بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شیراز

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی(جبر و توپولوژی)

مدول های تصویری و زیر مدول های اول

توسط

معصومه شبانی

استاد راهنما:

دکتر حبیب شریف

آذر ۱۳۸۷

به نام خدا

اظهار نامه

اینجانب معصو مه شبانی (۸۵۰۸۸۸) دانشجوی رشته ی ریاضی گرایش جبر و توپولوژی دانشکده ی علوم اظهار می کنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خـودم بـوده و در جاهـایی کـه از منـابع دیگران استفاده کرده ام ، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته ام. همچنین اظهار مـی کـنم که تحقیق و موضوع پایان نامـه ام تکـراری نیسـت و تعهـد مـی نمـایم کـه بـدون مجـوز دانشـگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار ندهم. کلیه حقوق این اثر مطابق بـا آیـین نامه مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام و نام خانوادگی: معصومه شبانی

تاریخ و امضا:

۱۸/۶/۱۳۸۷

به نام خدا

مدول های تصویری و زیر مدول های اول

به وسیله ی :

معصومه شبانی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی

از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ی :

ریاضی

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه : ......عالی.............

دکتر حبیب شریف ، استاد بخش ریاضی (رئیس کمیته) ....

دکتر مجید ارشاد ، دانشیار بخش ریاضی ....

دکتر عبدالرسول عزیزی ، استاد یار بخش ریاضی ....

آذر ماه ۱۳۸۷

تقدیم

این پایان نامه هرچند کوچک را تقدیم می نمایم به اساتید گرانقدرم .آنانکه حـلاوت زنـدگی را در فتح قله های رفیع و ناشناخته ی دانش می جوینـد. همچنـین بـه پـدر و مـادر ارجمنـد و دلسوزم که دعای خیرشان همیشه پشتوانه و مددرسان حقیر بوده و تقدیم به همسر عزیزم که با فراهم نمودن محیطی آرام باعث شدند تا این مرحله از زندگی و فراگیری علـم و دانـش را بـا موفقیت طی کنم.

چراغ دلهایشان به نور خدا همواره فروزان باد.

سپاسگزاری

حمد و سپاس پروردگار یکتا که همه چیز از اوست.

خداوندا ! توفیقی عطا کن هر آنچه انجام می دهم برای تو و در مسیر رضای تو باشد و مرا توفیق ده در مقابل عالمان علم ،فضل و عمل متواضع باشم.پس با یاد تو و در راه تو بر خود لازم می دانم از رهنمودهای استادان محترم و گرانقدر **جناب آقای دکتر حبیب شریف** در مقام استاد راهنما و جناب آقای دکتر مجید ارشاد و جناب آقای دکتر عبدالرسول عزیزی در مقام استاد مشاوره که با صبوری و نیتی پاک حقیر را در نگارش و تنظیم این پایان نامه یاری نمودند تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از دیگر اساتید محترم که در وادی علم، راهنما و چراغ هدایت بوده و هستند ،صمیمانه نهایت تشکر و سپاسگذاری را دارم.

چکیده

مدول های تصویری و زیر مدول های اول

توسط
معصومه شبانی

در سراسر این پایان نامه R یک حلقه ی جابجایی، یکدار و مدول ها یکانی فرض می شوند.
ابتدا مدول اول را تعریف کرده و قضایای مقدماتی را که در فصل های بعد به آنها نیاز داریم، بیان می کنیم. در فصل دوم زیر مدول های اول R - مدول $R\times R$ را هنگامی که R یک دامنه ایده ال اصلی است، مشخص کرده و سپس تجزیه اولیه ی هر زیر مدول $R\times R$ را به مدول های اولیه بررسی می کنیم. در فصل سوم زیر مجموعه ی بسته ضربی مدول ها را تعریف کرده و ضمن ارائه ی قضیه اجتناب از ایده ال های اول، تعمیمی از آن به مدول ها که توسط لو $(C.P.Lu)$ در [۱۰] ارائه شده است را بدون اثبات آورده و کاربردی از آن را بیان می کنیم. در ادامه از لم زرن و زیر مجموعه های بسته ی ضربی و بسته اشباع شده برای بررسی دو موضوع زیر استفاده می کنیم.

۱- وجود زیر مدول های اول در بعضی حالات.

۲- اثبات این که بعضی از زیر مدول ها با ویژگی خاص در فرمول رادیکال صدق می کنند.

همچنین ثابت می کنیم هرگاه M یک R - مدول ضربی باشد، هر زیر مجموعه ی M مشمول در یک زیر مجموعه بسته ی اشباع شده ی M است. در پایان به مطالعه ی رادیکال زیر مدول های یک R - مدول تصویری خواهیم پرداخت و شرط لازم وکافی برای برقرار بودن تساوی $M-rad_RN=\sqrt{(N:M)}M$، هرگاه N یک زیر مدول از R - مدول تصویری M باشد را ارائه می دهیم.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

همان طور که می دانیم ایده آل های اول نقش اساسی در نظریه ی حلقه ها دارند. زیر مدول های اول به عنوان تعمیمی از مفهوم ایده آل های اول به مدول ها مطرح شده اند. در این راستا اولین فردی که مفهوم زیر مدول های اول را بعنوان تعمیمی از ایده آلهای اول ارائه داد دانز[1] بود[۴] . او بر روی حلقه های غیر جابجایی متمرکز بود. تحقیقات جدی در این زمینه از سال ۱۹۸۴ توسط آقای لو[2] با ارائه ی مقاله ی مرجع [۱۰] آغاز شد که بر روی حلقه های جابجایی متمرکز بود. او مفهوم رادیکال یک زیر مدول یعنی اشتراک تمام زیر مدول های اول حاوی آن مدول را مطرح کرد[۲۲].مکاسلند و مور[3]رادیکال مدول ها را در [۱۵] و [۱۶] بررسی کردند. بعضی ویژگی ها در جبر جابجایی توسط دیگران از جمله آقایان اسمیت، شریف، شریفی، عزیزی،ییلماز و خانم نمازی[4] به مدول ها تعمیم داده شد.

در این پایان نامه تلاش می کنیم تا بعضی از نتایج زیر را که توسط الکان و تیراس در[۱] بیان شده بررسی نماییم.

ابتدا زیرمدول های اول R –مدول $R\times R$ را هنگامی که R یک دامنه ی ایده آل اصلی است بررسی کرده و سپس تجزیه اولیه ی هر زیر مدول $R\times R$ را به زیر مدول های اولیه بیان می کنیم و در ادامه از لم زرن، زیر مجموعه های بسته ی ضربی و بسته ی اشباع شده برای بررسی

1 – *Dauns*　　2 – *C.P.Lu*　　3 – *R.L.McCasland, M.E.Moor*

4 – *P.F.Smith, H.Sharif, Y.Sharifi, A.Azizi, Yilmaz, S.Namazi*

دو موضوع زیر استفاده می کنیم.

۱- وجود زیر مدول های اول در بعضی حالات.

۲- اثبات اینکه بعضی از زیر مدول ها با ویژه گی خاص در فرمول رادیکال صدق می کنند. همچنین زیر مدول های یک مدول تصویری را که در فرمول رادیکال صدق می کنند مشخص می کنیم.

در سراسر این رساله R یک حلقه ی جابجایی، یکدار و مدول ها یکانی فرض می شوند.

تعریف۱- ۱- فرض کنید M یک R- مدول و C,B هر دو زیر مدول های M باشند، آنگاه مجموعه ی $\{r \in R : rC \subseteq B\}$ را با $(B:C)$ نشان می دهیم که یک ایده آل R است.

تعریف۱-۲- زیر مدول محض N از M را اول گوئیم اگر برای هر $r \in R$ و $m \in M$، $rm \in N$ نتیجه دهد که $rM \subseteq N$ یا $m \in N$. اگر N زیر مدول اولی از M باشد، آنگاه $P=(N:M)$ یک ایده آل اول Rاست و N را زیر مدول P- اول M گوئیم.

تعریف۱-۳- فرض کنید Mیک R- مدول باشد. $T(M)=\{m \in M : \exists 0 \neq r \in R; rm=0\}$، یک زیر مدول Mاست. اگر $T(M)=0$، Mرا فارغ از تاب گوییم واگر $T(M)=M$، M را تابدار گوییم.

مثال۱-۴- الف) هر ایده آل اول حلقه ی R، یک زیر مدول اول از R- مدول R است.

ب) در هر فضای برداری، هر زیر فضای سره یک زیر مدول اول است.

ج) زیر مدول تابدار $T(M)$ از M روی دامنه ی صحیح با شرط $T(M) \neq M$ یک زیر مدول اول M است.

د)صفر، زیر مدول اول R- مدول M است اگر و فقط اگر $Ann_R(M)=Z_R(M)$ باشد، جایی

که $Z_R(M)=\{r\in R:\exists 0\neq m\in M; rm=0\}$است.

تذکر:یک مدول ممکن است حاوی هیچ زیرمدول اول نباشد. برای مثال فرض کنید p عددی اول باشد.گروه جمعی $\mathrm{Z}_{p^\infty}=\left\{\frac{a}{p^n}+\mathrm{Z}:a\in \mathrm{Z},n\in \mathrm{N}\cup\{0\}\right\}$را به عنوان Z- مدول در نظر بگیرید. فرض کنید Nزیر مدول اولی از Z_{p^∞}باشد. می دانیم N توسط $\frac{1}{p^k}+\mathrm{Z}$ تولید می شود که k عدد صحیح و مثبتی است. چون $p(\frac{1}{p^{k+1}}+\mathrm{Z})\in N$ است باید $\frac{1}{p^{k+1}}+\mathrm{Z}\in N$ یا $pZ_{p^\infty}\subseteq N$. اگر $\frac{1}{p^{k+1}}+\mathrm{Z}\in N$، آنگاه $t\in \mathrm{Z}$ وجود دارد به طوریکه $p^{k+1}\mid(1-tp)$. درنتیجه $p\mid 1$ که یک تناقض است و اگر $pZ_{p^\infty}\subseteq N$، آنگاه $\frac{1}{p^{k+1}}+\mathrm{Z}=p(\frac{1}{p^{k+2}}+\mathrm{Z})\in N$ و مشابه قسمت قبل بایستی $p\mid 1$، که یک تناقض است. در نتیجه Z_{p^∞}به عنوان Z- مدول فاقد زیر مدول اول است.

قضیه۱-۵- زیرمدول محض Nاز Mاول است اگروتنها اگر $P=(N:M)$ایده آل اول Rو $\frac{M}{N}$یک $\frac{R}{P}$- مدول فارغ از تاب باشد.

اثبات. به[۸ ، لم ۱] رجوع شود.□

قضیه۱-۶- فرض کنید $N_1,\dots,N_k$زیر مدول هایی از R- مدول Mباشند . همچنین فرض کنید N زیر مدول اول M است. اگر $N_1\cap\dots\cap N_k\subseteq N$ باشد، آنگاه حداقل یک i، $(1\leq i\leq k)$ وجوددارد به گونه ای که $N_i\subseteq N$ یا $(N_i:M)\subseteq(N:M)$.

اثبات. به[۱۰، نتیجه ۵] رجوع شود.□

قضیه۱-۷- فرض کنید M یک R - مدول و N زیر مدول M باشد. اگر $(N:M)$ ایده آل ماکزیمال R باشد، آنگاه N زیر مدول اول M است.

اثبات. به [۱۰، گزاره ۲] رجوع شود.□

قضیه۱-۸- اگر N زیرمدول ماکزیمال R - مدول M باشد، آنگاه $(N:M)$ ایده آل ماکزیمال R و N زیر مدول اول M است.

اثبات. به [۱۰،گزاره۴] رجوع شود.□

قضیه۱-۹- اگر M یک R - مدول با تولید متناهی باشد، آنگاه هر زیر مدول محض M مشمول در یک زیر مدول ماکزیمال M است.

اثبات. به [۱۰، صفحه ی۶۳] رجوع شود.□

تعریف۱-۱۰- فرض کنید M یک R - مدول، K زیر مدول M و n یک عدد صحیح غیر منفی باشد. چنانچه زنجیر $K = K_0 \supset \ldots \supset K_n$ از زیر مدول های اول M، به ازای هر i $(0 \le i \le n)$ وجود داشته باشد و هیچ زنجیر طولانی تری نباشد، K را دارای ارتفاع n گوییم. در غیر این صورت، K را با ارتفاع نا متناهی می نامیم.

فصل دوم

زیر مدول های اول و تجزیه اولیه

در این فصل زیر مدول های اول $R\times R$ را هنگامی کـه R یـک دامنـه ایـده آل اصـلی اسـت مشخص کرده سپس تجزیه اولیه ی هر زیر مدول $R\times R$ را به زیر مدولهای اولیه بررسـی مـی کنیم.

۲-۱- زیر مدول های اول

در[۱۴] ماتسومورا ثابت کردکه ایده آل های اول حلقه ی $R_1\times R_2\times....\times R_n$ هنگامی کـه R_i به ازای $i=1,...,n$ یک حلقه است به شکل $R_1\times...\times R_{i-1}\times P_i\times R_{i+1}\times...\times R_n$ است، به گونه ای که P_i ایده آل اول حلقه R_i است.

شکل کلی زیر مـدولهای اول $R_1\times....\times R_n$ هنـوز مشـخص نشـده اسـت . امـا بعضـی از زیـر مدولهای اول $R^{(n)}$ هنگامی که R یک دامنـه ایـده آل اصـلی باشـد در[۶] توسـط مکاسـلند و همکارش اسمیت بررسی شد. آنها در[۶ ، لم ۴] نشـان دادنـد کـه اگـر $a_n,...,a_1$ اعضـای غیـر صفر R (به ازای $n\geq 2$) باشد، $F=R^{(n)}$ و $K=\{(r_1,...,r_n)\in F:\ r_ia_j=r_ja_i,\ 1\leq i,\ \ j\leq n\}$، آنگـاه K زیـر مـدول اول F و مینیمـال روی $R(a_1,...,a_n)$ اسـت و $(K:F)=0$. عـلاوه بـر آن $a_iK\subseteq R(a_1,...,a_n)$ به ازای $1\leq i\leq n$. همچنین آنها در [۶ ، نتیجه ۵] ثابت کردند کـه

چنانچه بزرگترین مقسوم علیه مشترک a_i $(1 \le i \le n)$ یک باشد، آنگاه $R(a_1,...,a_n)$ زیر مدول اول F به ارتفاع یک است.

از این به بعد فرض می کنیم که R یک دامنه ایده آل اصلی است و $M = R \times R$.

به روشنی برای هر عضو اول p در R، مدول های $R \times pR$، $pR \times R$، $\{0\} \times R$ و $R \times \{0\}$ زیر مدولهای اول M هستند. اما چنانچه $p \neq q$ عناصر اول در R باشند، $pR \times qR$ زیر مدول اول M نیست.

مثال: اگر $R = Z$، $M = Z \times Z$، $p = 2$ و $q = 3$، آنگاه $3Z \times 2Z$ زیر مدول اول M نیست. اما به ازای هر عضو اول p در R، $R \times pR$ و $pR \times R$ زیر مدول های ماکزیمال M هستند و بنا بر قضیه ۱-۸، اول هم هستند. همچنین $N = \left\{(x,x) \in M : \ x \in R\right\}$ زیر مدول اول M است.

لم ۲-۱-۱- فرض کنید که a و b عناصر غیرصفردر R باشند و $N = (a,b)R$. دراین صورت، N زیرمدول اول M است اگروتنهااگر a و b نسبت به هم اول باشند.

اثبات. ابتدا فرض کنیدکه N زیرمدول اول M باشدو $d \in R$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b باشد. آنگاه عناصر $a_1, b_1 \in R$ وجود دارند که نسبت به هم اول بوده و $a = da_1$ و $b = db_1$. $N \ni (a,b) = d(a_1,b_1)$، لذا بنابر اول بودن N داریم، $dM \subseteq N$ یا $(a_1,b_1) \in N$. فرض کنید که $dM \subseteq N$. چون $(1,0),(0,1) \in M$ ، پس $(d,0),(0,d) \in N$ و $a_1(d,0), b_1(0,d) \in N$. در نتیجه $(a,0),(0,b) \in N$. بنابراین $r \in R$ وجود دارد که $(a,0) = r(a,b) = (ra,rb)$. در نتیجه $ra = a \neq 0$. پس $r \neq 0$ و چون $rb = 0$ ، $b = 0$ که با فرض تناقض دارد. از $(0,b) \in N$ بدست می آوریم، $a = 0$ که با انتخاب a تناقض دارد. پس فرض باطل و $dM \not\subset N$. اگر $(a_1,b_1) \in N$، آنگاه $N = (a,b)R = (a_1,b_1)dR \subseteq (a_1,b_1)R \subseteq N$. بنابراین d یکه است و a,b نسبت به هم اول هستند.

برعکس فرض کنید که $\gcd(a,b)=1$، $r\in R$ و $(m,n)\in M$ به طوریکه $r(m,n)\in N$. دراین صـورت، $x\in R$ وجـود دارد کـه $r(m,n)=(rm,rn)=x(a,b)=(xa,xb)$. پـس $rm=xa$ و $rn=xb$. بنابراین $r\mid xa$ و $r\mid xb$. اگر $r\mid a$، آنگاه r ، b را عاد نمی کند (زیرا a و b نسبت بـه هـم اولنـد). پـس $r\mid x$، درغیـراین صـورت هـم، $r\mid x$. بنـابراین $r'\in R$ وجـود دارد بطوریکه $x=rr'$. بنابراین $rm=ax=arr'$. درنتیجه $r(m-ar')=0$. پـس $m-ar'=0$ یـا $r=0$. اگر $r=0$، آنگـاه $rM\subseteq N$ و اگـر $r\neq 0$، $m=ar'$. بـه طورمشـابه $n=br'$، بنـابراین $(m,n)=r'(a,b)\in N$ و N زیرمدول اول M است.□

لم۲-۱-۲- فرض کنید که $N=(a,b)R$، زیر مدول اول M باشد. آنگـاه N جمعونـدی از M است.

اثبات. از آنجا که $\{0\}\times R$ و $R\times\{0\}$ زیر مدول های اول و جمعوند های M هستند می تـوانیم فرض کنیم که $N\neq\{0\}\times R$، $N\neq R\times\{0\}$ و $a,b\in R$ غیر صـفر هسـتند. بنـابر لـم ۲-۱-۱ بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b یک است. پس $c,d\in R$ وجـود دارد کـه $ad+bc=1$. قـرار مـی دهـیم $K=(-c,d)R$ و نشـان مـی دهـیم $M=K+N$ و $K\bigcap N=0$. بنـابراین $M=K\oplus N$. به روشنی $K+N\subseteq M$. حال اگر $(m,n)\in M$، آنگاه

$$\begin{aligned}
&(m,n)=(ad+bc)(m,n)=(adm+bcm,adn+bcn)=\\
&(adm+cna-cna+bcm,adn+bcn+dmb-dmb)=\\
&(dm+cn)(a,b)+(an-bm)(-c,d)\in(a,b)R+(-c,d)R=N+K
\end{aligned}$$

درنتیجه $M\subseteq K+N$. فرض کنید $K\bigcap N\neq 0$. در این صورت عناصر غیـر صـفر r,r' در R وجود دارد، به طوریکه $(ra,rb)=r(a,b)=r'(-c,d)=(-r'c,r'd)$.

پـــــس $ra=-r'c$ و $rb=r'd$. لـــــذا $radb=-r'cdb=-r'dcb=-rbcb$. در نتیجـــــه $rb(ad+bc)=0$. بنابراین $rb=0$ (چون $ad+bc=1$). پس $r=0$ (زیرا $b\neq 0$). لذا فرض خلف باطل است و $K\bigcap N=0$.□

قضیه۲-۱-۳- فرض کنیدکه N زیرمدول اول M متمایز از $\{0\}\times R$ و $R\times\{0\}$ باشد. در این صورت،

(۱) اگر $(1,0)\in N$، آنگاه به ازای عنصر اول p در R داریم $N=R\times pR$.

(۲) اگر $(0,1)\in N$، آنگاه به ازای عنصر اول p در R داریم $N=pR\times R$.

اثبات(۱). فرض کنید که $(a,b)\in N$ و $\gcd(a,b)=d$. آنگاه عناصر $a_1,b_1\in R$ وجود دارد که $(a,b)=d(a_1,b_1)\in N$. چون N اول است، پس $(a_1,b_1)\in N$ یا $dM\subseteq N$. فرض کنید که $(a_1,b_1)\in N$. همچنین بنابر فرض داریم، $a_1(1,0)=(a_1,0)\in N$. بنابراین $(a_1,b_1)-(a_1,0)=(0,b_1)=b_1(0,1)\in N$. بنابراول بودن N داریم، $b_1M\subseteq N$ یا $(0,1)\in N$. اگر $(0,1)\in N$، (چون $(1,0)\in N$) یعنی مولدهای M در N قرار دارند. پس $M=N$ که با این حقیقت که N زیر مدول محض M است تناقض دارد. بنابراین $(0,1)\notin N$ و $b_1M\subseteq N$. فرض کنیم که $b_1=p_1^{t_1}...p_k^{t_k}$ به طوریکه p_i ها عناصر اول متمایز R و $t_1,...,t_k$ اعداد صحیح غیر منفی هستند.چون $b_1(0,1)\in N$. درنتیجه $p_1^{t_1}...p_k^{t_k}(0,1)=p_1\left(0,p_1^{t_1-1}...p_k^{t_k}\right)\in K$. بنابر اول بودن N داریم، $p_1M\subseteq N$ یا $\left(0,p_1^{t_1-1},...p_k^{t_k}\right)\in N$. اگر $p_1M\not\subset N$، آنگاه $p_1\left(0,p_1^{t_1-2},p_2^{t_2},...,p_k^{t_k}\right)\in N$ و بدست می آوریم

$$p_2\left(0,p_2^{t_2-1},...,p_k^{t_k}\right)=\left(0,p_2^{t_2},...,p_k^{t_k}\right)\in N\ .$$

با ادامه ی این روند از آنجا که $(0,1)\notin N$ ، به ازای حداقل یک i ، $p_iM\subseteq N$. با فرض $(1,0)\in N$ داریم، $R\times p_iR\subseteq N$ و چون $R\times p_iR$ زیر مدول ماکزیمال M است بنابراین $N=R\times p_iR$. حال اگر $dM\subseteq N$ با روشی مشابه $p\in R$ وجود دارد که $pM\subseteq N$ و در نتیجه $R\times pR=N$. اثبات (۲) مشابه قسمت اول است.□

قضیه۲-۱-۴- فرض کنید که p عنصر اول R باشد. دراین صورت، pM یک زیر مدول اول M با ارتفاع یک است.

اثبات. ابتدا نشان می دهیم که pM زیر مدول اول M است. به وضوح $pR \subseteq (pM:M)$. اگر $0 \neq r \in (pM:M)$، آنگاه به ازای هر $(m,n) \in M$ و از جمله $(m,n) \in M - pM$ داریم، $r(m,n) \in pM$. در نتیجه $rm, rn \in pR$. pR ایده آل اول R است و $n \notin pR$ یا $m \notin pR$. بنابراین $r \in pR$. در نتیجه $(pM:M) = pR$. حال اگر $r \in R$ و $(m,n) \in M$ به طوریکه $r(m,n) \in pM$ دراین صورت، $rm, rn \in pR$. اگر $r \notin pR$، آنگاه $m, n \in pR$. درنتیجه $(m,n) \in pM$ و pM زیرمدول $pR -$ اول Mاست. بنا برفرض R دامنه ی ایده آل اصلی است. بنابراین صفر زیرمدول اول Mاست. (زیرا اگر به ازای $r \in R$ و $(m,n) \in M$، $r(m,n) = (rm, rn) = (0,0)$ دراین صورت، $rn = 0$ و $rm = 0$. درنتیجه اگر $r \neq 0$، آنگاه $m = n = 0$ و $(m,n) = (0,0)$.اگر $r = 0$، آنگاه $rM = 0$.) حال فرض کنید که Nزیرمدول اول Mباشد، به طوریکه $0 \subset N \subset pM$. اگر $(m,n) \in N \subset pM$ دراین صورت، $x, y \in R$وجود دارد که $m = px$ و $n = py$. لذا $(m,n) = p(x,y) \in N$. بنابراول بودن Nداریم، $pM \subseteq N$ یا $(x,y) \in N$.فرض کنیم که $pM \not\subset N$ دراین صورت، $(x,y) \in N \subseteq pM$. آنگاه عناصر $x_1, y_1 \in R$ وجود داردکه $(x,y) = p(x_1, y_1) \in N$. چون $pM \not\subset N$ پس $(x_1, y_1) \in N \subseteq pM$. با ادامه این روند به ازای هرعددصحیح مثبت r بدست می آوریم، $p^r \mid m$ که تناقض است. بنابراین $pM \subseteq N$، $pM = N$ و درنتیجه pM دارای ارتفاع یک است.□

قضیه۲-۱-۵- فرض کنید که Nزیرمدول اول Mبا ارتفاع یک باشد. دراین صورت،

(۱) هرگاه $(a,b) \in N$ باشد به طوریکه $\gcd(a,b) = 1$، آنگاه $N = (a,b)R$.

(۲) هرگاه هیچ (a,b)در N نباشد که $\gcd(a,b)=1$، آنگاه عنصر اول $p\in R$ وجود دارد به گونه ای که $N=pM$.

اثبات(۱). فرض کنید $(a,b)\in N$ و $\gcd(a,b)=1$، آنگاه بنابرلم۲-۱-۱، $(a,b)R$ زیر مدول اول Mاست و $0\subset (a,b)R\subseteq N$. چون N زیرمدول اول Mبا ارتفاع یک است پس $(a,b)R=N$.

(۲). فرض کنید که به ازای هرعنصر $(a,b)\in N$، $\gcd(a,b)\neq 1$.همچنین فرض کنید که $(a,b)\in N$ و $\gcd(a,b)=d\neq 1$. پس عناصر $a_1,b_1\in R$ وجود دارد که $(a,b)=d(a_1,b_1)\in N$ و $\gcd(a_1,b_1)=1$. بنابراین $(a_1,b_1)\notin N$. لذا بنابر اول بودن N داریم، $dM\subseteq N$. با اثبات مشابه قضیه ۲-۱-۳، عنصراول p در Rوجود دارد که $0\subseteq pM\subseteq N$. طبق قضیه ۲-۱-۴، pM زیرمدول اول Mاست. بنابرفرض N دارای ارتفاع یک است. پس $N=pM$.$\square$

قضیه۲-۱-۶- فرض کنید که p عنصر اول در R و $a,b\in R$ باشد، به گونه ای $\gcd(a,b)=\gcd(a,p)=\gcd(b,p)=1$. دراین صورت،

(۱) $K=\{(c,d)\in M : p\mid(ad-bc)\}$، زیر مدول اول Mاست.

(۲) $E=\{(c,d)\in M : ad=bc\}$، زیرمدول اول Mاست.

اثبات(۱) به وضوح K زیر مدول M است. کافی است نشان دهیم Kزیر مدول اول M است. بنا برفرض $\gcd(a,b)=1$. پس عناصر $c,d\in R$ وجود دارد به طوریکه $ad+bc=1$. p عنصر اول در دامنه ی ایده آل اصلی است. بنابراین p تحویل ناپذیر است ویکه نیست. p، $ad+bc=1$ را عاد نمی کند. بنابراین $(-c,d)\notin K$. در نتیجه $K\neq M$. فرض کنید $r\in R$ و $(\upsilon,\nu)\in M$ به طوریکه $r(\upsilon,\nu)=(r\upsilon,r\nu)\in K$. فرض کنیدکه $(\upsilon,\nu)\notin K$.دراین صورت،

$p \mid (rva - rvb) = r(av - vb)$. از آنجا که p، $av - vb$ را عاد نمی کند، $p \mid r$ در نتیجه $r' \in R$ وجود دارد که $r = pr'$. اگر (m,n) عنصر دلخواه M باشد، آنگاه $r(m,n) = pr'(m,n) = p(r'm, r'n)$ و $p \mid p(r'na - r'mb)$ پس $rM \subseteq K$.

(۲) به وضوح E زیر مدول M است. اگر $r \in R$ و $(m,n) \in M$ به طوریکه $(rm, rn) \in E$، آنگاه بنا بر تعریف E داریم $rna = rmb$. بنابراین $r(na - mb) = 0$. دراین صورت، $r = 0$ یا $na - mb = 0$. در نتیجه $(m,n) \in E$ یا $rM = 0 \subseteq E$. پس E زیر مدول اول M است.□

برای یافتن زیر مدول اول جدیدی از M فرض می کنیم که N زیر مدول اول M متمایز از $pR \times R$ و $R \times pR$ به ازای عنصر اول p در R باشد.

قضیه ۲-۱-۷- فرض کنید که فرضیات بالا برقرار باشد، $N \ni (a,b)$ و $\gcd(a,b) = 1$. همچنین فرض کنید که به ازای عنصر اول $p \in R$، $pM \subseteq N$. در این صورت، N زیر مدول اول M است اگر وفقط اگر $N = \{(c,d) \in M : p \mid (ad - bc)\}$.

اثبات. ابتدا فرض کنید که N زیر مدول اول M باشد. اگر $p \mid a$، آنگاه $r \in R$ وجود دارد که $a = pr$. پس $(a,0) = p(r,0) \in pM \subseteq N$. از طرفی $(-a,0),(a,b) \in N$ بنابراین، $b(0,1) = (-a,0) + (a,b) = (0,b) \in N$. اگر $p \mid a$ چون a و b نسبت به هم اول هستند، بنابراین p، b را عاد نمی کند. در نتیجه $bM \not\subset pM \subseteq N$ (در غیر این صورت، $bR \subseteq pR$ و $p \mid b$). چون N زیر مدول اول M است، پس $(0,1) \in N$. لذا بنابر قضیه ۲-۱-۳، داریم $N = pR \times R$ که با فرض تناقض دارد. پس p، a را عاد نمی کند. به همین ترتیب p، b را عاد نمی کند. در نتیجه $\gcd(a,p) = 1$ و $\gcd(b,p) = 1$. بنا بر فرض قضیه $\gcd(a,b) = 1$. لذا بنابر قضیه ۲-۱-۶، داریم $K = \{(c,d) \in M : p \mid (ad - bc)\}$، زیر مدول

اول M است. عناصر $a_1,b_1,a_2,b_2,p_1,p_2\in R$ وجود دارند که $aa_2+bb_2=1$ ، $bb_1+pp_2=1$ و $aa_1+pp_1=1$.

حال فرض کنید، $(c,d)\in N$ و $(c,d)\notin K$ یعنی p ، $ad-bc$ را عاد نمی کند. چون $(c,d)\in N$ و $(a,b)\in N$ به دست می آوریم،

$$d(a,b)-b(c,d)=(ad-bc,0)=(ad-bc)(1,0)\in N$$
$$a(c,d)-c(a,b)=(0,ad-bc)=(ad-bc)(0,1)\in N.$$

از آنجا که N زیر مدول اول M است و $M\neq N$ بنابراین $(1,0)\notin N$ یا $(0,1)\notin N$. پس $(ad-bc)M\subseteq pM\subseteq N$ که یک تناقض است . بنابراین $p\mid(ad-bc)$ و $(c,d)\in K$.

برعکس فرض کنید که $(c,d)\in K$. پس $t\in R$ وجود دارد که $ad-bc=pt$. بنابر (*) داریم،

$$(c,d)=((bb_1+pp_2)c,(aa_1+pp_1)d)=(cbb_1,aa_1d)+p(cp_2,p_1d).$$

چون $p(cp_2,p_1d)\in pM\subseteq N$ پس کافی است نشان دهیم که $(cbb_1,aa_1d)\in N$. داشتیم، $ad-bc=pt$. بنابراین $bc=ad-pt$. با استفاده از این موضوع داریم،

$$(bcb_1,aa_1d)=(adb_1-ptb_1,aa_1d)=(b_1ad,aa_1d)-(ptb_1,0).$$

$(ptb_1,0)=p(tb_1,0)\in pM\subseteq N$. لذا کافی است، نشان دهیم که $(adb_1,ada_1)=ad(b_1,a_1)\in N$. داشتیم، $(a,b)\in N$. بنابراین $a_1(a,b)=(aa_1,ba_1)\in N$ و $(pp_1,0)\in pM\subseteq N$. بنابر (*) داریم، $(aa_1+pp_1,ba_1)=(1,ba_1)\in N$، همچنین $(pp_2,0)\in pM\subseteq N$.

لذا $(1,ba_1)-(pp_2,0)=(1-pp_2,ba_1)=(bb_1,ba_1)=b(b_1,a_1)\in N$. بنابر اول بودن N داریم، $bM\subseteq N$ یا $(b_1,a_1)\in N$. اما $bM\not\subset N$ زیرا p,b نسبت به هم اول هستند. بنابراین $(b_1,a_1)\in N$. همچنین $(adb_1,ada_1)=ad(b_1,a_1)\in N$. در نتیجه $(c,d)\in N$ و $N=K$.$\square$

از آنجا که R، دامنه ی ایده آل اصلی است و M یک $R-$مدول که با دو عنصر $(1,0)$ و $(0,1)$