دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشتهی

آمار ، گرایش آمار ریاضی

عنوان

گراف های اشتراک تصادفی و کاربرد آن در شبکه های کامپیوتری

استاد راهنما

دکتر رامین ایمانی

استاد مشاور

دکتر علی النقی بادامچی زاده

پژوهشگر

اکرم عبادپور

آذر ۱۳۸۹

بسم الله الرّحمن الرّحیم

پروردگارا! به همین امام دوازدهم «امام زمان (علیه السلام)» قسمت می دهیم که ظهورش را نزدیک نمایی، و صبری نیکو و پیروزی کامل و بی نیازی از خلق و پایداری در راه هدایت و توفیق دست یابی به آن چه که تو راضی هستی و دوست می داری، به ما عنایت فرمایی.

پروردگارا! برهان در اختیار توست و تو همیشه حاکمی و هرگز برهانی علیه تو اقامه نشد و تو محکوم نشدی. پروردگارا! همگان از ستم دیگران به سوی تو عرض حال می آورند و هرگز از دست تو به سوی کسی عرض حال برده نمی شود. پس بر محمّد و خاندانش درود فرست و من را در جهت پیروزی بر نفس ستمگر و سرکش و هواپرستی فراوانی که در درونم قرار دارد، یاری فرما و من را عاقبت به خیر گردان.

پروردگارا! گناهانم مرا از امید بستن به تو ناامید می کند و یقین من به فراگیری رحمتت، مانع ترسیدن از تو می شود. پس بر محمّد و خاندانش درود فرست و امیدم را تلقّی به قبول کن و ترسم از خودت را نادیده بگیر و در جایگاه بهترین گمان کنندگان به خود، همراه من باش، ای کریم کریمان!

خدایا! ما به حرمت این امام راستین [امام زمان] دست نیاز به سوی تو دراز می کنیم و به تو متوسّل می شویم و به حقّ عظمتی که برای این امام و جدّش رسول خودت و پدر و مادرش، علی و فاطمه که جزء اهل بیت رحمت هستند، قرار دادی؛ تو را قسم می دهیم که روزی دایم را که پایه های حیات ماست، برای ما مقرّر بفرمایی. و اصلاح امور زندگی خانوادگی ما را مقرّر بگردانی.

پروردگارا! بر محمّد و خاندانش درود فرست و گناهان ما و پدر و مادر ما و همهٔ مردان مؤمن و زنان با ایمان و همهٔ زن و مرد مسلمان، چه زنده و چه مرده، همه را بیامرز و از نیکی و آخرت ما را بهره مند گردان و ما را از عذاب جهنّم نگهبان باش.

گوهرهای ناب در کلام امام زمان علیه السلام

تقدیم به:

پدرم، مادرم و همسرم

بنام خدا

و لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **رامین ایمانی** ، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر**علی النقی بادامچی زاده** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی مخصوصاً از جناب آقایان دکتر حسین جباری خامنه ، دکتر حسین بیورانی و دکتر اصغر رنجبری، دکتر علی اکبر حیدری و دکتر هژیر هومئی و نیز کارکنان محترم دانشکدهٔ علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر مرتضی فغفوری که در جهت استفاده از نرم افزار زی پرشین راهنمایی های ارزنده ای فرموده اند، کمال تشکر را دارم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

اکرم عبادپور
آذر ۱۳۸۹

نام خانوادگی دانشجو: عبادپور نام: اکرم

عنوان: گراف های اشتراک تصادفی و کاربرد آن در شبکه های کامپیوتری

استاد راهنما : دکتر رامین ایمانی

استاد مشاور : دکتر علی النقی بادامچی زاده

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: آمار گرایش: آمار ریاضی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: آذر ۱۳۸۹ تعداد صفحات: ۷۰

کلید واژه‌ها: گراف تصادفی ، گراف اشتراک تصادفی، زیر گراف، ماتریس نمایش، آستانه

چکیده

ابتدا مدلی از گراف های تصادفی، که در آن راس ها کانون توجه اند بررسی می کنیم این گراف ها را گراف اشتراک تصادفی می نامیم.

فرض کنید G گراف ساده ی متناهی باشد گوییم G گراف اشتراک است اگر بتوانیم به هر رأس $v \in V(G)$، مجموعه ای مانند S_v را طوری نسبت دهیم که $vw \in E(G)$ اگر و تنها اگر $S_v \cap S_w \neq \phi$. به این ترتیب گفته می شود G **گراف اشتراک** از خانواده ی $\varphi = \{S_v : v \in V(G)\}$ می باشد.

اگر S_v ها با استفاده از یک ساختار تصادفی تولید شوند گراف اشتراک حاصل را گراف اشتراک تصادفی می نامند.

سپس آستانه ی پیدایش گراف تصادفی H را به دست می آوریم و برای این کار از ماتریس نمایش و پوشش های کلیکی گراف اشتراک تصادفی کمک می گیریم.

در قدم بعدی این آستانه را برای گراف های خاص مانند گراف های کامل، درخت ها و ... به دست می آوریم و با مثالی به مطالب خاتمه می دهیم.

فهرست مطالب

مقدمه

در اکثر مدل های گراف های تصادفی یال ها مورد توجه قرار می گیرند در مدل گراف تصادفی اردوش-رینی [۱] n راس داده می شود و با پرتاب کردن سکه محل قرارگرفتن یال ها مشخص می شود و ظاهر شدن هر یال مستقل از ظاهر شدن یال دیگر است. این مدل زمانی مفید است که موضوعات مستقل از یکدیگر باشند.
در این پایاننامه، یک مدل از گراف های تصادفی را بررسی می کنیم که در آن راس ها مرکز توجه می باشند و به طور مستقل به هر راس یک ساختمان تصادفی نسبت می دهیم و مجاورت دو راس بوسیله ی مقایسه ی ساختمان آن ها مشخص می شود برای انجام این کار گراف های اشتراک تصادفی را معرفی می کنیم.
فرض کنید G گراف ساده ی متناهی باشد گوییم G یک گراف اشتراک است اگر بتوانیم به هر راس $v \in V(G)$ مجموعه ی S_v را چنان نسبت دهیم که $vw \in E(G)$ باشد اگر و تنها اگر $S_v \cap S_w \neq \phi$. اگر S_v ها با استفاده از یک ساختار تصادفی تولید شوند گراف اشتراک حاصل را گراف اشتراک تصادفی می نامند. در مرجع [۶] روش بررسی گراف ها، برای اینکه گراف اشتراک تصادفی هستند یا نه، بیان شده است. نوع خاصی از این گراف ها به نام گراف های بازه ای تصادفی توسط شاینرمن [۲] در سال (۱۹۹۰) در [۸،۹] معرفی و بررسی شد.
در قضیه گراف تصادفی اردوش-رینی سوال اساسی مربوط به ظاهر شدن زیر گراف ها در روند تکامل گراف تصادفی است مخصوصا H گراف ثابتی فرض می شود و پرسیده می شود برای کدام مقدار p، با احتمال بالا H زیرگراف گراف تصادفی می باشد؟ جواب وابسته به میانگین ماکزیمم درجه ی زیرگراف های H است [۲،۳،۵].
در این مدل (مدل کلاسیک) نتیجه زمانی به دست می آید که شمار کپی های H و همه ی زیر گراف های آن نامتناهی باشد(به بینهایت میل کند) در این صورت H با احتمال بالا زیرگراف گراف تصادفی $G(n,p)$ خواهد بود.
در این پایاننامه این مسائل برای گراف های اشتراک تصادفی مطالعه می شود نشان خواهیم داد که برای گراف ثابت H دو آستانه ی $\tau_۱$ و $\tau_۲$ وجود دارد که H زیرگراف گراف اشتراک تصادفی $G(n,m,p)$ است وقتی p

[۱] Erdos-Renyi
[۲] Scheinerman

بین این دو آستانه قرار گیرد که کارونسکی دیگران در [۱۰] به آن پرداخته اند.

$E - mail:\ aeam\_۳@yahoo.com$

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

فصل نخست پایاننامه، مروری بر تعاریف و مفاهیم اولیه مربوط به گراف و گراف های تصادفی است که در فصل های آتی از آن ها استفاده خواهیم کرد. البته باید به این نکته توجه کنیم که تمام تعاریف و ویژگی های مربوط به گراف را نمی توان در یک فصل خلاصه کرد، اما ما حتی الامکان سعی خواهیم کرد تعاریف و ویژگی هایی که در فصل های آتی این پایان نامه، از آن ها استفاده شده، به طور مختصر شرح دهیم.
(علاقه مندان می توانند به منابع [۱،۴] و مراجعه نمایند).

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید V یک مجموعه ی ناتهی و متناهی باشد (که آن را مجموعه رأس های گراف می نامیم) و E زیرمجموعه ای از مجموعه ی تمام زیر مجموعه های دوعضوی از V باشد (که آن را مجموعه یال های گراف می نامیم). در این صورت، جفت (V,E) را یک **گراف ساده** روی مجموعه ی V می نامند. یک گراف ساده با مجموعه رئوس V و مجموعه یال های E را با $G(V,E)$ نشان می دهیم و وقتی یالی بین رأس i,j وجود داشته باشد آن را با $i\sim j$ نشان می دهیم.
در این پایاننامه با گراف های ساده سروکار خواهیم داشت لذا از این به بعد کلمه ی گراف را به جای گراف ساده بکار خواهیم برد.

تعداد یال های وصل شده به هر رأس را **درجه ی** آن رأس می نامیم.
گرافی با n راس که در جه ی هر رأس آن برابر $n-۱$ باشد **گراف کامل** است. این گراف را با K_n نشان می دهیم تعداد یالهای این گراف برابر $\binom{n}{۲}$ می باشد.
راسی که درجه ی آن صفر باشد **راس منفرد** نامیده می شود.

تعریف ۲.۱.۱. **گراف دوبخشی** گرافی است که در آن مجموعه ی رأس ها ی V به دو مجموعه $V_۱,V_۲$ تقسیم می شود که

$$V_۱\cap V_۲=\phi \;\text{ و }\; V_۱\cup V_۲=V$$

و بین رأس های هر مجموعه یالی وجود ندارد فقط بین رأس های دو مجموعه می تواند یالی قرار بگیرد اگر $|V_۱|=n_۱$ و $|V_۲|=n_۲$ باشد، این گراف را با $K_{n_۱,n_۲}$ نشان می دهیم.
گراف دو بخشی کامل: گرافی دو بخشی با حداکثر یال های ممکن است. تعداد یال های این گراف برابر $n_۱n_۲$ می باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید $G(V, E)$ یک گراف غیر تهی باشد. گراف G را همبندگوئیم هرگاه بین هر دو رأس متمایز G، مسیری وجود داشته باشد. گرافی را که همبند نباشد، ناهمبندگوئیم.
گراف تهی، گرافی است که مجموعه یال های آن تهی باشد، و یا به عبارتی گرافی است که با ازای هر دو رأس از مجموعه V، هیچ یالی بین این دو رأس وجود نداشته باشد.

تعریف ۴.۱.۱. مسیری که از یک رأس شروع شود و به همان رأس ختم شود **دور** نامیده می شود. تعداد یال هایی که در طول یک دور از آن عبور می کنیم **اندازه ی دور** می نامند.
گراف بدون مثلث گرافی است که دور به طول ۳ نداشته باشد.
درخت گراف همبندی است که هیچ دوری ندارد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید $G(V, E)$ یک گراف ساده باشد گوییم $G'(V', E')$ **زیر گراف** $G(V, E)$ است اگر داشته باشیم $V' \subseteq V$ و به ازای هر $\{x, y\} \in E'$ آنگاه $\{x, y\} \in E$ باشد. آن را با نماد $G' \leq G$ نشان می دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $G(V, E)$ یک گراف باشد و H زیرگراف ای از G باشد که برای هر $x, y \in V(H)$ داشته باشیم $\{x, y\} \in E(H)$ در این صورت گوییم H یک **کلیک** است.

تعریف ۷.۱.۱. گراف های $G(V, E)$ و $G'(V', E')$ را در نظر بگیرید گراف G, G' **ایزومورف** هستند هرگاه یک نگاشت یک به یک $f : V \to V'$ داشته باشیم که

$$\{v_۱, v_۲\} \in E \Leftrightarrow \{f(v_۱), f(v_۲)\} \in E'$$

اتومورفیسم: ایزومورفیسمی است از $G \to G$ یعنی $G = G'$.

تعریف ۸.۱.۱. گراف تصادفی [۱] : فرض کنید گراف G دارای n رأس است که احتمال انتخاب یک یال بین دو رأس متمایز آن، برابر p است و انتخاب یال ها مستقل از همدیگر صورت می گیرد گراف تصادفی $G(n, p)$ تابعی است به صورت $G(n, p) : \Omega \longrightarrow \mathcal{G}_n$ که به هر عضو فضای نمونه، یک گراف با n رأس اختصاص می دهد.

[۱] Random graphs

اگر A یک خاصیت در گراف ها (مانند کامل بودن و دوبخشی بودن و...) باشد نماد $G \models A$ یعنی گراف G خاصیت A را دارد.

تعریف ۹.۱.۱. $r(n)$ را یک **آستانه** [۲] برای خاصیت A گوییم هرگاه به ازای هر $\big(p(n) \ll r(n)\big)$ داشته باشیم $p\big(G(n,p(n)) \models A\big) = ۰$ و برای $\big(p(n) \gg r(n)\big)$ داشته باشیم $p\big(G(n,p(n)) \models A\big) = ۱$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید $H = G(V,E)$ یک گراف ساده باشد $d(H) = \frac{|E(H)|}{|V(H)|}$ را **چگالی** H می نامیم .

$d^*(H) = Max_{L \leq H}\frac{|E(L)|}{|V(L)|}$ را نیز **ماکزیمم چگالی زیر گراف های** H می نامیم.

۲.۱ نمادها

تعریف ۱.۲.۱. نماد o کوچک: فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند. می نویسیم $f(x) = o(g(x))$ اگر و تنها اگر زمانی که x به بی نهایت میل می کند، داشته باشیم $\frac{f(x)}{g(x)} \to ۰$.
به بیان دیگر

$$f(x) = o(g(x)) \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = ۰$$

تعریف ۲.۲.۱. نماد O بزرگ: فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، می نویسیم $f(x) = O\left(g(x)\right)$) اگر و تنها اگر یک عدد ثابت و مثبت c وجود داشته باشد که برای x های به اندازه کافی بزرگ، داشته باشیم $f(x) \leq cg(x)$ یعنی برای تابع $f(x)$ یک کران بالا مشخص کنیم.

تعریف ۳.۲.۱. نماد Ω : فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند گوییم $f(x) = \Omega\left(g(x)\right)$ اگر و تنها اگر $g(x) = O\big(f(x)\big)$.

تعریف ۴.۲.۱. نماد Θ : گوییم $f(x) = \Theta\big(g(x)\big)$ هر گاه

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \text{ و} f(x) = \Omega\big(g(x)\big)$$

در واقع وجود دارد $C_۱, C_۲, C_۳, C_۴$ (اعداد حقیقی مثبت) که

$$C_۱ g < f < C_۲ g \quad \text{و} \quad C_۳ f < g < C_۴ f$$

[۲] threshold

فرض کنید a_n, b_n دنباله هایی از اعداد روی $n \to \infty$ باشند و $b_n > 0$ در این صورت:

$a_n \asymp b_n$ اگر و تنها اگر $a_n = \Theta(b_n)$.

$a_n \sim b_n$ اگر و تنها اگر $a_n/b_n \to 1$

$a_n \ll b_n$ اگر و تنها اگر $a_n/b_n \to 0$

نامساوی مارکوف: اگر X متغییر تصادفی نا منفی باشد آنگاه برای هر $t > 0$:

$$p(X \geqslant t) \leqslant \frac{E(X)}{t}$$

فصل ۲

گرافهای اشتراک تصادفی

۱.۲ گراف اشتراک تصادفی

فرض کنید G گراف ساده ی متناهی باشد گوییم G گراف اشتراک است اگر بتوانیم به هر راس $v \in V$، مجموعه ای مانند S_1 را طوری نسبت دهیم که $vw \in E(G)$ اگر و تنها اگر $S_v \cap S_w \neq \phi$. به این ترتیب گفته می شود G گراف اشتراک از خانواده ی $\varphi = \{S_v : v \in V(G)\}$ می باشد.

اگر محدودیتی برای انتخاب مجموعه های S_v در نظر گرفته شود کلاس های مختلفی از گراف ها ی اشتراک را می توان تعریف کرد که مشهورترین مثال، کلاس گراف های بازه ای است که در آن S_v باید از بازه های حقیقی تشکیل شده باشد [۸, ۹].

اکنون آماده ایم گراف های اشتراک تصادفی را تعریف کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید m, n اعداد صحیح مثبت باشند و فرض کنید $p \in [0, 1]$ باشد و برای هر عدد صحیح مثبت k، $1 \leqslant k \leqslant n$، فرض کنید S_k یک زیر مجموعه ی تصادفی از $M = \{1, 2, ..., m\}$ باشد که در آن هر عضو M به طور مستقل با احتمال p انتخاب می شوند.

احتمال اینکه یک مجموعه ی خاص S را انتخاب کنیم برابر $p^s\,(1-p)^{m-s}$ می باشد که در آن $|S| = s$ است و $G(n, m, p)$ را گراف اشتراک تصادفی از S_kها می نامند.

بدینسان $G(n, m, p)$، n رأس دارد $\{1, 2, ..., n\}$. به هر رأس k یک زیر مجموعه ی تصادفی $S_k \subseteq \{1, 2, ..., m\}$ نسبت می دهیم و داریم $i \sim j$ اگر و تنها اگر $S_i \bigcap S_j \neq \phi$ باشد.
دو رأس u, v از $G(n, m, p)$ داده شده احتمال اینکه یالی بین آنها وجود داشته باشد برابر است با

$$p(u \sim v) = 1 - (1 - p^2)^m \tag{1.2}$$

که در آن

$(1-p^2)$ احتمال آن که عضو خاصی حداکثر در یکی از مجموعه های S_u یا S_v باشد.

$(1-p^2)^m$ احتمال آن که هر کدام از اعضای مجموعه ی M حداکثر در یکی از مجموعه های S_u یا S_v باشند یا به عبارتی احتمال آن که مجموعه های S_u و S_v از هم جدا باشند (اشتراک آنها تهی باشد).

بنابراین شمار مورد انتظار یال ها در $G(n,m,p)$ وقتی $n \to \infty, mp^2 \to 0$ برابر است با

$$\binom{n}{2}\left[1-\left(1-p^2\right)^m\right] \asymp n^2mp^2. \tag{۲.۲}$$

عبارت بالا به صورت زیر به دست می آید

از ریاضیات عمومی می دانیم وقتی $u \to 0$ هم ارزی زیر را داریم

$$(1+u)^m \sim mu+1$$

در اینجا نیز $n \to \infty, mp^2 \to 0$ و m نیز عدد صحیح مثبت است بنابراین $p^2 \to 0$ در نتیجه

$$(1-p^2)^m \sim 1-mp^2$$

$$\binom{n}{2} \asymp n^2$$

از طرفی شمار مورد انتظار یال ها همان امید ریاضی تعداد یال ها است، که تعداد یال ها $\binom{n}{2}$ می باشد در احتمال ظاهر شدن یک یال (که در رابطه ی (۱.۲) ارائه شده)ضرب می شود و رابطه ی (۲.۲) به دست می آید.

حال اگر $p = \frac{1}{\omega_n n\sqrt{m}}$ بگیریم (که در آن ω_n تابعی است که وقتی $n \to \infty$ آنگاه $\omega_n \to \infty$) آنگاه شمار مورد انتظار یال ها به صفر میل می کند.

$$n^2mp^2 = n^2m(\frac{1}{\omega_n^2 n^2 m}) \to 0$$

در نتیجه با احتمال بالا $G(n,m,p)$ هیچ یالی نخواهد داشت.

و وقتی $p = \frac{\omega_n}{n\sqrt{m}}$ آنگاه با احتمال بالا $G(n,m,p)$ یال دارد.

$$n^۲mp^۲ = n^۲m(\frac{\omega_n^۲}{n^۲m}) = \omega_n^۲ \to \infty$$

به عبارت دیگر شمار مورد انتظار یال هایی که در $G(n,m,p)$ موجود نیست برابر است با

$$\binom{n}{۲}(۱ - p^۲)^m \asymp n^۲e^{-mp^۲}. \quad (۳.۲)$$

زمانی $(\sqrt{\frac{۲logn + w_n}{m}}) = p$ بگیریم آنگاه با احتمال بالا $G(n,m,p)$ گرافی کامل است زیرا تعداد یال هایی که در این گراف موجود نیست به صفر میل می کند.

$$n^۲e^{-mp^۲} = n^۲e^{-m(\frac{۲logn + w_n}{m})} \to ۰$$

زمانی که $p = \sqrt{\frac{۲logn - w_n}{m}}$ با احتمال بالا $G(n,m,p)$ گرافی کامل نیست چون تعداد یال هایی که در این گراف موجود نیست به صفر میل نمی کند.

$$n^۲e^{mp^۲} = n^۲e^{-(۲logn - w_n)} \nrightarrow ۰$$

بنابراین ما توجه خود را به محدوده ای که $\frac{۱}{n\sqrt{m}} \le p \le \sqrt{\frac{۲logn}{m}}$ قرار دارد، معطوف می کنیم.

$p = \sqrt{\frac{۲logn}{m}}$ آستانه ی تبدیل شدن به گراف کامل است یعنی به ازای این مقدار شمار مورد انتظار یال هایی که موجود نیست برابر ۱ است.
$p = \frac{۱}{n\sqrt{m}}$ اینفیمم مقداری است که یالی ظاهر می شود یعنی به ازای این مقدار شمار مورد انتظار یال هایی که موجود است برابر ۱ است.

یعنی p کمتر از $\frac{۱}{n\sqrt{m}}$ گرافی بدون یال را به دست می دهد.
و p بیشتر از $\sqrt{\frac{۲logn}{m}}$ گرافی کامل را به دست می دهد.

وقتی p از مقدار قبلی به مقدار بعدی افزایش می یابد ما سیر تکاملی $G(n, m, p)$ را می بینیم.

نظریه ی دیگر ی از گراف های اشتراک تصادفی بوسیله ی ماتریس نمایش $R(n, m, p)$ داده شده است.

تعریف ۲.۱.۲. ماترس $R(n, m, p)$ ماتریسی $n \times m$ است که در آن سطر ها نشان دهنده ی رأس های $G(n, m, p)$ است و ستون ها نشان دهنده ی عناصر مجموعه مرجع $M = \{۱, ۲, ..., m\}$ است.
عناصر $R(n, m, p)$ صفر و یک اند. هر عنصری به طور مستقل از عناصر دیگر با احتمال p برابر ۱ و با احتمال $۱ - p$ برابر ۰ است.

از ماتریس اشتراک تصادفی $R(n, m, p)$ و تعریف گراف اشتراک تصادفی نتیجه می گیریم که در $G(n, m, p)$ دو رأس مجاوراند اگر و تنها اگر سطر های متناظر آنها حداقل یک، ۱ در ستون های مشترک داشته باشند.
توجه کنید که $G(n, m, p)$ ممکن است بوسیله ی ماتریس های نمایش متفاوت به دست آید.

مثال ۱ : گراف $G(۴, ۶, ۰/۳)$ دو یال $E(G(۴, ۶, ۰/۳)) = \{\{۱, ۲\}, \{۲, ۳\}\}$ را داراست. دو ماتریس نمایش زیر این گراف را تولید می کند.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$\Re(n, m, p)$: فضای نمونه از تمام ماتریس های $n \times m$ با عناصر ۱ ,۰ است.
$\mathcal{G}(n, m, p)$: فضای نمونه از تمام گراف هایی است که روی n رأس $\{۱, ۲, ..., n\}$ نام گذاری شده اند.
احتمال یک گراف ثابت (خاص) G در $\mathcal{G}(n, m, p)$ برابر مجموع احتمالات تمام ماتریس ها در $\Re(n, m, p)$ است که گراف G را تولید کند.
نشان خواهیم داد که با تمرکز روی سطر های R چگونه گراف $G(n, m, p)$ به دست می آید.
نگرشی دیگر از G بوسیله ی بررسی ستون های R به دست می آید.

فرض کنید یک ستون از R داده شده است، ۱ ها در این ستون، متناظر است با یک مجموعه از رأس های به هم پیوسته از G، که یک کلیک از G است.
از این قسمت چنین برداشت می شود که G می تواند بوسیله ی این فرایند نیز تولید شود. برای $j = ۱, ۲, ..., m$ این فرایند را انجام می دهیم.

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنید C_j یک زیر مجموعه ی تصادفی از $V(G) = \{۱, ۲, ..., n\}$ باشد که هر $i \in C_j$ مستقلا با احتمال p از $V(G)$ انتخاب می شود.
مجموعه های تولید شده ی $\{C_۱, C_۲, ..., C_m\}$ را داریم، گفته می شود که رأس های u, v مجاورند $(u \sim v)$ وقتی که آنها در یک C_j ی مشترک باشند.
به عبارت دیگر $\mathcal{C} = \{C_۱, C_۲, ..., C_m\}$ یک **پوشش کلیکی** [۱] از G هست.

با این خاصیت هر یال G حداقل در یکی از C_j ها ظاهر می شود.
ماتریس نمایش $R(n, m, p)$ مفهوم دیگری نیز دارد در حقیقت این ماتریس می تواند به عنوان ماتریس مجاورت[۲] گراف دوجمله ای دو بخشی [۳] $B(n, m, p)$ باشد که یال ها به طور مستقل بین رأس هایی در دو قسمت $N = \{۱, ۲, ..., n\}$ و $M = \{۱, ۲, ..., m\}$ با احتمال p اتفاق می افتند.

---
[۱] clique cover
[۲] matrix adjacency
[۳] binomial bipartite graph

گراف اشتراک تصادفی با مجموعه رأس های $N = \{۱, ۲, ..., n\}$ از $B(n, m, p)$ به صورت زیر به دست می آید.
بین دو رأس u, v از $G(n, m, p)$ زمانی یالی گذاشته می شود که رأس z ای در قسمت M موجود باشد که در گراف $B(n, m, p)$ یال های $\{vz, uz\}$ وجود داشته باشد.
چنین شاخه ای یک ارتباط مهم بین مدل دوجمله ای کلاسیک از گراف های تصادفی با یال های مستقل و گراف اشتراک تصادفی $G(n, m, p)$، که در آن یال ها به آن شدت مستقل نیستند به وجود می آورد.

ما خاصیت های $G(n, m, p)$ را برای مقادیر بزرگ n بررسی خواهیم کرد بنابراین ما دو پارامتر m, p داریم.
وقتی m در مقایسه با n خیلی کوچک است مدل چندان جالب نیست چون وقتی m کوچک است تقریبا تمام مجموعه های نسبت داده شده به رأس ها با هم اشتراک پیدا می کنند و گراف تبدیل به گرافی کامل می شود و این جالب نیست.
وقتی m در مقایسه با n بزرگ است رفتار $G(n, m, p)$ شبیه مدل اردوش و رینی است یعنی تقریبا یال ها مستقل از هم می شوند چون مجموعه ی m خیلی بزرگ است.
یک تعادل درست زمانی برقرار می شود که ما $m = \lfloor n^{\alpha} \rfloor$ (جایی که α ثابت مثبت است) بگیریم. این همان m ای خواهد بود که ما استفاده می کنیم.

۲.۲ چند لم برای اثبات قضایای فصل بعد

لم ۱.۲.۲. *[۱۰]فرض کنید:*
t : عدد صحیح مثبت باشد.
E : آزمایشی با $t + ۱$ برآمد ممکن $\{۰, ۱, ۲, ..., t\}$ باشد.
p_j : احتمال اینکه برآمد j ام را مشاهده کنیم.
N_j : شمار دفعاتی باشد که برآمد j ام را مشاهده کردیم وقتی $t \leqslant j \leqslant ۰$ قرار دارد.
$a_۱, a_۲, ..., a_t$: اعداد صحیح نا منفی ثابت ای هستند.
برای $t \leqslant j \leqslant$ داریم $۰ \to p_j$ وقتی $\infty \to n$ ($p_۰ \to ۱$) .