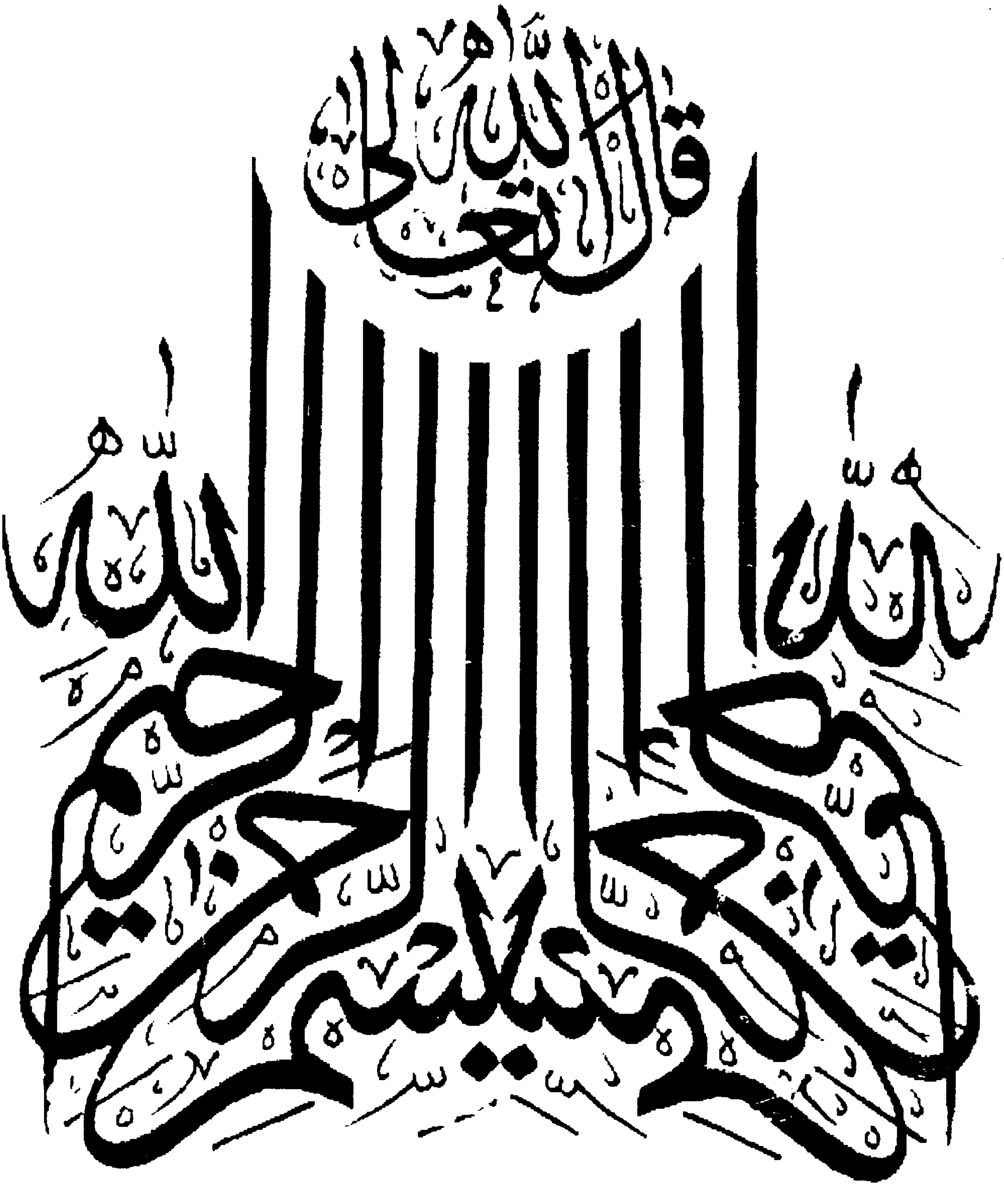
قال الله تعالى
بسم الله الرحمن الرحيم

مجتمع علوم

دانشکده ریاضی

موضوع :

می‌نیمم کردن نرم ماتریس پس‌خورد حالت

رشته : ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

استاد راهنما : دکتر سید مهدی کرباسی

استاد مشاور : دکتر فرید (محمد) مالک

دانشجو : حسن رسولی شورکی

سال تحصیلی ۸۱ – ۸۰

تقدیم به

روان پاک پدرم

و مهربانترین یار زندگیم ، مادر

«من علمنی حرفاً فقد صیرنی عبداً»

بر خود واجب می‌دانم تا مراتب امتنان و تشکر خود را از همه عزیزانی که اینجانب را در طی این تحقیق کمک و مساعدت نمودند و یا به نحوی مرا مورد لطف و عنایت قرار دادند، اعلام نمایم.

از استاد عالیقدر و دلسوز جناب آقای دکتر سید مهدی کرباسی که هدایت این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در تمام مراحل تحقیق با راهنمایی‌های عالمانه و مدبرانه، اینجانب را یاری نموده‌اند،صمیمانه تشکر و سپاسگزاری می‌نمایم.

از مساعدتهای بی‌دریغ استاد بزرگوار جناب آقای دکتر فرید مالک که به عنوان استاد مشاور قبول همکاری فرمودند،صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم و از صمیم قلب از ایزد منان برای ایشان توفیق روزافزون را مسئلت می‌نمایم.

از اساتید عزیز جناب آقای دکتر مهدی دهقان ریاست محترم دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیر کبیر و آقای دکتر مظاهری که در امر داوری قبول زحمت فرموده‌اند تشکر می‌کنم.

همچنین از زحمات و ارشادات جناب آقای دکتر دواز،جناب آقای انوریه، جناب آقای فرشی ، جناب آقای میرحسینی ، سرکار خانم عابدینی، سرکار خانم راست‌رو و سرکار خانم مظفری کمال تشکر و قدردانی را دارم و از درگاه خداوند موفقیت این عزیزان را خواهانم.

در پایان از زحمات برادر عزیزم محمد حسین رسولی و خانواده محترم همسرم تشکر می‌کنم و از خداوند متعال سلامتی و توفیق روزافزون ایشان را خواهانم.

حسن رسولی

بسمه تعالی

حوزه معاونت آموزشی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

صورتجلسه دفاع پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

نام و نام خانوادگی:	حسن رسولی شورکی
رشته:	ریاضی کاربردی
عنوان پایان نامه:	مینیمم سازی نرم ماتریس پس خورد حالت
استاد راهنما:	دکتر سیدمهدی کرباسی
استاد مشاور:	دکتر فرید(محمد) مالک
متخصص و صاحبنظر از دانشگاه یزد:	دکتر حمید مظاهری
متخصص و صاحبنظر خارج از گروه:	دکتر مهدی دهقان
نماینده تحصیلات تکمیلی:	مهری راسترو

امتیازات بدست آمده (بر اساس ماده چهار آیین نامه آموزشی) به شرح ذیل می‌باشد:

۱- میزان انطباق محتوی با عنوان پایان‌نامه	امتیاز از ۱ تا ۲۰	۲۰
۲- اهمیت نظری، توسعه‌ای، کاربردی، موضوع تحقیق	امتیاز از ۱ تا ۲۰	۱۹
۳- نحوه ارائه، کیفیت دفاع و چگونگی پاسخگویی به سوالات	امتیاز از ۱ تا ۲۰	۱۹
٤- کیفیت تجزیه و تحلیل و انسجام مطالب	امتیاز از ۱ تا ۲۰	۱۸
٥- توانایی دانشجو در نتیجه گیری و اهمیت نتایج بدست آمده از لحاظ بنیادی، توسعه‌ای و کاربردی	امتیاز از ۱ تا ۲۰	۱۹
٦- نحوه نگارش	امتیاز از ۱ تا ۲۰	۱۹

دفاع از پایان‌نامه مورد تایید هیات داوران قرار گرفت.

و با نمره به عدد ۱۹ با حروف نوزده تمام و امتیاز عالی به تصویب رسید.

امضاء هیات داوران

۱-

۲- فرید مالک

۳- مظاهری

٤-

٥- مهدی دهقان

٦-

تاریخ دفاع: ۸۰/۱۱/۱٦

مدیر گروه

چکیده :

ماتریس پس خورد حالت سیستمهای چند متغیره منحصر به فرد نیست و در حالت کلی تابع پارامترهای آزادش می‌باشد.بنابراین انتظار می‌رود که برای این گونه سیستمها بتوان ماتریسهای مختلفی با می‌نیمم نرم به دست آورد.تاکنون چندین روش متفاوت برای می‌نیمم کردن نرم ماتریس پس خورد حالت بررسی شده است.یک مطالعه موردی در یک مقاله جدید، برای یک سیستم خاص، سه ماتریس پس خورد حالت با یک می‌نیمم نرم به دست داده است.

در این پایان نامه ضمن بررسی تعدادی از روشهای موجود، ماتریس پس خورد حالت با پارامترهای غیر خطی که اخیراً به دست آورده شده است را برای می‌نیمم کردن نرم به کار برده‌ایم و نشان داده‌ایم که با به کارگیری پارامترهای غیر خطی می‌توان نرم کمتری نسبت به آنچه قبلاً انجام شده است به دست آورد.امید می‌رود که برای آن بتوان الگوریتمی نیز ساخت .

به نام خدا

فهرست :

فصل اول

تعاریف و پیش نیازها

۱.۱ پیش نیازهای ریاضی

۱.۱.۱ تعریف :

یک نرم ماتریسی بر مجموعهٔ تمام ماتریسهای $n \times n$ حقیقی،یک تابع حقیقی مانند $\|\cdot\|$ است که بر این مجموعه تعریف شده است و به ازای تمام ماتریسهای A, B و تمام اعداد حقیقی α در شرایط زیر صدق می‌کند:

آ) $\|A\| \geq \circ$

ب) $\|A\| = \circ$ اگر وتنها اگر $A = o$

پ) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$

ت) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

ث) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

۲.۱.۱ قضیه :

هر گاه $\|\cdot\|$ یک نرم برداری روی R^n باشد،آن گاه رابطه

$$\|A\| = \underset{\|x\| = ۱}{Max} \|Ax\|$$

یک نرم ماتریسی بر مجموعه تمام ماتریسهای حقیقی تعریف می‌کند که نرم طبیعی القا شده به وسیله $\|\cdot\|$ نامیده می‌شود.

۳.۱.۱ قضیه :

هر گاه $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد آن گاه

$$\|A\|_\infty = Max \sum_{j=۱}^{n} | a_{ij} | \qquad ۱ \leq i \leq n$$

۴.۱.۱ قضیه :

هرگاه A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد،آن گاه

آ) $\|A\|_۲ = [\rho(A^t A)]^{\frac{۱}{۲}}$

ب)به ازای هر نرم طبیعی $\|\cdot\|$ ، $\rho(A) \leq \|A\|$

که $\rho(A)$ شعاع طیفی A نامیده می‌شود و برابر است با:

$$\rho(A) = Max\{|\lambda_i| : \text{است A یک مقدار ویژه } \lambda_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$

۵.۱.۱ تعریف :

نرم فروبنیوس ماتریس $m \times n$ حقیقی A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\| A \|_F = \{(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)\}^{\frac{1}{2}}$$

۶.۱.۱ قضیه :

$$\| A \|_F^2 = tr(AA^t) = tr(A^t A)$$

اثبات :

قرار می‌دهیم :

$$C = AA^t$$

در این صورت

$$c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

از طرفی

$$tr\ C = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \|A\|_F^2$$

۷.۱.۱ تعریف :

یک ماتریس $n \times n$ ، A ،اصطلاحاً پوچ توان از رتبه k خوانده می‌شود اگر $A^{k-1} \neq 0$ و $A^k = 0$

۸.۱.۱ قضیه(صورت متعارف ژردان) :

فرض کنید A ماتریس حقیقی با مقادیر ویژه حقیقی $(j = 1, \cdots, k)$ ، λ_j و مقادیر ویژه مختلط $(j = k+1, \ldots, n)$ ، $\lambda_j = a_j \pm ib_j$ باشد. آن گاه یک پایهٔ

$$\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \ldots, v_n, u_n\}$$

برای R^{2n-k} وجود دارد که در آن $(j = 1, \ldots, k)$ ، v_j و $(j = k+1, \ldots, n)$ ، $w_j = u_j + iv_j$ بردارهای

ویژه تعمیم یافته A هستند.همچنین ماتریس وارون پذیر

$$P = [v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \ldots, v_n, u_n]$$

موجود است به گونه‌ای که

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & O \\ & & \ddots & \\ & O & & B_r \end{bmatrix}$$

که در آن بلوکهای جوردن ابتدایی $(j = 1, 2, \ldots, r)$, $B = B_j$ به ازای λ (یکی از مقادیر ویژه حقیقی A)به شکل زیر است :

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

و به ازای $\lambda = a + ib$ به صورت زیر می‌باشد:

$$B = \begin{bmatrix} D & I_2 & o & \ldots & o \\ o & D & I_2 & \ldots & o \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ o & o & \ldots & D & I_2 \\ o & o & \ldots & o & D \end{bmatrix}$$

که در آن

$$D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad , \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲.۱ پیش نیازهای کنترل

۱.۲.۱ تعریف :

معادلات دیفرانسیل تعریف شده زیر

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \qquad (2)$$

که در آن t متغیر زمان و $x \in R^n$ (موسوم به بردار حالت)و $u \in R^m$ (موسوم به بردار ورودی)و $y \in R^r$ (موسوم به بردار خروجی)معادلات حالت یک سیستم خطی نامیده می‌شوند.

۲.۲.۱ تعریف :

اگر ماتریسهای ، $A(t)$، $B(t)$، $C(t)$ و $D(t)$ که در حالت کلی تابع زمان هستند،فقط مقادیر ثابتی باشند ،سیستم را سیستم خطی ناوردای زمانی گویند.

۳.۲.۱ تعریف :

سیستم تعریف شده با معادلات (۱) و (۲) را کاملاً کنترل پذیر گویند اگر بتوان حالت سیستم را از بردار دلخواه $x(\circ)$ به نام بردار حالت اولیه در لحظه $t_\circ$ به بردار دلخواه دیگر $x(\nu)$ در لحظه t_ν رساند.(رافائل ۱۹۷۲ [۱])

۴.۲.۱ تعریف :

کنترل سیستم یعنی انتخاب ورودی سیستم،$u(t)$، به گونه‌ای که رفتار سیستم حاصل تحت کنترل باشد بدین ترتیب که

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} x(t) \longrightarrow x_e$$

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} y(t) \longrightarrow y_e$$

به طوری که در آن x_e و y_e مقادیر از پیش تعریف شده بردار حالت و خروجی می‌باشند و در بررسی تحلیلی سیستم‌ها،این مقادیر برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند.

۵.۲.۱ تعریف :

برای سیستم توصیف شده با معادله حالت (۱)،ماتریس کنترل پذیری Q را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$Q = [B, AB, \ldots, A^{n-1}B] \tag{۳}$$

و اگر ستونهای ماتریس Q فضای R^n را تولید کند($rank(Q) = n$)،سیستم را کاملاً کنترل پذیر گویند.(پوپوف ۱۹۷۲ [۲])

۶.۲.۱ تعریف :

اگر بردار ورودی $u(t)$ متناسب با بردار حالت $x(t)$ انتخاب شود یعنی

$$u(t) = Kx(t) \tag{۴}$$

آن گاه K را ماتریس پس خورد حالت و اگر متناسب با بردار خروجی $y(t)$ انتخاب کنیم یعنی

$$u(t) = Ky(t) \tag{۵}$$

آن گاه ماتریس K را ماتریس پس خورد خروجی گویندو روابط (۳) و (۴) را قانون کنترل نامند.

۷.۲.۱ تعریف :

اگر قانون کنترل را در معادله حالت (۱) جایگذاری کنیم،داریم

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) = \Gamma x(t) \tag{۶}$$

ماتریس A را ماتریس حلقه باز سیستم و ماتریس Γ را ماتریس حلقه بسته سیستم گویند.

۸.۲.۱ تعریف سیستمهای خطی گسسته زمانی :

سیستمهای خطی گسسته زمانی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

آ)سیستمهای خطی که ذاتاً گسسته هستند.

ب)سیستمهای خطی که ذاتاً گسسته نیستند و ما به اهدافی آنها را گسسته می‌کنیم.

سیستمهای گسسته زمانی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i) \\ y(i) &= Cx(i) + Du(i) \end{aligned} \tag{۷}$$

حال اگر

$$u(i) = Kx(i) \tag{۸}$$

آنگاه

$$x(i+1) = Ax(i) + BKx(i) = (A+BK)x(i) = \Gamma x(i) \tag{۹}$$

فرض کنید ماتریس K به گونه‌ای تعیین شده باشد که شعاع طیفی Γ بزرگتر از واحد باشد،در این صورت Γ دارای مقدار ویژه‌ای با قدر مطلق بزرگتر از واحد است و حال اگراین مقدار ویژه را λ بنامیم و $v = x(0)$ بردار

ویژه نظیر آن باشد، آن گاه

$$x(k) = \Gamma^k x(0) \Longrightarrow x(k) = \lambda^k v \Longrightarrow \|x(k)\| = |\lambda|^k \|v\| \qquad (10)$$

با توجه به این که $|\lambda| > 1$ داریم

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} x(k) \longrightarrow \infty \qquad (11)$$

که برای یک سیستم گسسته معمولاً چنین وضعی مطلوب نیست و دیگر سیستم تحت کنترل نخواهد بود.

بنابراین در این حالت باید ماتریس K را به گونه‌ای تعیین کنیم که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته سیستم دارای قدر مطلق کمتر از واحد باشند و یا به عبارت دیگر

$$\rho(\Gamma) < 1 \qquad (12)$$

باشد که این مسأله را تخصیص مقادیر ویژه می‌نامند.

در حالتی که سیستم به صورت $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = (A + BK)x(t) = \Gamma x(t)$ باشد داریم:

$$x(t) = exp(\Gamma t)x(0) \qquad (13)$$

بدیهی است چنانچه تمام مقادیر ویژه Γ در سمت چپ صفحهٔ مختلط قرار گیرند آن گاه

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \longrightarrow \infty} exp(\Gamma t)x(0) = 0 \qquad (14)$$

و بنا به تعریف سیستم تحت کنترل خواهد بود.

۹.۲.۱ تعریف :

اگر قسمت حقیقی مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته منفی باشد سیستم را پایدار مجانبی گویند و در صورتی که قسمت حقیقی هیچ یک از آنها مثبت نباشد سیستم را پایدار و در صورتی که قسمت حقیقی برخی از آنها مثبت باشد سیستم را ناپایدار گویند.

۱۰.۲.۱ قضیه :

اگر سیستم توصیف شده با معادله حالت (۱) کاملاً کنترل پذیر باشد آن گاه می‌توان با تعیین K مناسب مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته را به نقاط دلخواه در روی صفحه مختلط انتقال داد و برعکس.(پوپوف ۱۹۷۲ [۲])