بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکدهٔ علوم- گروه ریاضی

پایان نامه جهت دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد

در

ریاضی محض

موضوع:

پیرامون گراف های هم ماکسیمال حلقه ها

نگارش:

زهرا غروی الخوانساری

استاد راهنما:

دکتر محمد جواد نیک مهر

شهریور ۱۳۸۹

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی تاسیس ۱۳۰۷	**تأییدیه هیأت داوران**	شماره: تاریخ: ۱۳۸۹/۶/۲۹

هیأت داوران پس از مطالعهٔ پایان نامه و شرکت در جلسهٔ دفاع از پایان نامه تهیه شده تحت عنوان:

پیرامون گراف های هم ماکسیمال حلقه ها

توسط **خانم زهرا غروی الخوانساری** صحت و کفایت تحقیق انجام شده را برای اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ **ریاضی محض- جبر** در تاریخ **۱۳۸۹/۶/۲۹** مورد تأیید قرار می دهند.

۱- استاد راهنما	جناب آقای دکتر محمد جواد نیک مهر	امضاء
۲- ممتحن داخلی	جناب آقای دکتر شعبان قلندرزاده	امضاء
۳- ممتحن خارجی	جناب آقای دکتر مهدی علائیان	امضاء
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	جناب آقای دکتر شعبان قلندرزاده	امضاء

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی تاسیس ۱۳۰۷	**اظهارنامه دانشجو**	**شماره:** **تاریخ:** ۱۳۸۹/۶/۶

اینجانب....زهرا غروی الخوانساری.... **به شماره دانشجویی**...۸۷۰۵۷۱۴...**دانشجوی کارشناسی ارشد رشته**... ریاضی محض...**گرایش** .... جبر ....**دانشکده**..... علوم.....دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می نمایم که تحقیقات ارائه شده در پایان نامه با عنوان

.... پیرامون گراف های هم ماکسیمال حلقه ها ....

با راهنمایی استاد محترم جناب آقای دکتر......... محمد جواد نیک مهر..............، توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده در این پایان نامه مورد تأیید می باشد، و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. بعلاوه گواهی می نمایم که مطالب مندرج در پایان نامه تا کنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان نامه چارچوب (فرمت) مصوب دانشگاه را بطور کامل رعایت کرده ام.

امضاء دانشجو: زهرا غروی

تاریخ: ۱۳۸۹/۶/۶

بسمه تعالی

تاسیس ۱۳۰۷ دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی	**حق طبع و نشر و مالکیت نتایج**	شماره: تاریخ:

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می کنم.

تشکر و قدردانی

سپاس خدایی را که ستایشگران نمی توانند حق سپاسش را ادا کنند و حسابگران از شمارش نعمت های بی پایانش عاجزند و تلاشگران در ادای حقش فرومانند. خدایی که افکار بلند به قله عظمتش دست نیابند و ژرف نگران به عمق ذاتش پی نبرند. خدایی که نه کلام گنجایش تعریفش را دارد و نه زمان فرصت شمارشش را.

اکنون که با استعانت و عنایات حضرت حق، تدوین و نگارش این رساله پایان یافته است، بر خود فرض می دانم از استاد گرامی و ارجمند جناب آقای دکتر نیک مهر که در تمام مراحل این پژوهش با دقت، ژرف نگری، شکیبایی و علم و عمل راهنماییم فرمودند و نیز از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر قلندرزاده که با صبر، متانت، چاره جویی و چاره اندیشی، راهنمایی های کارگشایی در اختیار اینجانب قرار دادند، خالصانه تشکر و قدردانی نمایم. همچنین، از جناب آقای دکتر علائیان که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را کشیدند، تشکر می کنم.

از پدر و مادر عزیزم که در تمام مراحل زندگی راهنما و مشوق من بودند و تمام موفقیتهای من مرهون فداکاری های ایشان می باشد، سپاسگزارم.

چکیده

در دودهۀ اخیر، مقالات زیادی پیرامون اختصاص دادن یک گراف به یک حلقه ارائه شده است. هدف از معرفی این گرافها بکار گیری یک شیء ترکیبیاتی برای درک بهتر مفهوم مجرد حلقه ها ست. در مقالۀ [P.K. Sharma, S.M. Bhatwadekar, "A note on graphical representation of rings", J. Algebra 176 (1995) 124-127] نویسندگان، گرافی را روی حلقۀ جابجایی و یکدار R تعریف کرده اند که رأسهای آن، اعضای R هستند و دو رأس متمایز a و b مجاورند اگر و تنها اگر $Ra+Rb=R$ (Ra و Rb را در این حالت هم ماکسیمال گوئیم). در این پایان نامه ما ساختار گرافی فوق را درنظر می گیریم، گراف مورد نظر را با $\Gamma(R)$ نشان می دهیم و آن را *گراف هم ماکسیمال*[1] حلقۀ R می‌نامیم. رابطۀ متناهی بودن R با $\Gamma(R)$ را بررسی می کنیم و نشان می دهیم که $\chi(\Gamma(R))<\infty$ اگر و تنها اگر R یک حلقۀ متناهی باشد، که درآن $\chi(G)$ عدد رنگی گراف G است.

ما زیر گراف $\Gamma_2(R)$ از $\Gamma(R)$ را در نظر می گیریم که توسط اعضای غیر یکۀ R القا می شود. خواص متعددی از این زیرگراف نظیر همبندی، قطر، عدد خوشه ای آن را بررسی می کنیم. قادر خواهیم بود حلقه های R که به ازای آنها $\Gamma_2(R)-J(R)$ جنگل است یا گرافی اویلری است، مشخص کنیم، که در آن $J(R)$ رادیکال جیکوبسن R است. به علاوه، تمام حلقه های متناهی R که گونای $\Gamma_2(R)$ (به همین ترتیب $\Gamma(R)$) حداکثر ۱ است، بدست می آوریم.

ما همچنین ساختار گرافی مورد نظر را برای حلقه‌های ناجابجایی یکدار تعمیم می‌دهیم. در این حالت، گرافی را به حلقۀ R اختصاص می‌دهیم که رئوس آن عناصر غیریکۀ R هستند، به طوریکه دو رأس متمایز a و b مجاورند اگر و تنها اگر $Ra+Rb=R$ و برای راحتی $\Gamma(R)$ را برای این گراف بکار می‌بریم. ما خواص متعددی از $\Gamma(R)$ را پیدا می‌کنیم. نشان می‌دهیم اگر R آرتینی چپ باشد آنگاه $\Gamma(R)-J(R)$ همبند است و اگر $\Gamma(R)-J(R)$ یک جنگل باشد، آنگاه $\Gamma(R)-J(R)$ یک گراف ستاره است. برای میدان متناهی $\mathbb{F}_q$، ثابت‌های عددی مختلفی از $\Gamma(M_n(\mathbb{F}_q))$ را مشخص می‌کنیم، مانند درجۀ مینیمال، درجۀ ماکسیمال، همبندی، عدد خوشه‌ای و نیز عدد رنگی.

یک سؤال معمول که ممکن است مطرح شود آنست که اگر R و S دو حلقۀ دلخواه باشند و داشته باشیم $\Gamma(R)\cong\Gamma(S)$، آیا آنگاه $R\cong S$ برقرار است؟ ما جواب این سؤال را برای حالت جابجایی و ناجابجایی حلقه ها بررسی می کنیم.

واژه های کلیدی: حلقه، گراف هم ماکسیمال، ایده آل چپ ماکسیمال، حلقۀ ماتریسها، قطر، گونا.

---
[1] *co-maximal graph*

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست شکلها

فهرست علائم واختصارات

علائم جبری

حلقهٔ اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
عدد اصلی مجموعهٔ A	$\lvert A\rvert$
میدان متناهی با q عضو	$\mathbb{F}_q$
حلقهٔ ماتریسهای $n\times n$ که درایه های آن اعضای S هستند	$M_n(S)$
ماتریس مقدماتی	E_{ij}
مرتبهٔ عنصر x در گروه	$o(x)$
گروه دوری تولید شده توسط x	$\langle x\rangle$
مجموعهٔ S بدون عنصر صفر یعنی $S-\{0\}$	S^*
مجموعهٔ تمام مقسوم علیه های صفر حلقهٔ R	$Z(R)$
ضرب مستقیم حلقه های $\{R_i\}$	$\prod_i R_i$
مشخصهٔ حلقهٔ R	$char\ R$
مجموعه عناصر خودتوان حلقهٔ جابجایی R	$I(R)$
گروه ضربی عناصر وارونپذیر حلقهٔ R	$U(R)$
گروه ماتریسهای $n\times n$ وارونپذیر روی حلقهٔ R	$GL(n,R)$
رادیکال جیکوبسن حلقهٔ R	$J(R)$
ایده آل عناصر پوچ توان در حلقهٔ جابجایی R	$Nil(R)$
مجموعهٔ ایده آلهای ماکسیمال حلقهٔ جابجایی R	$Max(R)$
مجموعهٔ ایده آلهای چپ ماکسیمال حلقهٔ R	$Max_l(R)$

علائم مربوط به نظریهٔ گراف

مجموعهٔ رئوس گراف G	$V(G)$
مجموعهٔ یالهای گراف G	$E(G)$
عدد استقلال گراف G	$\alpha(G)$
عدد رنگی گراف G	$\chi(G)$

درجه ماکسیمم گراف G	$\Delta(G)$
درجهٔ مینیمم گراف G	$\delta(G)$
عدد همبندی گراف G	$\kappa(G)$
عدد خوشه ای گراف G	$\omega(G)$
گراف دوری q رأسی	$C_{\boldsymbol{q}}$
قطر گراف G	$d(G)$ یا $diam(G)$
کمر گراف G	$g(G)$
گونای گراف G	$\gamma(G)$
مکمل گراف G	$\bar{G}$
کاهش گراف G	$\tilde{G}$
گراف کامل دوبخشی با بخشهای m و n رأسی	$K_{m,n}$
گراف کامل n رأسی	K_n

یادداشتی برای خواننده

همانطور که در فهرست مشاهده شد، هر فصل متشکل از چند بخش است. در یک فصل، برای شماره گذاری بخشهای همان فصل دیگر شمارهٔ فصل را ذکر نمی کنیم. به همین ترتیب، در یک فصل برای ارجاع به یک قضیه، لم، گزاره و... که در همان فصل ظاهر شده است، شمارهٔ فصل را در شمارهٔ قضیه قید نمی کنیم. بنابراین، اشاره به لم ۷–۱، هرجا در فصل ۳، منظور لم ۳–۷–۱ است. همچنین، در یک فصل، در صورت ارجاع به یک قضیه، لم، گزاره و... از فصل دیگر، شمارهٔ فصل به شمارهٔ قضیه، لم، گزاره و... الحاق می شود. مثلاً، درفصل ۳، اشاره به لم ۱–۲–۸، منظور لم ۲–۸ از فصل ۱ است.

مقدمه

مطالعۀ ساختارهای جبری، با استفاده از نظریۀ گراف، تبدیل به موضوع پژوهشی مهیّجی در دهۀ اخیر شده است. مقالات زیادی در زمینۀ اختصاص دادن یک گراف به یک حلقه وجود دارد. در [8]، Beck، برای اولین بار ایدۀ *گراف مقسوم علیه صفر*[1] را برای یک حلقۀ جابجایی یکدار مطرح کرد. او $\Gamma_0(R)$ را گرافی در نظر گرفت که رأسهای آن عناصر R هستند و دو رأس متمایز a و b مجاورند اگر و تنها اگر $ab = 0$. او بیشتر در مورد گراف حلقه های متناهیاً رنگ پذیر تحقیق کرد و در مورد برخی حلقه ها ثابت کرد که عدد رنگی و عدد خوشه ای آنها با هم برابر است و حدس زد که این برابری را می توان به تمام حلقه ها تعمیم داد، اما در [4]، Anderson و Naseer، توانستند مثالی از یک حلقۀ موضعی متناهی با عدد رنگی ۶ و عدد خوشه ای ۵ ارائه دهند. در [5]، نویسندگان زیرگرافی از $\Gamma_0(R)$ را مطالعه کرده اند که مجموعۀ رئوس آن $Z(R)-\{0\}$ (مجموعۀ مقسوم علیه های صفر غیر صفر) است. سپس ایدۀ گراف مقسوم علیه صفر در [20] به حلقه های ناجابجایی تعمیم داده شد وخواص متعددی از این گراف در [20] و [2] بدست آمد.

اخیراً، در [21]، Sharma و Bhatwadekar، ایدۀ گراف هم ماکسیمال را روی یک حلقۀ جابجایی و یکدار معرفی کرده اند. آنها گرافی را روی حلقۀ جابجایی و یکدار R تعریف کردند، که آن را با نماد $\Gamma(R)$ نشان می دهند و رأسهایش، اعضای R هستند و دو رأس متمایز a و b مجاورند اگر و تنها اگر $Ra+Rb=R$. آنها نشان دادند که $\chi(\Gamma(R)) < \infty$ اگر و تنها اگر R یک حلقۀ متناهی باشد، که در آن $\chi(G)$ عدد رنگی گراف G است. بعداً، در [14]، نویسندگان همبندی و قطر گراف $\Gamma_2(R)-J(R)$ را مشخص کردند که در آن $\Gamma_2(R)$ زیرگرافی از $\Gamma(R)$ است که توسط عناصر غیر یکه القا می شود و $J(R)$ رادیکال جیکوبسن حلقۀ R است. در [23]، Wang، گراف هم ماکسیمال را برای حلقه های ناجابجایی تعریف کرده است. او $\Gamma(R)$ را گرافی معرفی کرد که رئوس آن اعضای غیر یکۀ حلقۀ یکدار و نه لزوماً جابجایی R هستند و دو رأس متمایز a و b مجاورند اگر و تنها اگر $Ra+Rb=R$ و به مطالعۀ رفتار و ویژگیهای $\Gamma(R)$ می پردازد.

ما در این پایان نامه، به مطالعه و بررسی فراتر ساختار گرافی تعریف شده توسط Sharma و Bhatwadekar می‌پردازیم.

در فصل اول، بخش ۱، تعاریف و مفاهیم مقدماتی از نظریۀ گراف را معرفی می کنیم. سپس در بخش ۱–۲، موضوع جالب نشاندن گرافها از نظریۀ گراف توپولوژیکی را مطرح می کنیم و تعاریفی از این

[1] *zero-divisor graph*

مبحث را ارائه می دهیم. مفاهیم مربوط به این مبحث نظیر گراف مسطح، گونای گراف وگراف چنبره ای بعداً در بخش ۳–۷، ۳–۸ و ۳–۹ مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

در فصل دوم، برخی مفاهیم و قضایای پیش نیاز از نظریهٔ حلقه ها و مدولها ارائه می شود که در فصل های بعد از آنها استفاده خواهد شد.

در فصل سوم، گراف هم ماکسیمال را برای حلقه های جابجایی یکدار مطالعه می کنیم. در این فصل گرافهای دوبخشی، کاربردهای گراف $\Gamma(R)$، حلقه های تمیز و قطر گراف هم ماکسیمال بررسی می شود. در بخش ۳–۴، اثبات نتیجهٔ اصلی از [21] را خواهیم آورد یعنی نشان می دهیم $\chi(\Gamma(R)) < \infty$ اگر و تنها اگر R یک حلقهٔ متناهی باشد. در بخش ۳–۵، خواص متعددی از $\Gamma_۲(R)$ را بدست می‌آوریم و حلقه‌هایی مانند R را که به ازای آنها $\Gamma_۲(R)-J(R)$ یک جنگل یا گرافی اویلری است، مشخص می‌کنیم و نیز نشان می‌دهیم که $\omega(\Gamma_۲(R)) = |Max(R)|$ که در آن $\omega(G)$ عدد خوشه ای گراف G است. در بخش ۳–۶، نشان داده می شود که اگر R و S دو حلقهٔ دلخواه باشند و داشته باشیم $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$، آنگاه لزوماً $R \cong S$ در حالت کلی برقرار نیست. همچنین نشان می دهیم اگر R و S دو حلقهٔ متناهی نیمه- موضعی باشند و R تقلیل یافته باشد، آنگاه $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ اگر و تنها اگر $R \cong S$. دربخشهای ۳–۷، ۳–۸ و ۳–۹، به مطالعهٔ گونای گراف هم ماکسیمال می پردازیم و به علاوه، تمام حلقه‌های R را که گونای $\Gamma_۲(R)$ (بترتیب $\Gamma(R)$) حداکثر یک است، پیدا می‌کنیم.

در فصل چهارم، به مطالعهٔ گراف هم ماکسیمال حلقه های ناجابجایی یکدار پرداخته خواهد شد. در این فصل که نتایج اصلی آن از [23] آورده شده است، نشان می دهیم اگر R آرتینی چپ باشد آنگاه $\Gamma(R)-J(R)$ همبند است و اگر $\Gamma(R)-J(R)$ یک جنگل باشد آنگاه $\Gamma(R)-J(R)$ یک گراف ستاره است که در آن $\Gamma(R)$ گرافی است که رئوس آن عناصر غیر یکهٔ R هستند. همچنین، به مطالعهٔ گراف هم ماکسیمال حلقهٔ ماتریسها می پردازیم و همبندی، درجهٔ مینیمال، درجهٔ ماکسیمال، عدد خوشه‌ای و نیز عدد رنگی را برای $\Gamma(M_n(\mathbb{F}_q))$ بدست می آوریم که در آن $M_n(\mathbb{F}_q)$، حلقهٔ ماتریسهای $n \times n$ روی میدان متناهی $\mathbb{F}_q$ است. در بخش ۴–۳، نشان می‌دهیم برای هر میدان متناهی F و عدد صحیح $n \geq ۲$، اگر R یک حلقهٔ یکدار باشد و $\Gamma(R) \cong \Gamma(M_n(F))$، آنگاه $R \cong M_n(F)$. همچنین نشان می‌دهیم اگر R و S دو حلقهٔ متناهی جابجایی و یکدار باشند و $n,m \geq ۲$ به قسمی که $\Gamma(M_n(R)) \cong \Gamma(M_m(S))$، آنگاه $n = m$ و $R \cong S$، در صورتیکه R تقلیل یافته باشد.

فصل اول

مفاهیم پیش نیاز از نظریهٔ گراف

۱- تعاریف مقدماتی گراف

در این فصل مفاهیم وتعاریفی که از نظریهٔ گراف در این پایان نامه استفاده شده اند، معرفی می گردند.

تعریف ۱-۱. گراف G، برابر زوج مرتب (V,E) است، که $V=V(G)$ مجموعه ای شامل تعداد دلخواهی عضو و مجموعهٔ $E=E(G)$ شامل تعداد دلخواهی از زیرمجموعه های دو عضوی مجموعهٔ V است. مجموعهٔV را *رئوس*[۱] گراف G و مجموعهٔ E را *یالهای*[۲] گراف G می نامند. معمولاً، بجای $V(G)$ می‌نویسیم G.

بطور شهودی می توان گراف را با تعدادی نقطه در صفحه که در تناظر یک به یک با اعضای V (رأسها) هستند، نشان داد. برای ترسیم یالها، اگر $\{x,y\}\in E$ که $x,y\in V$، آنگاه کافی است پاره خطی بین دو نقطهٔ مربوط به x , y رسم کنیم.

تعریف ۱-۲. *مرتبهٔ*[۳] گراف G را با $|G|$ نشان می‌دهیم و آن عدد اصلی مجموعهٔ $V(G)$ است.

تعریف ۱-۳. دو رأس x , y در G را *مجاور*[۴] گوئیم، هرگاه یالی بین x , y موجود باشد.

تعریف ۱-۴. اگر v,u دو رأس از یک گراف باشند و زوج نامرتب $\{u , v\}$ یالی باشد که با e نشان داده شده است، گوئیم e، u و v را به هم *وصل می کند*[۵] یا اینکه e، یالی بین u و v است. در این حالت، رأسهای v,u را *متلاقی در*[۶] e گوئیم و همچنین e را *متلاقی با*[۷] (یا گذرنده از) هردوی v,u گوئیم.

تعریف ۱- ۵. در یک گراف، هرگاه دو یال یا بیشتر همگی یک جفت یکسان از دو رأس متمایز را به هم وصل کنند، یالهای *موازی*[۸] نامیده می شوند. یال نشان داده شده بوسیلهٔ یک زوج نامرتب را، که دو عنصر این زوج نامرتب متمایز نیستند، یک *طوقه*[۹] می نامیم.

---

[۱] *vertex*
[۲] *edge*
[۳] *order*
[۴] *adjacent*
[۵] *joins*
[۶] *incident on*
[۷] *incident to*
[۸] *parallel*
[۹] *loop*

تعریف ۱–۶. یک گراف *ساده*[۱] گرافی است که هیچ یال موازی و هیچ طوقه ای نداشته باشد. (از این به بعد در تمام این پایان نامه به طور مختصر از واژۀ *گراف* بجای *گراف ساده* استفاده می کنیم.)

تعریف ۱–۷. گرافی که هردو مجموعۀ رئوس ویالهای آن متناهی باشد، گراف متناهی است. یک گـراف نامتناهی، گرافی است که مجموعۀ رئوس یا مجموعۀ یالهای آن و یا هردوی این مجموعـه هـا نامتنـاهی باشد.

تعریف ۱– ۸. منظور از یک *گشـت*[۲] بـین دو رأس v و w در یـک گـــراف، یـک دنبالـۀ متنـاهیماننـد $v = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \ldots, e_n, v_n = w$ از رئوس و یالهای گراف است به قسمی که هـر یـال e_i در دنباله، رأسهای v_{i-1} و v_i را به هم وصل می کند. یک *گذر*[۳]، گشتی است که تمـام یالهـای آن متفـاوت باشند. یک گشت *بسته*[۴] گشتی است بین یک رأس وخودش. یک گشت بسته که در آن هیچ یالی تکـرار نشود، یک *مدار*[۵] است.

تعریف ۱–۹. یک گراف را *همبند*[۶] گوئیم هرگاه برای هر جفت از رأسهای متمایز w, v، دنبالهای متناهی متناهی از رأسهای متمایز $v = v_1, \ldots, v_n = w$ موجود باشد به قسمی که هر جفت $\{v_i , v_{i+1}\}$ یک یال باشد چنین دنبالهای را یک *مسیر*[۷] گوئیم. *طول* مسیر فوق برابر $n - ۱$ است واگر $w = v$ آنگاه مسیر فوق فوق *دوری*[۸] به طول $n - ۱$ است(در حقیقت، یک دور، مداری است که در آن هیچ رأس تکراری وجـود ندارد). یک گراف *ناهمبند*[۹]، گرافی است که همبند نباشد.

تعریف ۱–۱۰. دو رأس متمایز w, v را *همبند* گوئیم، هرگاه مسیری بین آن دو موجود باشـد. منظـور از *فاصلۀ*[۱۰] بین دو رأس همبند w, v، که آن را با $d(v, w)$ نشان می دهیم، طول کوتـاهترین مسـیر وصـل کنندۀ آن دو میباشد. اگر بین دو رأس w, v مسیری موجود نباشد، آنگاه می نویسیم $d(v, w) = \infty$.

---

[۱] *simple graph*
[۲] *walk*
[۳] *trail*
[۴] *closed walk*
[۵] *circuit*
[۶] *connected graph*
[۷] *path*
[۸] *cycle*
[۹] *disconnected graph*
[۱۰] *distance*

تعریف ۱–۱۱. *قطر*[۱] یک گراف همبند، که با $diam(G)$ یا بطور ساده تر با $d(G)$ نشان می دهیم برابراست با سوپریمم فاصله‌های بین رئوس یا به عبارتی

$d(G) = max$ {$d(u,v)$| u و v دو رأس متمایز در $V(G)$ هستند} .

تعریف ۱–۱۲. گرافی که در آن هر جفت از رأسهای متمایز بوسیلهٔ یک یال به هم وصل باشند، گراف *کامل*[۲] نامیده می‌شود. از نماد K_n برای گراف کامل با n رأس استفاده می‌کنیم. گراف K_1 که تنها یک رأس دارد و هیچ یالی ندارد، به گراف *بدیهی*[۳] معروف است.

نکتهٔ ۱–۱۳. قطر یک گراف، صفراست اگر گراف تنها یک رأس داشته باشد (گراف بدیهی) و یک گراف همبند با بیش از یک رأس دارای قطر ۱ است اگر و تنها اگر کامل باشد.

تعریف ۱–۱۴. *کمر*[۴] یک گراف که آن را با $g(G)$ نشان می‌دهیم، طول کوتاهترین دور در G است. اگر G شامل هیچ دوری نباشد، آنگاه $g(G) = \infty$ و G را یک *جنگل*[۵] گویند. گراف G را *درخت*[۶] گوئیم اگر اگر G همبند باشد و هیچ دوری نداشته باشد.

تعریف ۱– ۱۵. گراف G را *کلاً ناهمبند*[۷] گوئیم اگر مجموعهٔ یالها یعنی $E(G)$، مجموعه‌ای تهی باشد یعنی $E(G) = \phi$.

تعریف ۱–۱۶. فرض کنید $G = (V,E)$ گراف باشد و $v \in V$، آنگاه *درجهٔ*[۸] رأس v، که با $deg(v)$ نشان داده می شود، تعداد یالهایی از G است که از v می‌گذرند. درجهٔ مینیمال بین رئوس G را با $\delta(G)$ نشان می‌دهیم. همچنین $\Delta(G)$ بیشترین درجه رئوس می‌باشد. اگر $r = \delta(G) = \Delta(G)$، آنگاه تمام رئوس دارای درجهٔ یکسان هستند و G را *منتظم*[۹] از درجهٔ r یا rـ منتظم گوئیم. در این حالت می‌نویسیم $\deg G = r$.

---

[۱] *diameter*

[۲] *complete graph*

[۳] *trivial graph*

[۴] *girth*

[۵] *forest*

[۶] *tree*

[۷] *totally disconnected*

[۸] *degree*

[۹] *regular*