‌باشد. او این کارها را با معرفی تابعی که امروزه آن را لاگرانژین[۶] می‌نامند و کاربرد روش فرما برای تابع لاگرانژین انجام داد.

اسحاق نیوتن[۷] برای حل دستگاه معادلات غیرخطی یک الگوریتم ارائه نمود. در مقایسه با روشهای فرما و لاگرانژین این اولین الگوریتم برای حل مسائل بهینه‌سازی است. نکته جالب توجه در ارتباط با الگوریتم نیوتن این است که حتی امروزه این الگوریتم به طور گسترده در حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی مورد استفاده ومطالعه قرار می‌گیرد. الگوریتم های زیادی از جمله "الگوریتم های نقطه درونی"[۸] از الگوریتم نیوتن به عنوان موتور حرکت خود استفاده می کنند.

[۱] Elements
[۲] Euclid's
[۳] Calculus
[۴] Fermat
[۵] Lagrange
[۶] Lagrangian
[۷] Issak Newton
[۸] Interior point Algorithms

وجود جواب برای یک مسأله بهینه‌سازی غیرخطی سوألی بدون پاسخ بود تا اینکه وایرشتراس[۹](۱۸۹۷-۱۸۱۵) نتیجه مهمی را اثبات نمود. این قضیه یک شرط کافی عملی برای وجود جوابهای بهینه را بیان نمود.

برای یافتن کمینه موضعی یک مسأله کمینه‌سازی نامقید روشهای مؤثر زیادی وجود دارد. به عنوان نمونه‌ای از این روشها می‌توان روش شدیدترین کاهش[۱۰]، روش نیوتن[۱۱]، روش شبه نیوتن[۱۲]، روش ناحیه قابل اعتماد[۱۳] و روش مزدوج گرادیان[۱۴] را در نظر گرفت.

به دو دلیل عمده زیر برای بهینه‌سازی سراسری روشهای مؤثر کمتری وجود دارد:

الف) چگونه می‌توان از یک مینیمم موضعی به مینیمم بهتری رسید.

ب) چگونه می‌توان تعیین کرد که مینیمم به دست آمده مینیمم سراسری است.

بهینه‌سازی سراسری یک موضوع مهم در زمینه‌های تحقیقاتی و مهندسی است. روشهایی که قبلاً برای یافتن کمینه سراسری تابع هدف در نظر گرفته شده‌اند به ایده‌های تحقیقاتی جدیدی منجر شده‌اند. به عنوان نمونه‌ای از این ایده ها می‌توان ایده کاهش سراسری[۱۵]، ایده‌های بازه‌ای[۱۶]، الگوریتم ژنتیک[۱۷] ، روشهای تکمیل‌یابی[۱۸] را نام برد.

در حالت کلی حل مسائل بهینه‌سازی ناهموار دشوار است ولی برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید الگوریتم های قدرتمند و قابل اعتمادی وجود دارند. مرکز تحلیلی صفحات برش[۱۹] و روشهای دسته‌ای[۲۰] نمونه‌هایی از این

[۹] Karl Weierstrass
[۱۰] Steepest Descent Method
[۱۱] Newton Method
[۱۲] Quasi Newton Method
[۱۳] Trust Region Method
[۱۴] Conjugate Gradient Method
[۱۵] Global Descent Idea
[۱۶] Interval Idea
[۱۷] Genetic Algorithm
[۱۸] Filled Function Method
[۱۹] Analytic Center Cutting Planes

الگوریتم‌ها می‌باشند. رهیافت عمومی برای حل مسائل مقید، حل مسأله نامقید معادل همراه با یک جریمه دقیق تابع هدف یا تابع بهبود دهنده است. برای اجتناب از استفاده از توابع جریمه روشهای صافی[۲۱] جایگزین خوبی می باشند.

علاوه بر روشهای بالا روشهایی مبتنی بر خطی‌سازی برای حل رده‌های خاصی از مسائل بهینه‌سازی غیر خطی وجود دارند. شرالی[۲۲] و همکاران با استفاده از تکنیک خطی سازی- فرموله کردن مجدد[۲۳] در[۲۸] مسائل برنامه-ریزی چندجمله‌ای[۲۴] و در [۲۷] مسائل برنامه‌ریزی نیمه نامتناهی[۲۵] را حل کرده اند. کو[۲۶] و همکاران با استفاده از تخفیف خطی‌سازی پارامتری[۲۷] در [۲۲] الگوریتمی برای بهینه سراسری و در [۲۳] الگوریتمی برای بهینه سراسری برنامه‌ریزی هندسی کلی[۲۸] ارائه داده‌اند. شن[۲۹] در [۲۶] با استفاده از روش خطی‌سازی ، بهینه سراسری برنامه‌ریزی هندسی کلی را بدست آورده است. ژانگ [۳۰] با استفاده از تقریب قطعه‌ای خطی در [۳۲] جواب بهینه سراسری قیود خطی را بدست آورده است. هنسن[۳۱] و همکاران در [۱۰] روشی برای برنامه‌ریزی صفر و یک نامقید درجه دوم ارائه کرده‌اند.

در این رساله ما به کمک رهیافت خطی‌سازی پارامتری مسائل بهینه‌سازی غیرخطی را حل می کنیم. نکته اساسی در رهیافت ارائه شده این است که در مسائل بهینه‌سازی نامقید علاوه بر یافتن جواب بهینه سراسری مسأله بهینه‌سازی غیرخطی بطور تقریبی می‌توانیم این جواب را با هر دقت از پیش تعیین شده‌ای به دست آوریم. همانگونه که در بالا توضیح داده‌ایم تعیین جواب بهینه سراسری برای مسائل بهینه‌سازی غیرخطی مقید کار

---

[۲۰] Bundle Methods
[۲۱] The Filter Strategy
[۲۲] Hanif D. Sherali
[۲۳] Reformulation-Linearization Technique
[۲۴] Polynomial Programming Problems
[۲۵] Semi-Infinite
[۲۶] Shaojian Qu
[۲۷] Parametric Linearization Relaxation
[۲۸] Generalized Geometric Programming
[۲۹] Peiping Shen
[۳۰] Hao Zhang
[۳۱] Pierre Hansen

دشواری است ولی در این رساله با استفاده از رهیافت خطی‌سازی پارامتری جواب بهینه سراسری این مسائل را به دست می‌آوریم. در فصل آخر رساله فرآیند خطی‌سازی پارامتری برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی صفر و یک به کار برده می‌شود. به علاوه در این رساله با معرفی مفهوم دیفرانسیل ضعیف سراسری فرآیند خطی-سازی پارامتری را برای مسائل بهینه‌سازی ناهموار به کار می‌بریم.

۱–۳ ساماندهی رساله

در بخش بعدی برخی مفاهیم ریاضی را مرور خواهیم کرد که در سراسر این رساله مورد استفاده قرار خواهندگرفت. این مفاهیم به درک عمیق‌تر مباحث ریاضی مانند جوابهای بهینه موضعی و سراسری یک مسأله بهینه‌سازی و شرائط لازم وکافی برای وجود چنین جوابهایی منجر می‌گردند. به علاوه نگاهی گذراً به برخی مفاهیم آنالیز ریاضی که در رساله مورد استفاده قرار گرفته‌اند داریم.

در فصل دوم فرآیند خطی‌سازی پارامتری را برای تقریب توابع غیرخطی هموار شرح می‌دهیم و قضایای همگرائی آن را اثبات می‌کنیم. در ادامه فصل با معرفی مفهوم دیفرانسیل ضعیف سراسری فرآیند خطی‌سازی پارامتری را برای تقریب توابع ناهموار بکار می‌بریم . پس از آن با اثبات قضایای لازم نشان می‌دهیم که در توابع هموار مفهوم دیفرانسیل ضعیف سراسری معادل مشتق تابع می‌باشد.

در فصل سوم رهیافتی برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی نامقید با دقت از پیش تعیین شده را معرفی می-کنیم. این رهیافت حتی زمانی که تابع هدف مسأله تابعی ناهموار باشد نیز قابل استفاده است. در این روش برای هر دقت مطلوب ابتدا تعداد نقاط لازم در افراز را برای رسیدن به دقت مطلوب تعیین می‌کنیم سپس روی هر یک از زیر نواحی این افراز تابع غیرخطی مسأله بهینه‌سازی نامقید با توابع قطعه‌ای خطی تقریب زده می‌شود. سپس الگوریتمی کاراً برای یافتن جواب بهینه سراسری این مسائل برنامه‌ریزی خطی ارائه می‌کنیم. پس از تعیین تقریبی برای جواب بهینه مسأله غیرخطی اولیه و با استفاده ازقضایایی که در این فصل اثبات شده‌اند می‌توان به

این نتیجه رسید که کران بالای خطا برای جواب بدست آمده کوچکتر و یا مساوی خطای مطلوب است بنابراین می‌توان گفت که خطا کاملاً قابل کنترل می‌باشد. نکته اساسی در این رهیافت این است که با استفاده از مفهوم دیفرانسیل ضعیف سراسری در فضای L_1 می‌توان آن را برای مسائلی که شامل توابع ناهموار هستند نیز بکار برد.

درفصل چهارم فرآیند خطی‌سازی پارامتری را برای یافتن جواب بهینه سراسری مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی ارائه می‌کنیم. در این فرآیند ابتدا مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی را با دنباله‌ای از مسائل برنامه‌ریزی خطی تقریب می‌کنیم با حل هر یک از مسائل این دنباله از مسائل برنامه‌ریزی خطی و تعیین جواب بهینه هر یک از آنها تقریبی برای جواب بهینه مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی اولیه بدست می‌آوریم. نشان می‌دهیم دنباله مسائل برنامه-ریزی خطی بدست آمده به مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی اولیه همگرای یکنواخت است. برای این منظور نشان می‌دهیم که دنباله توابع خطی پارامتری که برای تقریب یک تابع غیرخطی بدست می‌آوریم به تابع غیرخطی همگرای یکنواخت است. بنابراین جواب تقریبی که با این روش بدست می‌آید قابل قبول می‌باشد.

درفصل پنجم روشی برای یافتن تقریبی از جواب بهینه سراسری مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی صفر و یک را ارائه می‌کنیم. در این رهیافت ابتدا با استفاده از فرآیند خطی‌سازی پارامتری مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی به دسته-ای از مسائل برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌گردد. جواب بهینه مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی صفر و یک مفروض بر اساس مقادیر بهینه تابع هدف این دسته از مسائل برنامه‌ریزی خطی به دست می‌آید.

۱-۴ مفاهیمی از آنالیزریاضی

۱-۴-۱ مجموعه فشرده

زیر مجموعه A از فضای متری X را فشرده نامیم اگر هر پوشش باز A زیر پوشش متناهی داشته باشد.

۱-۴-۲ فضای متریک

فرض می‌کنیم A مجموعه‌ای غیر تهی باشد. تابع $d\colon A \times A \to \mathbb{R}$ را یک متر روی A نامیم هرگاه دارای خواص زیر باشد:

۱) بأزای هر x و y متعلق به A همواره: $d(x,y) \geq 0$.

۲) بأزای هر x و y متعلق به A: $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$.

۳) بأزای هر x و y متعلق به A: $d(x,y) = d(y,x)$.

۴) بأزای هر x و y و r متعلق به A: $d(x,y) \leq d(x,r) + d(r,y)$.

اگر d یک متر روی A باشدآنگاه مجموعه A را همراه با متر d یک فضای متریک می‌نامند و آن را با (A,d) نشان می‌دهیم.

۱-۴-۳ همگرائی نقطه‌ای

دنباله توابع $\{f_n\}\ ;\ n = 1, 2, \cdots$ که بر مجموعه A تعریف شده‌اند را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم دنباله $\{f_n(x)\}$ از اعداد بأزای $x \in A'$ همگرا باشد. گوئیم $\{f_n\}$ بر A به f نقطه به نقطه همگراست هرگاه:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

۱-۴-۴ همگرائی یکنواخت

گوئیم دنباله‌ای از توابع $n = 1, 2, \cdots$ $\{f_n\}$ بر A به طور یکنواخت به تابع f همگراست هرگاه بأزای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیح N موجود باشد بطوری که اگر $n \geq N$ آنگاه بأزای هر $x \in A$ داشته باشیم:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

۱-۴-۵ σ - جبر

فرض می‌کنیم A یک مجموعه غیرتهی باشد. خانواده غیر تهی X از زیر مجموعه‌های A را یک $\boldsymbol{\sigma}$- جبر نامیم اگر X دارای خواص زیر باشد:

۱. $A \in X$
۲. $E \in X \Rightarrow E^{c} \in X$
۳. اگر $E_n \in A\ ;\ n = ۱, ۲, \cdots$ و تعریف کنیم: $E = \bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n$ آنگاه $E \in X$.

۱-۴-۶ فضای اندازه‌پذیر

منظور از یک فضای اندازه پذیر یک جفت $(X, \mathcal{B})$ متشکل از یک مجموعه X و یک σ - جبر $\mathcal{B}$ از زیر مجموعه‌های آن است. زیر مجموعه A از X را اندازه‌پذیر(یا اندازه‌پذیر نسبت به $\mathcal{B}$) می نامند هرگاه :

$$\mathrm{A} \in \mathrm{X}.$$

۱-۴-۷ اندازه

منظور از یک اندازه μ روی یک فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{B})$ یک تابع مجموعه نامنفی است که برای همه مجموعه‌های $\mathcal{B}$ تعریف شده و دارای خواص زیر است:

۱. $\mu(\emptyset) = ۰$
۲. برای هر دنباله E_i از مجموعه‌های اندازه‌پذیر مجزا داریم:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=۱}^{\infty} \mu E_i$$

هر فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{B})$ است توأم با یک اندازه μ که روی $\mathcal{B}$ تعریف شده است.

۱-۴-۸ فضای L^p

فرض می‌کنیم $(\mathrm{X}, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. اگر f یک تابع اندازه‌پذیر بر X بوده و $0 < p < \infty$ تعریف می‌کنیم:

$$\| f \|_p = [\int |f|^p d\mu]^{\frac{1}{p}}$$

به علاوه تعریف می‌کنیم:

$$L^p(\mathrm{X}, \mathcal{M}, \mu) = \{f: X \to \mathbb{C}: \ \| f \|_p < \infty \}$$

۱-۴-۹ توپولوژی

فرض می‌کنیم $\mathrm{X} \neq \emptyset$ **و** $\tau \subseteq \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathrm{X})$ ($\mathcal{P}(\mathrm{X})$ مجموعه توانی X است) **دارای خواص زیر باشد:**

۱. $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$.

۲. اگر $\{\mathrm{G}_\alpha : \alpha \in \mathrm{I}\} \subseteq \tau$ آنگاه $\bigcup_{\alpha \in I} \mathrm{G}_\alpha$.

۳. اگر $\mathrm{G}_i \in \tau ;\ i = 1, \cdots, n$ آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{G}_i \in \tau$.

در اینصورت τ را یک توپولوژی روی X و (X, τ) را یک فضای توپولوژیک می‌نامند.

۱-۴-۱۰ توپولوژی نسبی

فرض می‌کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک و A زیر مجموعه‌ای غیر تهی از X باشدآنگاه گردایه

$$\tau|_A = \{G \cap A : G \in \tau\}$$

یک توپولوژی روی A تشکیل می‌دهد که آن را توپولوژی نسبی می‌نامند.

۱-۵ مفاهیمی در بهینه‌سازی

بهینه‌سازی علم تعیین بهترین جواب برای مسأله‌ای است که به صورت ریاضی بیان شده است. اغلب این مسائل مدلهای وقایع فیزیکی می‌باشند. بهینه‌سازی شامل مطالعه معیارهای بهینگی برای مسائل، تعیین روشهای الگوریتمی برای جواب و مسائلی از این قبیل می‌باشد. در این قسمت مهمترین ساختارهای خاص بهینه‌سازی را معرفی می‌کنیم.

۱-۵-۱ برنامه‌ریزی خطی

شکل کلی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی بصورت زیر است:

$$\begin{cases} Min(Max)\ \ Z = C^T X \\ \text{s.t.} \quad AX \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \text{b} \\ \quad \mathrm{X} \geq ۰ \end{cases}$$

که در آن $C \in \mathbb{R}^n$ ضرایب تابع هدف ، $A \in \mathrm{M}(m,n)$ ضرایب تکنولوژیک ، $b \in \mathbb{R}^m$ بردار مقادیر معلوم و $X \in \mathbb{R}^n$ متغیرهای تصمیم گیری نامیده می‌شوند.(در این تعریف $\mathrm{M}(m,n)$ فضای ماتریسها شامل m سطر و n ستون است.) Z تابع هدف ، معادلات (نامعادلات) $AX(\leq ، \geq ، =)\text{b}$ قیود یا محدودیتها و قیود $\mathrm{X} \geq ۰$ را قیود نامنفی بودن می‌نامند .

۱-۵-۲ برنامه‌ریزی صفر ویک

یک مسأله برنامه‌ریزی صفر و یک بصورت زیر است:

$$\begin{cases} Min\ \ Z = C^T X \\ \text{s.t.} \quad AX = \text{b} \\ X = \left(x_۱, \cdots, x_j, \cdots, x_n\right) \qquad j = ۱, \cdots, n \ \text{برای} \quad x_{\text{j}} = ۰ \ \text{یا} \ ۱ \ \text{که} \end{cases}$$

اگر در مسأله فوق تابع هدف یا یکی از قیود مسأله غیرخطی باشد مسأله حاصل یک مسأله برنامه‌ریزی غیر خطی صفر ویک ودر غیر اینصورت یک مسأله برنامه‌ریزی خطی صفر و یک نامیده می‌شود.

۱-۵-۳ بهینه‌سازی نامقید

شکل کلی یک مسأله بهینه‌سازی نامقید بصورت زیر است:

$$\begin{cases} Min \quad f(x) \\ s.t. \quad x \in X \end{cases}$$

که در آن f یک تابع حقیقی مقدار و X زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است. برای حل این مسائل باید تعاریف و قضایای زیر را در نظر بگیریم.(قضایا و تعاریف این بخش از مرجع [۱۳] نقل شده است.)

۱-۵-۴ مینیمم موضعی

نقطه $x^* \in X$ را یک نقطه مینیبمم موضعی (نسبی) تابع f روی X گوئیم اگر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد بطوری که بأزای هر $x \in X$ که $|x - x^*| \leq \varepsilon$ داشته باشیم : $f(x) \geq f(x^*)$. اگر بأزای هر $x \in X$ و $x \neq x^*$ در فاصله حداکثر ε از x^* داشته باشیم: $f(x) > f(x^*)$ آنگاه x^* را یک نقطه مینیمم نسبی اکید تابع f روی X می‌نامند.

۱-۵-۵ مینیمم سراسری

نقطه $x^* \in X$ را یک نقطه مینیبمم سراسری تابع f روی X گوئیم اگر بأزای هر $x \in X$ داشته باشیم $f(x) \geq f(x^*)$. اگر بأزای هر $x \in X$ و $x \neq x^*$ داشته باشیم: $f(x) > f(x^*)$ آنگاه x^* را یک نقطه مینیمم سراسری اکید تابع f روی X می‌نامند.

۱-۵-۶ جهت شدنی

فرض می‌کنیم X زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد برای هر نقطه دلخواه $x \in X$ بردار d یک جهت شدنی در x است اگر $\bar{\lambda} > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای جمیع مقادیر λ که در نا مساوی $0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$ صدق می کند داشته باشیم : $x + \lambda d \in X$

۱-۵-۷ لم (شرایط لازم مرتبه اول)- فرض می‌کنیم X زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ بوده و $f \in C^1(X)$ تابعی تعریف شده روی آن باشد. اگر x^* یک نقطه مینیمم نسبی تابع f روی X باشد آنگاه بأزای هر $d \in \mathbb{R}^n$ که d یک جهت شدنی در x^* است داریم :

$$\nabla f(x^*)\, d \geq 0$$

۱-۵-۸ نتیجه(بهینه سازی نامقید)- فرض می‌کنیم X زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ بوده و $f \in C^1(X)$ تابعی تعریف شده روی آن باشد. اگر x^* یک نقطه مینیمم نسبی تابع f روی X بوده و x^* یک نقطه داخلی X باشد آنگاه داریم:

$$\nabla f(x^*) = 0$$

۱-۵-۹ برنامه‌ریزی غیرخطی

شکل کلی یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی بصورت زیر است:

$$\begin{cases} Min \quad f(x) \\ \text{s.t.} \quad g_i(x) \leq 0 \qquad i = 1, \cdots, m \\ \qquad h_j(x) = 0 \qquad j = 1, \cdots, l \\ \qquad x \in X \end{cases}$$

که در آن f , $g_{۱}$, $g_{۲}$, $\cdots$, g_m , $h_{۱}$, $h_{۲}$, $\cdots$, h_l توابعی غیرخطی هستند که روی زیر مجموعه X از $\mathbb{R}^n$ تعریف شده اند.

۱-۶ بهینه سازی توابع محدب

در ارتباط با نقاط اکسترمم توابع محدب می‌توانیم از قضایای زیر استفاده کنیم :

۱-۶-۱ قضیه - فرض می‌کنیم f تابعی محدب باشد که روی مجموعه X تعریف شده است. در این صورت تابع f روی X مینیمم خود را اختیار می‌کند و هر مینیمم نسبی f ،مینیمم سراسری است.

۱-۶-۲ قضیه - فرض می‌کنیم $f \in C^{۱}(X)$ تابعی محدب باشد که روی مجموعه محدب X تعریف شده است. نقطه‌ای مانند $x^* \in X$ نقطه مینیمم سراسری تابع f روی X است اگر و فقط اگر بأزای هر $x \in X$ داشته باشیم :

$$\nabla f(x^*))(x - x^*) \geq ۰$$

۱-۶-۳ قضیه - فرض می‌کنیم f تابعی محدب باشد که روی مجموعه بسته کراندار و محدب X تعریف شده است. اگر f ماکزیممی روی X داشته باشد این ماکزیمم در یک نقطه فرین(اکسترمم) X به دست می‌آید.

فصل دوم

رهیافت جدیدخطی سازی پارامتری سراسری برای توابع ناهموار

۲-۱ مقدمه

یکی از راههای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی،خطی‌سازی آنها می‌باشد. روشهای گوناگونی برای خطی‌سازی توابع غیرخطی بیان شده است. در این روشها اگر تابع غیرخطی تابعی ناهموار باشد به راحتی نمی‌توان برای آن تقریب خطی تعریف نمود. در این فصل ابتدا تقریب خطی پارامتری را برای توابع غیرخطی تعریف می‌کنیم. این تقریب براحتی بدست می‌آید و به تابع غیرخطی اولیه همگرا می‌باشد. پس از آن با معرفی مفهوم جدید دیفرانسیل ضعیف سراسری فرآیند خطی‌سازی پارامتری را برای یافتن تقریب خطی پارامتری برای توابع ناهموار گسترش داده شده است. این فصل شامل بخشهای زیر است:

در بخش بعدی فرآیند خطی‌سازی پارامتری را برای توابع هموار معرفی کرده و قضایای همگرائی آن را اثبات می‌کنیم. در بخش سوم مفهوم دیفرانسیل ضعیف سراسری برای توابع ناهموار معرفی شده و احکام مورد نیاز اثبات شده‌اند. پس از آن فرآیند خطی سازی پارامتری برای خطی‌سازی توابع غیرخطی ناهموار به کاربرده شده-است.

۲-۲ تقریب خطی پارامتری برای توابع هموار

فرض می‌کنیم $f(.): [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی غیرخطی مشتق‌پذیر باشد. تقریب خطی پارامتری تابع $f(x)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲-۱ یک افراز از بازه $[a,b]$ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$P_n([a,b]) = \{ a = x_۰, x_۱, \cdots, x_n = b\}$$

که در آن $x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n$ است. نرم افراز را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\| P_n([a,b]) \| = \max \{x_i - x_{i-۱} \; ; \; i = ۱, \cdots, n\} \qquad (۱-۲)$$

تعریف ۲-۲ فرض می‌کنیم $f(x)$ تابعی غیرخطی بر $[a,b]$ بوده و P_n افرازی دلخواه از $[a,b]$ باشد. تقریب خطی پارامتری تابع $f(x)$ بر $[x_{i-1},x_i]$ **که آن را با** $f_i(x,s_i)$ نشان می‌دهیم به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f_i(x,s_i) \triangleq f'(s_i)x + f(s_i) - s_i f'(s_i) \ ; \ x \in [x_{i-1},x_i] \ ; \ i = 1,\cdots,n \qquad (۲\text{-}۲)$$

که در آن $s_i \in \left[x_{i-1},x_i\right]$ **نقطه‌ای دلخواه است.** چون s_i نقطه ثابتی در این فاصله نمی‌باشد بسط فوق را بسط تیلور متحرک تابع $f(x)$ می‌نامیم.

اینک تابع $g_n(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(x,s_i)\chi_{[x_{i-1},x_i)}(x)\right] \qquad (۳\text{-}۲)$$

که درآن $\chi_A(x)$ تابع مشخصه است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

تابع $g_n(x)$ تقریب قطعه‌ای خطی پارامتری تابع $f(x)$ بر$[a,b]$ نامیده می‌شود. براحتی می‌توان نشان داد که تابع $g_n(x)$ تابعی قطعه‌ای پیوسته می‌باشد.

تذکر۲-۱ به کمک قضایای زیر نشان می‌دهیم وقتی که نرم افراز به صفر میل کند یعنی:

$$\| P_n([a,b]) \| \to 0$$

آنگاه تابع قطعه‌ای خطی پارامتری $g_n(x)$ به تابع غیرخطی اولیه همگرای یکنواخت است. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم که:

$g_n \to f$ به طور یکنواخت بر $[a,b]$