بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان
دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض
گرایش جبر

مدول‌های تصویری، انژکتیو و یکدست گرنشتاین n- قوی

استاد راهنما:
دکتر فیروزه جهانشاهی

دانشجو:
حدیث خدابخشی نعمت آبادی

آذر ماه ۱۳۹۰

دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد رشته‌ی ریاضی گرایش جبر

خانم حدیث خدابخشی نعمت‌آبادی

عنوان پایان‌نامه

« مدول‌های تصویری، انژکتیو و یکدست گرنشتاین n - قوی »

در تاریخ ۹۰/۹/۲۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه خانم دکتر فیروزه جهانشاهی با مرتبه ی علمی استادیار — امضاء

۲- استاد داور داخل گروه آقای دکتر مرتضی جعفرپور با مرتبه ی علمی استادیار — امضاء

۳- استاد داور خارج از گروه آقای دکتر اسفندیار اسلامی با مرتبه ی علمی استاد — امضاء

۴ - نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی آقای دکتر عیسی اسفندیارپور با مرتبه ی علمی استادیار — امضاء

چکیده

در جبر هومولوژی، به دست آوردن تعمیم‌هایی از رده‌ی مدول‌های تصویری نقشی مهم و اساسی ایفا می‌کند. در این زمینه، مطالعاتی انجام شده است که یکی از نتایج حاصل از این مطالعات معرفی رده‌ای جدید از مدول‌ها به نام مدول‌های تصویری گرنشتاین قوی می‌باشد. این رده از مدول‌ها بین مدول‌های تصویری و تصویری گرنشتاین قرار دارد. دوگان مدول‌های تصویری گرنشتاین قوی، مدول‌های انژکتیو گرنشتاین قوی نامیده شده‌اند. مدول‌های گرنشتاین قوی در مقایسه با مدول‌های گرنشتاین از مشخصه‌های ساده‌تری برخوردارند. در این پژوهش، ما به دنبال تعمیم‌سازی رده‌ی مدول‌های گرنشتاین قوی هستیم تا برخی از ساختارهای این رده از مدول‌ها را تعمیم داده و ویژگی‌های جدیدی از مدول‌های گرنشتاین قوی را ارائه دهیم. بنابراین ابتدا مدول‌های تصویری گرنشتاین $n-$ قوی را معرفی می‌کنیم. برخی از ویژگی‌های هومولوژیکی این رده‌ی جدید از مدول‌ها را خواهیم آورد. پس از ارزیابی ارتباط بین مدول‌های تصویری گرنشتاین n و $m-$ قوی، وقتی که $m \neq n$ است، نشان می‌دهیم که این رده از مدول‌ها تحت اشتراک بسته می‌باشد. سپس مدول تصویری گرنشتاین $n-$ قوی را دوگان سازی کرده و آن را مدول انژکتیو گرنشتاین $n-$ قوی می‌نامیم. معرفی مدول‌های یکدست گرنشتاین $n-$ قوی یکی دیگر از اهداف ما در این پایان‌نامه می‌باشد. پس از بیان پاره‌ای از ویژگی‌های این رده از مدول‌ها، ارتباط بین مدول‌های یکدست گرنشتاین $n-$ قوی و مدول‌های تصویری و انژکتیو گرنشتاین $n-$ قوی را به دست می‌آوریم.

واژگان کلیدی: مدول‌های انژکتیو گرنشتاین $n-$ قوی، مدول‌های تصویری گرنشتاین $n-$ قوی، مدول‌های یکدست گرنشتاین $n-$ قوی

مقدمه

توصیف حلقه‌ها بر حسب بعدهای هومولوژیکی اولین بار توسط اسلاندر[۱]، باکس‌بم[۲] و سر[۳] در سال‌های ۱۹۵۵ و ۱۹۵۶ در [۳] و [۱۹] انجام شد. آن‌ها یک حلقه‌ی موضعی و نوتری را بر حسب بعد تصویری مدول‌های روی آن حلقه، توصیف کردند. بعد از آن این سؤال مطرح شد که آیا می‌توان تعمیم‌هایی از رده‌ی مدول‌های تصویری و در نتیجه بعد تصویری یافت که توسط آن‌ها، سایر حلقه‌های مهم در جبر جابه‌جایی نظیر حلقه‌های گرنشتاین و کوهن مکالی را توصیف کرد.

در این راستا در اواخر دهه‌ی ۶۰، چندین بعد هومولوژیکی معرفی شدند که می‌توانستند خواص حلقه‌ها را توصیف کنند. اولین آن‌ها، رده‌ی مدول‌های گرنشتاین و بنابراین بعد گرنشتاین بود که توسط اسلاندر و بریدگر[۴] در سال‌های ۱۹۶۶ و ۱۹۶۷ معرفی شدند. در سال ۱۹۶۶ اسلاندر در [۱] یک رده‌ی مهم از مدول‌های با تولید متناهی را روی حلقه‌های نوتری به نام $G-$ رده به صورت زیر معرفی کرد:

اگر حلقه‌ی R نوتری باشد، آن‌گاه $G-$ رده شامل تمام $R-$ مدول‌های با تولید متناهی G است که در سه شرط زیر صدق می‌کنند:

(i) به ازای هر $i > ۰$، $Ext^i_R(G,R) = ۰$.

(ii) به ازای هر $i > ۰$، $Ext^i_R(Hom_R(G,R),R) = ۰$.

(iii) نگاشت $\varepsilon_G : G \longrightarrow Hom_R(Hom_R(G,R),R)$ یکریختی است.

در سال ۱۹۶۷ اسلاندر و بریدگر در [۲] روی حلقه‌ی نوتری R و برای $R-$ مدول با تولید متناهی M، $G-$ بعد را با نماد $G-dim_R M$ نشان داده و به این صورت تعریف کردند که $G-dim_R M \leqslant n$ اگر و تنها اگر دنباله‌ای دقیق به صورت

$$۰ \longrightarrow G_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_۰ \longrightarrow M$$

وجود داشته باشد، که در آن به ازای هر $۰ \leqslant i \leqslant n$، G_i به $G-$ رده تعلق داشته باشد. آن‌ها ثابت کردند که نامساوی $G-dim_R M \leqslant pd_R(M)$ همواره برقرار است و تساوی

[۱] Auslander

[۲] Buchsbum

[۳] Serre

[۴] Bridger

زمانی رخ می‌دهد که بعد تصویری M متناهی باشد. یکی از مهم‌ترین دستاوردهای اسلاندر و بریدگر تعمیم فرمول باکس‌بم- اسلاندر می‌باشد که امروزه با فرمول اسلاندر- بریدگر شناخته می‌شود:

فرمول اسلاندر- بریدگر فرض کنید (R, m, k) یک حلقه‌ی موضعی نوتری باشد. در این صورت به ازای هر $R-$ مدول M با $G - dim_R M < \infty$، همواره تساوی زیر وجود دارد:

$$G - dim_R M = depth R - depth_R M.$$

اما بسیاری از افراد از جمله ایناکس[۵] و جندا[۶] به این تعریف قناعت نکردند و درصدد برآمدند تا مدول $G-$ تصویری نامتناهی را روی یک حلقه‌ی دلخواه تعریف کنند. سرانجام در سال ۱۹۹۰ ایناکس و جندا به این مهم دست یافتند و این رده از مدول‌ها را تصویری گرنشتاین نام نهادند. آن‌ها هم‌چنین این تعریف را دوگان سازی کرده و آن را مدول انژکتیو گرنشتاین نامیدند [۱۰].

در سال ۱۹۹۱ مدول‌های یکدست گرنشتاین توسط ایناکس، جندا و تورسیلاز[۷] به عنوان تعمیمی از مدول‌های یکدست معرفی و مورد مطالعه قرار گرفتند [۱۱]. بعد از آن در سال‌های ۱۹۹۴-۲۰۰۵ مدول‌های تصویری، انژکتیو و یکدست گرنشتاین توسط آوراموف[۸]، کریستین‌سن،[۹] ایناکس، جندا، هلم[۱۰] و ژو[۱۱] به‌طور گسترده‌ای مورد بررسی قرار گرفتند و این نتیجه‌ی کلی به‌دست آمد که این مدول‌ها ویژگی‌های مشترک زیادی با مدول‌های کلاسیک مشابه، یعنی مدول‌های تصویری، انژکتیو و یکدست دارند [۲۰، ۱۵، ۹، ۸، ۴]. هم‌چنین، هلم از مدول‌های مشخصه روی حلقه‌های منسجم برای انتقال نتایج به‌دست آمده از مدول‌های انژکتیو گرنشتاین به مدول‌های یکدست گرنشتاین استفاده کرده است [۱۵].

در سال ۲۰۰۷ بنیز[۱۲] و مهدو[۱۳] در [۵] یک رده‌ی جدید از مدول‌ها به نام مدول‌های

[۵] Enochs

[۶] Jenda

[۷] Torrecillas

[۸] Avramov

[۹] Christensen

[۱۰] Holm

[۱۱] Xu

[۱۲] Bennis

[۱۳] Mahdou

تصویری گرنشتاین قوی را معرفی کردند. این رده از مدول‌ها بین مدول‌های تصویری و تصویری گرنشتاین قرار دارد. بنیز و مهدو دوگان این تعریف را مدول انژکتیو گرنشتاین قوی نامیدند و مدول یکدست گرنشتاین قوی را نیز تعریف کردند. آن‌ها ثابت کردند یک مدول، تصویری (انژکتیو) گرنشتاین است اگر و تنها اگر جمعوند مستقیم یک مدول تصویری (انژکتیو) گرنشتاین قوی باشد.

در سال ۲۰۰۸ یانگ[۱۴] و لی‌یو[۱۵] در [۲۱] در ادامه‌ی مطالعات بنیز و مهدو به بررسی و تحقیق در مورد ویژگی‌های مدول‌های گرنشتاین قوی پرداختند. آن‌ها نشان دادند که یک مدول، تصویری (انژکتیو، یکدست) گرنشتاین قوی است اگر و تنها اگر جمع مستقیم آن با یک مدول تصویری (انژکتیو، یکدست)، تصویری(انژکتیو، یکدست) گرنشتاین قوی باشد.

به تازگی، ژائو[۱۶] و زانگ[۱۷] در [۱۳] با استفاده از ساختار موجود جبرهای آرتینی ماتریس‌های بالا مثلثی از درجه‌ی دو توانسته‌اند ساختاری ملموس از مدول‌های تصویری گرنشتاین قوی ارائه دهند. اما تعریف مدول تصویری گرنشتاین $n-$ قوی، اولین بار در سال ۲۰۰۸ توسط بنیز و مهدو ارائه شد. آن‌ها در [۶] ثابت کردند که یک مدول تصویری گرنشتاین $n-$ قوی، تصویری است اگر و تنها اگر بعد یکدست آن متناهی باشد. سپس ثابت کردند که با صفر شدن بعضی از گروه‌های هومولوژی می‌توان ویژگی‌های معادلی برای مدول‌های تصویری گرنشتاین $n-$ قوی به‌دست آورد.

سرانجام در سال ۲۰۱۰ زائو[۱۸] و هوانگ[۱۹] اقدام به انتشار مقاله‌ی در وصف مدول‌های تصویری، انژکتیو و یکدست گرنشتاین $n-$ قوی که موضوع این پژوهش است، کردند [۲۲]. لذا ساختار این پایان‌نامه به شرح زیر می‌باشد:

فصل اول، شامل تعاریف و مفاهیم مقدماتی است که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند. فصل دوم را با توصیف مدول‌های گرنشتاین آغاز می‌کنیم. تعاریف و نتایجی که در اولین بخش از این فصل ارائه می‌شوند در فصل‌های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در دومین بخش از این فصل، توجه خود را به گزاره‌ی شناخته شده‌ی لمبک[۲۰] در رده‌ی

---

[۱۴] Yang

[۱۵] Liu

[۱۶] Gao

[۱۷] Zhang

[۱۸] Zhao

[۱۹] Huang

[۲۰] Lambek

مدول‌های گرنشتاین معطوف می‌سازیم. به نقل از هلم، این گزاره روی حلقه‌ی منسجم برای این رده از مدول‌ها برقرار است. در بخش سوم، رده‌ی مدول‌های گرنشتاین قوی که حالت خاصی از مدول‌های گرنشتاین هستند را معرفی کرده و ثابت می‌کنیم تعریف مدول گرنشتاین قوی که در این پایان‌نامه از سوی زائو و هوانگ ارائه شده با تعریف بنیز و مهدو معادل است. سپس جایگاه دقیق مدول‌های تصویری گرنشتاین قوی را مشخص می‌سازیم. هم‌چنین، مهم‌ترین ویژگی‌های این رده از مدول‌ها را که می‌تواند راه را برای ارائه‌ی یک رده‌ی جدید از مدول‌ها هموار سازد، بیان می‌نماییم.

این نکته حائز اهمیت است که مدول‌های گرنشتاین قوی توجه بسیاری از افراد را به خود جلب کرده است و از سال ۲۰۰۸ به بعد شاهد انتشار مقالات زیادی در این زمینه هستیم. اما در این پایان‌نامه مجالی برای پرداختن به تمامی این نتایج نیست. با این وجود، یکی از نتایجی که توجه‌ی ما را نیز به خود جلب کرده، همان گزاره‌ی لمبک است که یانگ و لی‌یو در [۱۳] ثابت کردند که در رده‌ی مدول‌های تصویری گرنشتاین قوی، این گزاره زمانی برقرار است که حلقه‌ی مورد نظر منسجم باشد.

در فصل سوم، به توصیف یک رده‌ی جدید از مدول‌ها در حیطه‌ی جبر هومولوژی به نام مدول‌های تصویری گرنشتاین $n-$ قوی می‌پردازیم. در واقع این رده از مدول‌ها تعمیم مدولهای تصویری گرنشتاین قوی هستند. در اولین بخش از این فصل، تلاش ما بر آن است تا توصیفی جامع از این مدول‌ها ارائه دهیم. ابتدا جایگاه اصلی این مدول‌ها را مشخص می‌سازیم. سپس مثالی جالب از یک مدول تصویری گرنشتاین ۲− قوی می‌آوریم. در جبر هومولوژی، صفر شدن تابعگون‌های هومولوژی Ext و Tor از اهمیت زیادی برخوردارند. به عنوان نمونه، در این فصل نشان می‌دهیم که خود متعامد بودن یک مدول تصویری گرنشتاین $n-$ قوی معادل با تصویری بودن آن مدول است. هم‌چنین، تحت عنوان چند قضیه نشان می‌دهیم که صفر شدن تابعگون هومولوژی Ext منجر به ارائه‌ی ساختارهایی مشابه با تعریف مدول تصویری گرنشتاین $n-$ قوی می‌شود.

هم‌چنین، در این بخش در صدد تحقق یکی از اهداف این پایان‌نامه هستیم. قضیه‌ای که مبین این مطلب است که یک مدول تصویری گرنشتاین $n-$ قوی است اگر و تنها اگر جمع مستقیم آن با هر مدول تصویری، تصویری گرنشتاین $n-$ قوی باشد. در واقع این قضیه ابزاری قدرتمند در تشخیص این‌که یک مدول تصویری گرنشتاین $n-$ قوی است، محسوب می‌شود.

در نهایت، نشان می‌دهیم که شرط با تولید متناهی بودن یک مدول تصویری گرنشتاین $n-$ قوی نقشی مهم در ایجاد پیوند بین این رده از مدول‌ها با مدول‌های یکدست گرنشتاین $n-$ قوی ایفا می‌کند. هم‌چنین، به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که بنیز و مهدو با الهام از این قضیه توانستند رده‌ی مدول‌های تصویری گرنشتاین $n-$ قوی را گسترش داده و رده‌ای جدید به نام مدول‌های تصویری گرنشتاین $(n, m)-$ قوی را معرفی کنند.

در دومین بخش از این فصل، عمده‌ی مطالب به ارزیابی ارتباط بین مدول‌های تصویری گرنشتاین n و $m-$ قوی، وقتی‌که $n \neq m$، اختصاص دارند. هدف اساسی این بخش اثبات این مطلب است که رده‌ی مدول‌های تصویری گرنشتاین $n-$ قوی تحت اشتراک بسته است.

در چهارمین فصل از این پایان‌نامه معرفی دوگان مدول تصویری گرنشتاین $n-$ قوی، یعنی مدول انژکتیو گرنشتاین $n-$ قوی، گنجانده شده است. هم‌چنین، به توصیفی اجمالی از مدول‌های یکدست گرنشتاین $n-$ قوی خواهیم پرداخت. اما هدف اصلی این فصل بررسی گزاره‌ی لمبک و ارتباط بین مدول‌های تصویری و یکدست گرنشتاین $n-$ قوی می‌باشد. سرانجام، این فصل را با مثالی از یک مدول یکدست گرنشتاین ۲$-$ قوی به پایان می‌رسانیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل، تلاش ما بر آن است تا مقدماتی را که در این پایان‌نامه به آن‌ها نیاز داریم، بیان نماییم. در بخش اول، برخی از مفاهیم و قضایای ابتدایی در مورد مدول‌ها و حلقه‌ها گنجانده شده است. در بخش دوم، وارد مبحث هومولوژی شده و به تعریف Ext، Tor و قضایای مربوط به آن‌ها می‌پردازیم. در بخش سوم، تعریف مدول جلو برنده و عقب کشنده و لم‌های مرتبط به آن‌ها که در فصل‌های آتی کاربرد دارند، آورده خواهد شد.

۱.۱ مقدمه‌ای بر مدول‌ها

در این بخش، به معرفی نمادها و بیان تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که در ادامه به آن‌ها نیاز داریم. در سرتاسر این پایان‌نامه، حلقه‌ی R یکدار بوده و یک $R-$ مدول به معنی $R-$ مدول چپ است، مگر این‌که جایی به صراحت ذکر شود. هم‌چنین، تمام نتایج به‌دست آمده برای مدول‌های راست نیز درست است.

نماد گذاری رده‌ی تمام $R-$ مدول‌های چپ را با ${}_RM$ و رده‌ی تمام $R-$ مدول‌های راست را با M_R نشان می‌دهیم. علاوه براین، رده‌ی $R-$ مدول‌های تصویری، انژکتیو و یکدست به ترتیب با $P(R)$، $I(R)$ و $F(R)$ نمایش داده می‌شوند.

قضیه ۱.۱.۱ هرگاه M یک $R-$ مدول باشد، آن‌گاه یک یکریختی از $R-$ مدول‌ها مانند

$$\varphi : Hom_R(R, M) \longrightarrow M$$

وجود دارد، به‌طوری‌که به ازای هر $f \in Hom_R(R,M)$، $\varphi(f) = f(۱)$.

برهان. به قضیه ۹.۴ از مرجع [۱۶] رجوع شود.

گزاره ۲.۱.۱ فرض کنید A یک $R-$ مدول راست و $(B_i)_{i\in I}$ یک خانواده از $R-$ مدول‌های چپ باشد. در این صورت

$$A \otimes_R (\oplus_{i\in I} B_i) \cong \oplus_{i\in I} (A \otimes_R B_i).$$

برهان. به گزاره ۱.۲.۲۲ از مرجع [۱۰] رجوع شود.

نکته ۳.۱.۱ فرض کنید

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

یک دنباله از همریختی‌های $R-$ مدولی باشد. به سادگی می‌توان نشان داد که $g \circ f = ۰$ اگر و تنها اگر $Imf \subseteq Kerg$.

اهمیت نکته‌ی بالا در این است که در اثبات اکثر قضایای هومولوژی از آن استفاده می‌شود.

قضیه ۴.۱.۱ فرض کنید دنباله‌ی

$$۰ \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow ۰$$

یک دنباله‌ی دقیق کوتاه از $R-$ مدول‌ها و M یک $R-$ مدول دلخواه باشد. در این صورت دنباله‌های دقیق کوتاه

$$۰ \longrightarrow A \oplus M \longrightarrow B \oplus M \longrightarrow C \longrightarrow ۰$$

$$۰ \longrightarrow A \longrightarrow B \oplus M \longrightarrow C \oplus M \longrightarrow ۰$$

وجود دارند.

برهان. دنباله‌ی

$$۰ \longrightarrow A \oplus M \xrightarrow{\varphi} B \oplus M \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow ۰$$

که در آن نگاشت‌های ϕ و ψ به صورت زیر تعریف می‌شوند را در نظر بگیرید:

$$\varphi : A \oplus M \longrightarrow B \oplus M \qquad\qquad \psi : B \oplus M \longrightarrow C$$

$$(a,m) \longmapsto (f(a),m) \qquad\qquad (b,m) \longmapsto g(b)$$

به‌وضوح φ و ψ همریختی $R-$ مدولی هستند. چون f یک به یک است، به سادگی می‌توان نشان داد φ نیز یک به یک است. هم‌چنین، پوشا بودن g ایجاب می‌کند که ψ نیز پوشا باشد. اما داریم:

$$\psi \circ \varphi(a, m) = \psi(f(a), m) = g \circ f(a) = ۰$$

بنابراین $Im\varphi \subseteq Ker\psi$. حال فرض کنید $(b, m) \in B \oplus M$ و $\psi(b, m) = ۰$. پس $g(b) = ۰$ و لذا $b \in Kerg = Imf$. بنابراین یک $a \in A$ وجود دارد که $f(a) = b$. در نتیجه $\varphi(a, m) = (f(a), m) = (b, m)$ و این یعنی $Ker\psi \subseteq Im\varphi$. لذا $Ker\psi = Im\varphi$ و در نتیجه دنباله‌ی مورد نظر یک دنباله‌ی دقیق کوتاه خواهد بود.

به طور مشابه می‌توان دقیق بودن دومین دنباله را نیز ثابت کرد. $\square$

نکته ۵.۱.۱ فرض کنید دنباله‌های

$$\cdots \longrightarrow A_۱ \xrightarrow{f_۱} A_۰ \xrightarrow{f_۰} K \longrightarrow ۰$$

$$۰ \longrightarrow K \xrightarrow{g_۰} B_۰ \xrightarrow{g_۱} B_۱ \longrightarrow \cdots$$

داده شده باشند. در این صورت به‌سادگی می‌توان نشان داد که دنباله‌ی زیر دقیق است.

$$\cdots \longrightarrow A_۱ \xrightarrow{f_۱} A_۰ \xrightarrow{g_۰ \circ f_۰} B_۰ \xrightarrow{g_۱} B_۱ \longrightarrow \cdots$$

قضیه ۶.۱.۱ دیاگرام جابه‌جایی

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & A_{n-۱} & \xrightarrow{d_{n-۱}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n+۱} & \longrightarrow \cdots \\
& \alpha_{n-۱}\big\downarrow & & \big\downarrow\alpha_n & & \big\downarrow\alpha_{n+۱} & \\
\cdots \longrightarrow & B_{n-۱} & \xrightarrow{\delta_{n-۱}} & B_n & \xrightarrow{\delta_n} & B_{n+۱} & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

متشکل از $R-$ مدول‌ها و همریختی‌های $R-$ مدولی را در نظر بگیرید. اگر α_i ها یکریختی باشند، آن‌گاه سطر پایین دقیق است اگر و تنها اگر سطر بالا دقیق باشد.

برهان. فرض کنید سطر بالا دقیق باشد. نشان می‌دهیم $Im\delta_{n-۱} = Ker\delta_n$. برای این منظور، فرض کنید $y \in Im\delta_{n-۱}$. پس یک $x \in B_{n-۱}$ وجود دارد که $\delta_{n-۱}(x) = y$. چون $\alpha_{n-۱}$ پوشا است، لذا برای یک $a \in A_{n-۱}$، $\alpha_{n-۱}(a) = x$. حال از جابه‌جایی دیاگرام تساوی

$$\alpha_n \circ d_{n-۱}(a) = \delta_{n-۱} \circ \alpha_{n-۱}(a) = \delta_{n-۱}(x) = y,$$

را به‌دست می‌آوریم. اما با توجه به تساوی بالا و جابه‌جایی دیاگرام و دقیق بودن سطر بالای دیاگرام داریم:

$$\delta_n(y) = \delta_n(\alpha_n \circ d_{n-۱}(a)) = \delta_n \circ \alpha_n \circ d_{n-۱}(a) = \alpha_{n+۱} \circ d_n \circ d_{n-۱}(a) = ۰$$

بنابراین $y \in Ker\delta_n$ و در نتیجه $Im\delta_{n-۱} \subseteq Ker\delta_n$. حال فرض کنید $b \in B_n$ و $\delta_n(b) = ۰$. چون α_n پوشا است، یک $a \in A_n$ وجود دارد که $\alpha_n(a) = b$. اکنون جابه‌جایی دیاگرام ایجاب می‌کند:

$$\alpha_{n+۱} \circ d_n(a) = \delta_n \circ \alpha_n(a) = \delta_n(b) = ۰$$

که با توجه به یک به یک بودن $\alpha_{n+۱}$ داریم $d_n(a) = ۰$. یعنی $a \in Kerd_n = Imd_{n-۱}$. لذا برای یک $a' \in A_{n-۱}$، $d_{n-۱}(a') = a$. بنابراین

$$\delta_{n-۱} \circ \alpha_{n-۱}(a') = \alpha_n \circ d_{n-۱}(a') = \alpha_n(a) = b,$$

و این یعنی $b \in Im\delta_{n-۱}$. در نتیجه $Ker\delta_n \subseteq Im\delta_{n-۱}$.

اگر سطر پایین دیاگرام دقیق باشد، به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که سطر بالا نیز دقیق است. □

گزاره ۷.۱.۱ حلقه‌ی R را در نظر بگیرید. در این صورت

(i) $R-$ مدول R یکدست است.

(ii) اگر $(M_i)_{i\in I}$ یک خانواده از $R-$ مدول‌ها باشد، آن‌گاه $\oplus_i M_i$ یکدست است اگر وتنها اگر هر M_i یکدست باشد.

(iii) هر مدول تصویری، یکدست است.

برهان. به گزاره ۳.۴۶ از مرجع [۱۸] رجوع شود.

گزاره ۸.۱.۱ [لم شانوئل] دنباله‌های دقیق کوتاه

$$۰ \longrightarrow K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow ۰$$

$$۰ \longrightarrow K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{\pi'} M \longrightarrow ۰$$

که در آن‌ها $R-$ مدول‌های P و P' تصویری هستند را در نظر بگیرید. در این صورت یکریختی

$$K \oplus P' \cong K' \oplus P,$$

وجود دارد.

برهان. به گزاره ۳.۱۲ از مرجع [۱۸] رجوع شود.

قضیه‌ی بعد تعمیم لم شانوئل است.

قضیه ۹.۱.۱ فرض کنید B یک $R-$ مدول باشد. دنباله‌های دقیق

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_. \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow Q_n \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_. \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

که در آن‌ها به ازای هر $0 \leqslant i \leqslant n$، مدول‌های P_i و Q_i تصویری هستند را در نظر بگیرید. در این صورت یکریختی

$$K \oplus Q_n \oplus P_{n-1} \oplus \cdots \cong K' \oplus P_n \oplus Q_{n-1} \oplus \cdots$$

وجود دارد.

برهان. با استقرا روی n به اثبات قضیه می‌پردازیم. اگر $n = 0$، آن‌گاه دنباله‌های دقیق کوتاه زیر وجود دارند:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P. \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow Q. \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

بنابراین طبق لم شانوئل، $K \oplus Q. \cong K' \oplus P.$. حال فرض کنید $n = 1$. در این صورت دنباله‌های دقیق

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_1 \longrightarrow P. \longrightarrow B \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q. \longrightarrow B \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

وجود دارند. حال از این دو دنباله، دنباله‌های دقیق کوتاه زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$0 \longrightarrow Im(P_1 \longrightarrow P.) \longrightarrow P. \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

$$\longrightarrow Im(Q_1 \longrightarrow Q.) \longrightarrow Q. \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

در این صورت طبق لم شانوئل داریم:

$$Im(Q_1 \longrightarrow Q.) \oplus P. \cong Im(P_1 \longrightarrow P.) \oplus Q.$$

از طرفی، دنباله‌های دقیق کوتاه زیر نیز از دنباله‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آیند:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_1 \longrightarrow Im(P_1 \longrightarrow P_.) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Im(Q_1 \longrightarrow Q_.) \longrightarrow 0$$

حال طبق قضیه‌ی ۴.۱.۱، دیاگرام زیر با سطرهای دقیق وجود دارد:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P_1 \oplus Q_. & \longrightarrow & Im(P_1 \longrightarrow P_.) \oplus Q_. & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & Q_1 \oplus P_. & \longrightarrow & Im(Q_1 \longrightarrow Q_.) \oplus P_. & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

با استفاده مجدد از لم شانوئل داریم:

$$K \oplus Q_1 \oplus P_. \cong K' \oplus P_1 \oplus Q_.$$

اکنون فرض کنید قضیه برای $l < n$ برقرار باشد و دنباله‌های دقیق زیر را در نظر بگیرید:

$$0 \longrightarrow Im(P_n \longrightarrow P_{n-1}) \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_. \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Im(Q_n \longrightarrow Q_{n-1}) \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_. \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

طبق فرض استقرا داریم:

$$Im(P_n \longrightarrow P_{n-1}) \oplus Q_{n-1} \oplus \cdots \cong Im(Q_n \longrightarrow Q_{n-1}) \oplus P_{n-1} \oplus \cdots$$

از سوی دیگر، دنباله‌های دقیق کوتاه زیر وجود دارند:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_n \longrightarrow Im(P_n \longrightarrow P_{n-1}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow Q_n \longrightarrow Im(Q_n \longrightarrow Q_{n-1}) \longrightarrow 0$$

حال با توجه به قضیه‌ی ۴.۱.۱، دیاگرامی با سطرهای دقیق به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P_n \oplus (Q_{n-1} \oplus \cdots) & \longrightarrow & Im(P_n \longrightarrow P_{n-1}) \oplus (Q_{n-1} \oplus \cdots) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & Q_n \oplus (P_{n-1} \oplus \cdots) & \longrightarrow & Im(Q_n \longrightarrow Q_{n-1}) \oplus (P_{n-1} \oplus \cdots) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

در نتیجه با استفاده از لم شانوئل داریم:

$$K \oplus Q_n \oplus (P_{n-1} \oplus \cdots) \cong K' \oplus P_n \oplus (Q_{n-1} \oplus \cdots).$$

بنابراین برهان قضیه کامل است. $\square$

۲.۱ هومولوژی

در این بخش، توجه خود را معطوف به برخی از مفاهیم هومولوژی می‌سازیم که نقش مهمی در این پایان‌نامه ایفا می‌کنند. مفاهیمی چون مدول با نمایش متناهی، حد مستقیم و مهم‌ترین تابعگون‌های هومولوژی که همان Ext و Tor بوده و نقش اساسی در عمده مطالب این پژوهش بر عهده دارند.

تعریف ۱.۲.۱ تابعگون همورد $T : {}_RM \longrightarrow {}_RM$ را دقیق چپ می‌نامیم، اگر دقیق بودن دنباله‌ی

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

دقیق بودن دنباله‌ی

$$0 \longrightarrow T(A) \xrightarrow{T(f)} T(B) \xrightarrow{T(g)} T(C)$$

را القا کند و T را دقیق راست می‌نامیم، هرگاه دقیق بودن دنباله‌ی

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

دقیق بودن دنباله‌ی

$$T(A) \xrightarrow{T(f)} T(B) \xrightarrow{T(g)} T(C) \longrightarrow 0$$

را القا کند.

علاوه براین، تابعگون همورد T را دقیق می‌نامیم، هرگاه T هم دقیق چپ و هم دقیق راست باشد.

قضیه ۲.۲.۱ برای هر $R-$ مدول M، $Hom_R(M,-)$ یک تابعگون همورد دقیق چپ و $M \otimes_R -$ یک تابعگون همورد دقیق راست است.

برهان. به قضایای ۲.۳۸ و ۲.۶۳ از مرجع [۱۸] رجوع شود.

تعریف ۳.۲.۱ تابعگون پادورد $T : {}_RM \longrightarrow {}_RM$ را دقیق چپ می‌نامیم، اگر دقیق بودن دنباله‌ی

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

دقیق بودن دنباله‌ی

$$0 \longrightarrow T(C) \xrightarrow{T(g)} T(B) \xrightarrow{T(f)} T(A)$$

را القا کند و T را دقیق راست می‌نامیم، هرگاه دقیق بودن دنباله‌ی

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

دقیق بودن دنباله‌ی

$$T(A) \xrightarrow{T(g)} T(B) \xrightarrow{T(f)} T(C) \longrightarrow 0$$

را القا کند.

علاوه براین، تابعگون پادورد T را دقیق می‌نامیم، هرگاه T هم دقیق چپ و هم دقیق راست باشد.

قضیه ۴.۲.۱ برای هر $R-$ مدول M، $Hom_R(-, M)$ یک تابعگون پادورد دقیق چپ است.

برهان. به قضیه ۲.۴۰ از مرجع [۱۸] رجوع شود.

قضیه‌ی بعد رفتار تابعگون‌ها را با هسته و تصویر یک همریختی $R-$ مدولی نشان می‌دهد.

قضیه ۵.۲.۱ تابعگون $T : {}_RM \longrightarrow {}_RM$ را در نظر بگیرید.

(i) اگر T یک تابعگون همورد دقیق چپ باشد، آن‌گاه به ازای هر همریختی $R-$ مدولی $f : A \longrightarrow B$، $TKerf \cong KerTf$.

(ii) اگر T یک تابعگون پادورد دقیق چپ باشد، آن‌گاه به ازای هر همریختی $R-$ مدولی $f : A \longrightarrow B$، $TImf \cong ImTf$.

(iii) اگر T یک تابعگون همورد دقیق راست باشد، آن‌گاه به ازای هر همریختی $R-$ مدولی $f : A \longrightarrow B$، $TImf = ImTf$.

برهان. همریختی $R-$ مدولی $f : A \longrightarrow B$ را در نظر بگیرید. در این صورت دنباله‌ای دقیق به صورت

$$0 \longrightarrow Kerf \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} Imf \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

وجود دارد، که در آن i نگاشت شمول است. حال

(i) اگر T یک تابعگون همورد و دقیق چپ باشد، آن‌گاه از دنباله‌ی (۱) دنباله‌ی دقیق زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$0 \longrightarrow TKerf \xrightarrow{Ti} TA \xrightarrow{Tf} TImf$$

اما طبق قضیه‌ی اول یکریختی داریم:

$$TKerf \cong ImTi = KerTf.$$

(ii) اگر T یک تابعگون پادورد و دقیق چپ باشد، آن‌گاه از دنباله‌ی (۱) دنباله‌ی دقیق زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$0 \longrightarrow TImf \xrightarrow{Tf} TA \xrightarrow{Ti} TKerf$$

لذا قضیه‌ی اول یکریختی ایجاب می‌کند $TImf \cong ImTf$.

(iii) اگر T یک تابعگون همورد و دقیق راست باشد، آن‌گاه از دنباله‌ی (۱) دنباله‌ی دقیق زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$TKerf \xrightarrow{Ti} TA \xrightarrow{Tf} TImf \longrightarrow 0$$

اما پوشا بودن Tf ایجاب می‌کند $ImTf = TImf$. $\square$

قضیه ۶.۲.۱ دنباله‌ی دقیق

$$\varphi = \quad \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\alpha_1} X_0 \xrightarrow{\alpha_0} Y^0 \xrightarrow{\beta^0} Y^1 \xrightarrow{\beta^1} Y^2 \longrightarrow \cdots$$

از $R-$ مدول‌ها را در نظر بگیرید. قرار دهید $M = Im\alpha_0 = Ker\beta^0$. لذا φ به دو دنباله‌ی دقیق زیر تجزیه می‌شود:

$$\varphi_1 = \quad \cdots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\alpha_2} X_1 \xrightarrow{\alpha_1} X_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

$$\varphi_2 = \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} Y^0 \xrightarrow{\beta^0} Y^1 \xrightarrow{\beta^1} Y^2 \longrightarrow \cdots$$

که در دنباله‌ی φ_2، i نگاشت شمول است.

فرض کنید $T : {}_RM \longrightarrow {}_RM$ یک تابعگون همورد (پادورد) جمعی باشد. در این صورت اگر $T(\varphi_1)$ و $T(\varphi_2)$ هر دو دقیق باشند، آن‌گاه $T(\varphi)$ نیز دقیق است. عکس گزاره در صورتی صحیح است که تابعگون T دقیق چپ یا دقیق راست باشد.

برهان. فرض کنید T یک تابعگون همورد و دنباله‌های

$$T(\varphi_1) = \quad \cdots \longrightarrow T(X_2) \xrightarrow{T(\alpha_2)} T(X_1) \xrightarrow{T(\alpha_1)} T(X_0) \xrightarrow{T(\alpha_0)} T(M) \longrightarrow 0$$

$$T(\varphi_2) = \quad 0 \longrightarrow T(M) \xrightarrow{T(i)} T(Y^0) \xrightarrow{T(\beta^0)} T(Y^1) \xrightarrow{T(\beta^1)} T(Y^2) \longrightarrow \cdots$$

دقیق باشند. حال با توجه به نکته ۵.۱.۱، از دنباله‌های $T(\varphi_1)$ و $T(\varphi_2)$ دنباله‌ی دقیق زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\cdots \longrightarrow T(X_1) \xrightarrow{T(\alpha_1)} T(X_0) \xrightarrow{T(i)\circ T(\alpha_0)} T(Y^0) \xrightarrow{T(\beta^0)} T(Y^1) \xrightarrow{T(\beta^1)} \cdots \qquad (1)$$