به نام خدا

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه‌ریاضی

عنوان پایان نامه:

فاصله‌های برگمن و مجموعه‌های چبیشف

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی

گرایش ریاضی محض

استاد راهنما :

دکترعلی بارانی

اساتید مشاور :

دکتر ناصر عباسی

دکتر بهمن غضنفری

نگارنده:

صدیقه درویشی

۱۳۸۹

مقدمه

مطالعه تحدب مجموعه‌های چبیشف در فضای هیلبرت تاریخ طولانی دارد و ریاضی‌دانان بسیاری هم در فضای اقلیدسی و هم در فضای هیلبرت با استفاده از فاصله اقلیدسی و فاصله برگمن توانستند به این مسئله مهم پاسخ دهند.
فرض کنید X فضای نرم‌دار حقیقی با دوگان X^* باشد و فرض $C \subseteq X$ زیر مجموعه‌ای ناتهی از X باشد. عملگر تصویر روی C با $P_C : X \to C$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_C(x) := \{c \in C : \|x - z\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|\} \qquad \forall x \in X,$$

گوییم C مجموعه‌ای چبیشف است اگر $P_C(x)$ برای هر $x \in X$ تک مقداری باشد. همچنین هر زیر مجموعه بسته،ناتهی و محدب X چبیشف است اگروفقط‌اگر X انعکاسی و محدب اکید باشد. بخصوص هر زیر مجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت چبیشف است.
عکس مسئله تحدب مجموعه‌های چبیشف به صورت زیر بیان می‌شود:
آیا یک مجموعه چبیشف در فضای هیلبرت لزوما محدب است؟
$Bunt$ به طور مستقل در سال ۱۹۳۴ برای این مسئله یک جواب در فضای اقلیدسی R^n به‌دست آورد. سپس $Motzkin$ و دیگران در سال ۱۹۳۵ به این مسئله پاسخ دادند.
البته این مسئله هنوز در فضاهای هیلبرت با بعد نامتناهی باز است. تحدب مجموعه‌های چبیشف در فضاهای باناخ به طور گسترده مطالعه و بررسی شدند و شرایط مفید بسیاری برای این‌که یک مجموعه چبیشف محدب باشد به‌دست آورده شده است.بخصوص $Busemann$ نشان داد که مجموعه‌های چبیشف در فضاهای با بعد متناهی محدب اکید است.
$Klee$ نشان داد که هر مجموعه چبیشف به طور ضعیف بسته در فضای باناخ به طور یکنواخت هموار و

به طور یکنواخت محدب یا به‌طور کلی هر مجموعه چبیشف در یک فضای انعکاسی هموار با تصویر به‌طور ضعیف پیوسته، محدب است. توجه کنید که پیوستگی تصویر P_C نقشی کلیدی در مطالعه مطالب ذکر شده در بالا بازی می‌کند.

در این پایان نامه مجموعه‌های چبیشف از نظر فاصله برگمن مورد بررسی قرار می‌گیرند و نشان داده شده که اگر هر نقطه فضا در یک مجموعه بسته نزدیک‌ترین نقطه یکتا داشته باشد آن مجموعه محدب است.

فرض کنیم $f : R^n \to]-\infty, +\infty]$ روی $U := int(domf) \neq \infty$ محدب و دیفرانسیل‌پذیر باشد و $C \subseteq U$ فاصله برگمن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D : R^n \times R^n \to [\circ, +\infty] : (x,y) \mapsto \begin{cases} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x-y \rangle & y \in U \\ +\infty. & otherwise \end{cases}$$

با به‌کار بردن فاصله برگمن مسئله چبیشف به صورت زیر بیان می‌شود:

اگر $x \in C$ روی C نزدیک‌ترین نقطه یکتا داشته باشد یعنی C برای فاصله برگمن چبیشف باشد، آیا C محدب است.

برای پاسخ دادن به این سوال از دو فرآیند استفاده شده است:

یکی با به‌کار گیری ویژگی‌های مفیدی از عملگرهای یکنوای ماکزیمال: قضیه تحدب $Rockafellar$ روی برد عملگرهای یکنوای ماکزیمال، دیگری با به‌کار گیری تعمیمی از زیردیفرانسیل‌های آنالیز ناهموار که به ما اجازه می‌دهد تا مجموعه‌های چبیشف را توصیف کنیم. همچنین زیردیفرانسیل‌پذیری تابع فاصله برگمن همراه با مجموعه‌های چبیشف مطالعه می‌شود.

فاصله‌های برگمن کاربردهای بسیار جالبی در استاتیک، انرژی و تقریب دارند. این تابع فاصله یک متریک نیست زیرا متقارن نیست و در نامساوی مثلثی صدق نمی‌کند.

در این پایان نامه مقاله

Bregman distance and Chebishev sets

Heinz H. Bauschke , Xianfu Wang Jane Ye , Xiaoming yuan.

مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

در طول این پایان نامه، R^n فضای اقلیدسی استاندارد با ضرب درونی $\langle .,. \rangle$ و نرم $\|.\|$ در نظر گرفته شده و Γ مجموعه توابع محدب و نیم‌پیوسته پایینی روی R^n است و فرض C زیر مجموعه‌ای بسته و ناتهی از R^n باشد.

در R^n گوی بسته به مرکز x و شعاع $\delta > 0$ با $B_\delta(x)$ و گوی بسته یکه با $B = B_1(0)$ نشان داده می‌شود. برای مجموعه S، $intS$، clS و $convS$ به ترتیب نشان دهنده درون، بستار و غلاف محدب S هستند. برای نگاشت مجموعه — مقدار $T : R^n \to R^n$، $ranT$ و $domT$ برای برد و دامنه به کار برده می‌شوند، و T^{-1} برای معکوس آن به کار برده می‌شود یعنی اگر $x \in T^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in T(x)$. برای تابع $f : R^n \to]-\infty, +\infty]$، دامنه f را با $domf$ و مزدوج f را با f^* و غلاف محدب f را با $convf$ نشان می‌دهیم. برای تابع دیفرانسیل‌پذیر f بردار گرادیان و ماتریس هسیان در نقطه x را به ترتیب با $\nabla f(x)$ و $\nabla^2 f(x)$ نشان داده شده است. در فصل اول تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند آورده شده‌اند، در فصل دوم نزدیک‌ترین نقاط برگمن چپ و فاصله برگمن چپ توصیف شده و نشان می‌هیم که نرمال برگمن یک نرمال پروکسیمال است. همچنین زمانی که f لژاندر و $coercive - 1$ و C چبیشف باشد نشان می‌دهیم که ترکیب نگاشت تصویر برگمن و ∇f^* یکنوای ماکزیمال است و این به ما اجازه می‌دهد تا قضیه $Rockafellar$ را روی تحدب برد عملگر یکنوای ماکزیمال به کار برد تا ثابت کنیم که مجموعه‌های چبیشف محدب هستند.

در فصل سوم ویژگی‌های زیردیفرانسیل‌پذیری تابع فاصله برکمن چپ و فرمول‌هایی برای زیرمشتق کلارک، زیر مشتق حدی و زیر مشتق دینی داده شده است.

در فصل چهارم توصیفات کاملی در مورد مجموعه‌های چبیشف داده شده است. فرآیند ما نتایج داده شده توسط $Hiriart - Urraty$ را از فاصله اقلیدسی به فاصله برگمن تعمیم می‌دهد. همچنین نشان دادیم که تحدب مجموعه‌های چبیشف برای تصویر برگمن راست f به وسیله تصویرهای برگمن چپ f^* مطالعه می‌شوند و با مثال نشان داده‌ایم که اگر تصویر برگمن راست تک مقداری باشد لزومی ندارد مجموعه C محدب باشد.

صدیقه درویشی

۱۳۸۹

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم

۱—۱ مقدمه

در این بخش برخی مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های دیگر ارائه شده‌اند.

تعریف ۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط باشد. یک ضرب داخلی[۱] روی X، تابعی است مانند $\langle .,. \rangle : X \times X \to C$ به طوری‌که برای هر $a, b \in C$ و $x, y, z \in X$ داشته باشیم:

۱) $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$،

۲) $\langle x, ay + bz \rangle = \overline{a}\langle x, y \rangle + \overline{b}\langle x, z \rangle$،

۳) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$،

۴) $\langle x, x \rangle \geq 0$،

۵) $\langle x, x \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

ویژگی‌های (۱) و (۲) نشان می‌دهند که ضرب داخلی نسبت به مولفه اول، خطی و نسبت به مولفه دوم مزدوج خطی است.

تعریف ۲.۱ فضای برداری X به همراه یک ضرب داخلی تعریف شده روی آن یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود.

با استفاده از ضرب داخلی، نرمی به صورت زیر روی فضا تعریف می‌شود:

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

تعریف ۳.۱ یک فضای ضرب داخلی X رایک فضای هیلبرت می‌نامیم هرگاه X نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی، کامل باشد. یک فضای هیلبرت را به طور معمول با H نشان می دهیم.

---

[۱] Inner product

این تعاریف را می‌توانید در [۱۰] مشاهده کنید.

تعریف ۴.۱ تابع $f : X \to R \cup \{+\infty\}$ سره[۲] نامیده می‌شود هرگاه دامنه f که به صورت زیر تعریف می‌شود غیرتهی باشد.

$$dom(f) = \{x \in X : f(x) < +\infty\}.$$

تعریف ۵.۱ تابع $f : X \to R \cup \{+\infty\}$ غیر بدیهی [۳] نامیده می‌شود هرگاه $dom(f)$ غیر تهی باشد.

تعریف ۶.۱ برای هر مجموعه $C \subseteq R^n$ با $0 \in C$ قطب[۴] C به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C^\circ := \{v | \langle v, x\rangle \leq 0 \quad \forall x \in C\}.$$

تعریف ۷.۱ فرض $D \subseteq R^n$ تابع محمل [۵] مجموعه D تابع $\sigma_D : R^n \to \overline{R}$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sigma_D(w) := \sup_{v \in D} \langle v, w\rangle := \sup \langle D, w\rangle.$$

تعریف ۸.۱ فرض S زیر مجموعه‌ای از X باشد تابع مشخصه[۶] S را با $I_S(.)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$I_S(x) := \begin{cases} 0 & if x \in S \\ +\infty. & otherwise \end{cases}$$

---

[۲] Proper
[۳] Nontrivial
[۴] Polar
[۵] Suppprot
[۶] Indicator function

تعریف ۹.۱ اگر تابع f مشتق مرتبه دوم داشته باشد ماتریس هسیان در نقطه z با $H(z)$ نشان داده می‌شود و شامل مشتقات جزئی مرتبه دوم $f_{ij}(z) = \frac{\partial^2 f(z)}{\partial x_j \partial x_i}$ می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{bmatrix} f_{11}(z) & f_{12}(z) & \dots & f_{1n}(z) \\ f_{21}(z) & f_{22}(z) & \dots & f_{2n}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(z) & f_{n2}(z) & \dots & f_{nn}(z) \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

تعریف ۱۰.۱ ماتریس متقارن $n \times n$، با درایه‌های حقیقی (a_{ij}) نیمه معین مثبت [۷] نامیده می‌شود اگر برای تمام $x \in R^n$، x^tAx نامنفی باشدو معین مثبت [۸] است اگر برای تمام $x \neq 0$ متعلق به R^n مثبت باشد.

اگر f روی مجموعه محدب D، C^2 باشد. f روی D محدب است اگروفقط اگر ماتریس هسیان در هر $x \in D$ نیمه معین مثبت باشد و اگر $H(x)$ در هر x معین مثبت باشد f محدب اکید خواهد بود.

تعریف ۱۱.۱ فرض $f : X \to R \cup \{+\infty\}$، اپی گراف[۹] f به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$epi(f) := \{(x,\alpha) \in R^n \times R : f(x) \leq \alpha\}.$$

و

$$graph f = \{(x,y) | y = f(x)\}.$$

همچنین

$$\begin{aligned} lev_{\leq\alpha} f &:= \{x \in R^n : f(x) \leq \alpha\}, \\ lev_{<\alpha} f &:= \{x \in R^n : f(x) < \alpha\}, \\ lev_{=\alpha} f &:= \{x \in R^n : f(x) < \alpha\}. \end{aligned}$$

---

[۷] positive semidefinit
[۸] positive definit
[۹] Epigraph

تعریف ۱۲.۱ تابع $f : X \to R \cup \{+\infty\}$،محدود شده سطحی (پایینی)[۱۰] است اگر برای هر $\alpha \in R$ مجموعه $lev_{\leq \alpha}$ کران‌دار باشد.

تعریف ۱۳.۱ فرض $f : X \to R \cup \{+\infty\}$، و C مجموعه‌ای در R^n باشد در این صورت $\inf(f)$ و $\sup(f)$ روی C به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}
\inf_{c} f := \inf_{x\in c} f(x) &:= \inf\{f(x) : x \in C\},\\
\sup_{c} f := \sup_{x\in c} f(x) &:= \sup\{f(x) : x \in C\}.
\end{aligned}$$

همچنین داریم

$$argmin_C f := argmin f(x) := \begin{cases} \{x \in C : f(x) = \inf_C f\} & \inf_C f \neq \infty \\ \emptyset & \inf_C f = \infty \end{cases}$$

تعریف ۱۴.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. گوییم حد زبرین تابع $f : X \to [-\infty, \infty)$ که آن را با $\limsup_{x\to x_\circ} f(x)$ نمایش می‌دهیم، برابر با l است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر x با شرط $x \in B(x_\circ, \delta)$ و $x \neq x_\circ$ داشته باشیم:

$$f(x) \leq l + \varepsilon.$$

همچنین گوییم حد زیرین $f : X \to (-\infty, +\infty]$ که آن را با $\liminf_{x\to x_\circ} f(x)$ نمایش می‌دهیم، برابر با l است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر x با شرط $x \in B(x_\circ, \delta)$ و $x \neq x_\circ$ داشته باشیم:

$$f(x) \geq l - \varepsilon.$$

---

[۱۰] (lower)level-bounded

تعریف ۱۵.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. تابع $f : X \to [-\infty, \infty)$ را نیم‌پیوسته‌بالایی[۱۱] در $x_\circ \in X$ گوئیم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر $y \in B(x_\circ, \delta)$ داشته باشیم:

$$f(y) \leq f(x_\circ) + \varepsilon.$$

f روی X نیم‌پیوسته‌بالایی است هرگاه f در هر نقطه X نیم‌پیوسته‌بالایی باشد.

تعریف ۱۶.۱ تابع $f : X \to R \cup \{+\infty\}$ در $\overline{x}$ نیم‌پیوسته پایینی[۱۲] موضعی است،اگر $\varepsilon > \circ$ وجود داشته باشد به‌طوریکه تمام مجموعه‌های به فرم $\{x \in R(\overline{x}, \varepsilon) : f(x) \leq \alpha\}$ با $\alpha \leq f(\overline{x} + \varepsilon)$ بسته باشند. به طور مشابه نیم‌پیوسته بالایی موضعی تعریف می‌شوند.

تعریف ۱۷.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. تابع $f : X \to (-\infty, \infty]$ را نیم‌پیوسته‌پایینی در $x_\circ \in X$ گوئیم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر $y \in B(x_\circ, \delta)$ داشته باشیم:

$$f(y) \geq f(x_\circ) - \varepsilon.$$

f روی X نیم‌پیوسته‌پایینی است هرگاه f در هر نقطه X نیم‌پیوسته‌پایینی باشد.

می‌توان ثابت نمود که تابع $f : X \to (-\infty, \infty]$ نیم‌پیوسته‌پایینی در $x_\circ \in X$ است اگروفقط اگر برای هر دنباله $(x_n) \subset X$ که $x_n \to x_\circ$، داشته باشیم:

$$\liminf_{n \to \infty} f(x_n) \geq f(x_\circ).$$

همچنین تابع $f : X \to [-\infty, \infty)$ نیم‌پیوسته‌بالایی در $x_\circ \in X$ است اگروفقط اگر برای هر دنباله $(x_n) \subset X$ که $x_n \to x_\circ$، داشته باشیم:

$$\limsup_{n \to \infty} f(x_n) \leq f(x_\circ).$$

[۱۱] Uper Semicontinuous

[۱۲] Lower Semicontinuous

تعریف ۱۸.۱ گوئیم تابع f در شرط لیپ شیتز در نقطه c صدق می‌کند هرگاه عددی مثبت k و گوی یک بعدی $B(c)$ وجود داشته باشد به قسمی که هرگاه $x \in B(c)$ و $x \neq c$ آنگاه

$$|f(x) - f(c)| < |x - c|.$$

تعریف ۱۹.۱ فرض $f : R^n \to \overline{R}$ و فرض $x \in R^n$ باشد. مشتق جهتی f در نقطه x و در جهت بردار y به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f'(x; y) = \lim_{\lambda \to \circ} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}.$$

اگر f در x دیفرانسیل‌پذیر باشد داریم‌ک

$$f'(x; y) = \langle \nabla f(x), y \rangle \qquad \forall y.$$

تعاریف زیر را می‌توانید در [۱۳] مشاهده کنید.

تعریف ۲۰.۱ گردایه M از زیر مجموعه‌های مجموعه X را یک $\sigma-$جبر در X نامیم اگر M از خواص زیر بهره‌مند باشد:

۱) $X \in M$،

۲) هرگاه $A \in M$ آنگاه $A^c \in M$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است،

۳) هرگاه $A = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$ و به ازای هر $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $A_n \in M$ آنگاه $A \in M$.

هرگاه M یک $\sigma-$جبر در X باشد آنگاه X را فضای اندازه‌پذیر و اعضای M را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم.

تعریف ۲۱.۱ فرض کنیم p خاصیتی باشد که یک نقطه مانند x واجد آن باشد یا نباشد. اگر μ اندازه‌ای بر $\sigma-$جبر M بوده و $E \in M$، عبارت «P تقریبا همه جا بر E برقرار است؛ یعنی $N \in M$ی هست به‌طوری که $\mu(N) = 0$، $N \subset E$ و P در هر نقطه از $E - N$ برقرار است.

قضیه ۱.۱ فرض کنیم $f : S \to R^k$ تابعی از فضای متری S به فضای اقلیدسی R^k باشد. هرگاه f بر یک زیر مجموعه فشرده S مانند X پیوسته باشد ، آنگاه f بر X کران‌دار است. اثبات این قضیه را می‌توانید در [۱۱] مشاهده کنید.

قضیه ۲.۱ (قضیه راداماخر):اگر f تابعی لیپ شیتز باشد آنگاه در نقاطی که مشتق‌پذیر نیست اندازه آن صفر است.

تعاریف زیر را می‌توانید در [] مشاهده کنید.

تعریف ۲۲.۱ فرض τ یک توپولوژی روی فضای برداری X باشد به‌طوریکه

۱) هر زیر مجموعه تک نقطه‌ای X، بسته باشد.

۲) عمل جمع برداری و ضرب اسکالر توابعی پیوسته باشند.

در این صورت X را یک فضای برداری توپولوژیکی[۱۳] می گوییم .

تعریف ۲۳.۱ فضای دوگان یک فضای برداری توپولوژیکی X فضای برداری X^* است که اعضای آن تابعک‌های خطی پیوسته روی X می‌باشند.

تعریف ۲۴.۱ دنباله (x_n) در فضای نرم‌دار X به طور ضعیف به x همگراست هرگاه به ازای هر $f \in X^*$ داشته باشیم

$$f(x_n) \to f(x)$$

و می‌نویسیم $x_n \xrightarrow{w} x$.

[۱۳] Topological Vector Space

تعریف ۲۵.۱ مجموعه S در فضای برداری X را محدب[۱۴] می‌نامیم هرگاه برای هر دو نقطه واقع در S پاره خط واصل این دو نقطه متعلق به S باشد.
به عبارت دیگر، برای هر $x, y \in S$ و $\circ \leq t \leq ۱$ داشته باشیم:

$$(۱ - t)x + ty \in S.$$

تعریف ۲۶.۱ فرض کنید S زیر مجموعه‌ای از فضای برداری X باشد غلاف محدب [۱۵] وجموعه S که با $conv(S)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از اشتراک تمام مجموعه‌های محدب که مشتمل بر S هستند.

قضیه ۳.۱ غلاف محدب مجموعه های فشرده، فشرده است.

اثبات. به [۳] مراجعه شود. □

قضیه ۴.۱ اگر S مجوعه ای محدب باشد داریم

$$conv(S) = S.$$

اثبات. به [۳] مراجعه شود.
□ تعاریف و قضایای زیر را می‌توانید در [۱۰] مشاهده کنید.

تعریف ۲۷.۱ فرض X و U دو فضا باشند و برای هر $x \in X$ مجموعه $S(x) \in U$، $Set(U)$ را مجموعه تمام زیر مجموعه‌های U تعریف می‌کنیم به جای $S : X \to Set(U)$ می‌نویسیم $S : X \to U$ و گوئیم نگاشت S در x تهی — مقدار، تک — مقدار یا چند مقدار است اگر $S(x)$ مجموعه‌ای تهی، یک عضوی یا مجموعه‌ای شامل بیش از یک عضو باشد.

---
[۱۴] Convex
[۱۵] Convex hall

تعریف ۲۸.۱ نگاشت $S : R^n \to R^m$ مقدار محدب نامیده می‌شود هرگاه برای تمام xها $S(x)$ مجموعه‌ای محدب باشد.

تعریف ۲۹.۱ فرض کنید X فضای برداری باشد و $S \subset X$ محدب باشد، تابع $f : s \to R$ را محدب گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ و $t \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

اگر نامساوی به صورت اکید باشد آنگاه تابع f را محدب اکید می‌نامیم.

تعریف ۳۰.۱ غلاف محدب تابع $f : R^n \to \overline{R}$ که با $conv f$ نشان داده می‌شود برابر است با نقاط سوپریمم تمام توابع محدب که کوچک‌تر یا مساوی f هستند. اگر f محدب باشد داریم $f = conv f$.

تعریف ۳۱.۱ فرض X یک فضای باناخ با فضای دوگان X^* و $w \in X^*$ و $u \in X$ باشد. F نگاشتی با دامنه $D(F)$ باشد، F یکنوا نامیده نامیده می‌شود اگر برای هر v, u متعلق به $D(F)$ داشته باشیم

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle \geq 0.$$

در حالت کلی زیر مجموعه G از $X \times X^*$ مجموعه‌ای یکنوا نامیده می‌شود هرگاه برای جفت (u_1, w_1) و (u_2, w_2) رابطه زیر برقرار باشد

$$\langle w_2 - w_1, u_2 - u_1 \rangle \geq 0.$$

مجموعه G یکنوای ماکزیمال نامیده می‌شود اگر در بین مجموعه‌های یکنوا، ماکزیمال باشد.

تعریف ۳۲.۱ نگاشت F یکنوای ماکزیمال نامیده می‌شود اگر گراف $G(F)$ مجموعه‌ای یکنوای ماکزیمال باشد.

نگاشت دیفرانسیل‌پذیر $F : R^n \to R^n$ به ازای هر x یکنواست اگروفقط‌اگر ماترس ژاکوبین $\nabla F(x)$ نیمه معین مثبت باشد و یکنوای اکید است اگروفقط‌اگر ماتریس ژاکوبین $\nabla F(x)$ به ازای هر x معین مثبت باشد.

قضیه ۵.۱ برای هر نگاشت یکنوای ماکزیمال $F : R^n \to R^n$ مجموعه $domF$، محدب است و مجموعه محدب C وجود دارد به‌طوریکه $C \subset domF \subset clC$.
به طور مشابه این قضیه برای $ranF$ به‌کار برده می‌شود.

قضیه ۶.۱ اگر نگاشت پیوسته $F : R^n \to R^n$ یکنوا باشد آنگاه یکنوای ماکزیمال است. بخصوص، هر نگاشت یکنوای دیفرانسیل‌پذیر یکنوای ماکزیمال است.

۱—۲ آنالیز ناهموار

تعاریف و اثبات قضایای زیر را می‌توانید در [۵] مشاهده کرد.

تعریف ۳۳.۱ فرض A زیر مجموعه‌ای ناتهی از فضای هیلبرت H باشدو $z \in H$ و $z \notin A$. $\overline{x} \in A$ را بهترین تقریب z نسبت به A یا تصویر z روی A گوئیم هرگاه

$$\|\overline{x} - z\| = \min_{x \in A} \|x - z\|$$

و $proj_{(z)}^{A}$ را مجموعه تمام تصویرهای z روی A می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$proj_A^{(z)} := \{\overline{x} \in A : \|\overline{x} - z\| = d_A(z)\}.$$

که در آن

$$d_A(z) = \inf\{\|x - z\| : z \in E\}.$$

تابع فاصله نامیده می‌شود. واضح است که اگر $z \in A$ آنگاه $proj_A(z) = \{z\}$

مسئله مینیمم سازی به فرم

$$f_\lambda(x) := \inf_{y\in X}[f(y) + \frac{۱}{۲\lambda}\|y-x\|^{۲}], \qquad (۱-۱)$$

را بررسی می‌کنیم که در آن f تابعی از فضای هیلبرت X به $R\cup\{+\infty\}$ است و $\|.\|$ نرم هیلبرت X و λ یک پارامتر مثبت است.

قضیه ۷.۱ فرض کنید $f : X \to R\cup\{+\infty\}$ تابعی غیر تهی، محدب و نیم‌پیوسته پایینی باشد. جواب یکتایی برای مسئله وجود دارد و آن را با $J_{\lambda(x)}$ نشان می‌دهیم.

$$f_\lambda(x) = f(J_{\lambda(x)}) + \frac{۱}{۲\lambda}\|J_{\lambda(x)} - x\|^{۲}].$$

اگر $f = \psi_k$ (ψ_k تابع مشخصه مجموعه K) در این مورد داریم

$$f_\lambda(x) = \frac{۱}{۲\lambda}d(x,k)^{۲}.$$

قضیه ۸.۱ (بهترین تقریب): فرض K زیر مجموعه‌ای محدب و بسته از فضای هیلبرت با ضرب درونی $\langle x,y\rangle$ باشد مسئله مینیمم سازی :

۱) $J(x)\in K$،

۲) $\|x - J(x)\| = d(x,k)$ دارای جواب یکتای $J(x)$ است که توسط نامساوی زیر مشخص می‌شود

۱) $J(x)\in K$،

۲) برای هر $y\in K$، $\langle Jx - x, Jx - y\rangle \leq ۰$.

تعریف ۳۴.۱ نگاشت J از X به توی K تصویر بهترین تقریب x به توی K نامیده می‌شود.

قضیه ۹.۱ فرض A زیرمجموعه‌ای غیر تهی از H باشد و فرض $z \in H$ و $\overline{x} \in A$، برای هر $0 < t < 1$ داریم :

$$proj_A(\overline{x} + t(z - \overline{x})) = \{\overline{x}\}.$$

تعریف و اثبات قضایای زیر را می‌توانید در [۴] مشاهده کنید.

تعریف ۳۵.۱ اگر $\overline{x}$ تصویر z روی A باشد، $z - \overline{x}$ را یک مسیر تقریبی نرمال بر A در $\overline{x}$ گوئیم و مخروط قائم تقریبی[۱۶] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_A^p(\overline{x}) = \{\xi : \xi = t(z - \overline{x}), \qquad t \geq 0\}.$$

قضیه ۱۰.۱ بردار ξ متعلق به $N_p^A(\overline{x})$ است اگروفقط اگر $\sigma = \sigma(\xi, \overline{x}) \geq 0$ وجود دارد به قسمی که برای هر $x \in A$

$$\langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq \sigma \|x - \overline{x}\|.$$

تعریف ۳۶.۱ f را در x گتودیفرانسیل‌پذیر[۱۷] گوئیم هرگاه برای هر $v \in X$

۱) مشتق جهتی وجود داشته باشد.

۲) عضو منحصر به فردی مانند $f'_G(x)$ موجود باشد که:

$$f'(x, v) = \langle f'_G(x); v \rangle \qquad \forall v \in X.$$

[۱۶] Proximal normal cone

[۱۷] Gateax differentiable

مثال ۱.۱ $f(x) = \|x\|$ در $x_\circ = \circ$ در هر جهت مشتق دارد ولی گتو دیفرانسیل‌پذیر نیست.

اثبات. برای هر $\circ \neq v \in X$ داریم

$$f'(\circ; v) = \lim_{t\to\circ} \frac{\|\circ + tv\| - \|\circ\|}{t} = \|v\|,$$

$$\|v\| = \langle f'_G, v\rangle,$$

$$\|v\| = \langle f'_G, v\rangle,$$

در نتیجه داریم

$$۲\|v\| = \circ \to v = \circ,$$

که متناقض است با این که $v \neq \circ$ باشد. بنابراین این تابع در هر جهت مشتق‌پذیر است ولی گتودیفرانسی‌پذیر نیست. □

تعریف ۳۷.۱ فرض در هر $x \in X$

$$f'(x, v) = \langle f'_G(x); v\rangle \qquad \forall v \in X,$$

برقرار باشد و همگرایی در

$$f'(x, v) = \lim_{t\to\circ} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

روی مجموعه‌های کران‌دا یکنواخت باشد.
در این صورت گوییم f در x فرشه دیفرانسیل‌پذیر[۱۸] است.

مثال ۲.۱ تابع

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۳ y}{x^٦ + y^۲} & if f(x,y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & if f(x,y) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

[۱۸] Frechet differentiable