بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر

زیر جبر نقاط ثابت جبرهای لی مدرج–ریشه

استادان راهنما:

دکتر ملیحه یوسف‌زاده

دکتر سعید اعظم

پژوهشگر:

مهدی ابراهیمی

اسفند ماه ۱۳۸۹

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر آقای مهدی ابراهیمی

تحت عنوان:

زیر جبرهای نقاط ثابت جبرهای لی مدرج-ریشه

در تاریخ ۸۹/۱۲/۱۸ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......عالی.......... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر سعید اعظم	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر ملیحه یوسف زاده	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر جواد باقریان	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر احمد حقانی	با مرتبه علمی استاد	امضاء

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

مهر و امضای مدیر گروه ....

تقدیم به هر کس که این اثر پیش روی اوست

سپاس گزاری:

حمد و سپاس خدای سبحان را که به من توفیق بخشید تا بیاموزم آنچه را که نمی‌دانم. اوست که بر من منت نهاد تا در پرتو رحمت بی انتهایش در محضر اساتیدی دلسوز تلمذ کرده و عصاره‌ی آموخته‌های خویش را در قالب این پایان نامه متجلّی سازم.

سرکار خانم دکتر ملیحه یوسف زاده، معلّمی دلسوز، استادی متعهّد، صبور و نمونه‌ای کامل از یک الگوی اخلاقی و علمی است و آنچه امروز در زمینه‌ی رشته‌ی تحصیلی خویش می‌دانم و این اثر که میوه‌ی این آموخته‌هاست، همه را مدیون ایشان هستم. صمیمانه از زحماتشان ممنون بوده و توفیق روزافزون ایشان را از خداوند منّان خواستارم. همچنین از جناب آقای دکتر سعید اعظم که راهنمایی‌های ایشان همواره برایم راه‌گشا بوده است ممنونم و امیدوارم که در تمام مراحل زندگی پیروز باشند.

در پایان از تمام عزیزانی که در تدوین این اثر مرا یاری رساندند صمیمانه قدردانی می‌کنم و توفیق روزافزون ایشان را از خداوند خواستارم.

چکیده:

در این پایان‌نامه زیرجبر نقاط ثابت یک جبر لی مدرج–ریشه، متناظر با کلاس معینی از خود ریختی‌های با مرتبه‌ی متناهی از آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. می‌دانیم که هسته‌ی بدون مرکز جبرهای لی آفین توسیعی، یا به طور معادل، چنبره‌های لی بدون مرکز تحویل‌ناپذیر، مثال‌هایی از جبرهای لی مدرج–ریشه هستند. لذا بررسی ساختار زیر جبر نقاط ثابت یک جبر لی مدرج–ریشه، متناظر با کلاس معینی از خودریختی‌های آن، تعمیمی از پژوهش‌های اخیر می‌باشد که در زمینه‌ی زیرجبر نقاط ثابت یک چنبره‌ی لی، متناظر با کلاس معینی از خودریختی‌های با مرتبه‌ی متناهی آن انجام گرفته است.

کلیدواژه‌ها: جبر لی مدرج–ریشه، چنبره‌ی لی

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

یکی از ساختارهایی که در مطالعه و رده‌بندی جبرهای لی نقش مهمی را ایفا می‌کند، مفهوم آفین‌سازی است. کز[۱]، برای اولین بار این مفهوم را مطرح نمود و برای مطالعه و رده‌بندی جبرهای لی کز– مودی آفین از آن بهره جست.

فرض کنیم $\mathcal{G}$ یک جبر لی مجهز به یک فرم دوخطی متقارن پایای $(\cdot,\cdot)$ باشد که بر روی یک میدان از مشخصه‌ی صفر $\mathbb{F}$ تعریف شده است. هم‌چنین فرض کنیم n یک عدد طبیعی، σ یک خودریختی با مرتبه‌ی n از جبر لی $\mathcal{G}$ و $\zeta \in \mathbb{F}$ یک ریشه‌ی nام اولیه‌ی یک باشد. حال اگر $\mathbb{F}c \oplus \mathbb{F}d$ یک فضای برداری دو بعدی بوده و برای هر $i \in \mathbb{Z}$،

$$\mathcal{G}_{\bar{i}} := \{x \in \mathcal{G} \mid \sigma(x) = \zeta^i x\},$$

اختیار شود، دراین‌صورت

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{G},\sigma) := (\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_{\bar{i}} \otimes t^i) \oplus \mathbb{F}c \oplus \mathbb{F}d,$$

به همراه براکت لی

$$[\cdot,\cdot] : \mathrm{Aff}(\mathcal{G},\sigma) \times \mathrm{Aff}(\mathcal{G},\sigma) \longrightarrow \mathrm{Aff}(\mathcal{G},\sigma)$$

$$[c, \mathrm{Aff}(\mathcal{G},\sigma)] := \{0\}, [d, x \otimes t^i] = ix \otimes t^i,$$

[۱] V. Kac

$$[x\otimes t^i, y\otimes t^j] := [x,y]\otimes t^{i+j} + i\delta_{i+j,\circ}(x,y)c,$$

$$i,j\in\mathbb{Z}, x\in\mathcal{G}_{\bar{i}}, y\in\mathcal{G}_{\bar{j}},$$

یک جبر لی است. $\mathrm{Aff}(\mathcal{G},\sigma)$ یک آفین‌سازی جبر لی $\mathcal{G}$، متناظر با خودریختی σ نامیده می‌شود. به راحتی می‌توان دید که خودریختی σ به یک خودریختی با مرتبه‌ی n از جبر لی $\mathrm{Aff}(\mathcal{G},\sigma)$ قابل تعمیم است، این خودریختی که با همان نماد σ نمایش داده می‌شود به صورت

$$\sigma : \mathrm{Aff}(\mathcal{G},\sigma) \longrightarrow \mathrm{Aff}(\mathcal{G},\sigma)$$

$$x\otimes t^i + rc + sd \mapsto \zeta^{-i}\sigma(x)\otimes t^i + rc + sd;\ i\in\mathbb{Z},\ x\in\mathcal{G}_{\bar{i}},\ r,s\in\mathbb{F},$$

تعریف می‌گردد. می‌توان دید که زیرجبر نقاط ثابت $\mathrm{Aff}(\mathcal{G},\sigma)(\sigma)$ از جبر لی $\mathrm{Aff}(\mathcal{G},\sigma)$ دارای ساختاری به فرم

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{G},\sigma)(\sigma) := (\mathcal{G}(\sigma)\otimes\mathbb{F}[t^{\pm n}])\oplus\mathbb{F}c\oplus\mathbb{F}d.$$

می‌باشد که در آن $\mathcal{G}(\sigma)$ زیرجبر نقاط ثابت جبر لی $\mathcal{G}$، متناظر با خودریختی σ است.

پیرامون اهمیت مطالعه‌ی آفین‌سازی یک جبر لی $\mathcal{G}$، می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

۱) هر جبر لی کز– مودی آفین به صورت آفین‌سازی یک جبر لی ساده‌ی با بعد متناهی $\mathcal{G}$، متناظر با یک خودریختی معینی از آن قابل بیان است.

۲) با در نظر گرفتن یک خودریختی از یک جبر لی آفین توسیعی $\mathcal{G}$ که از مرتبه‌ی متناهی بوده و در شرایط خاصی صدق می‌کند، دیده می‌شود که زیرجبر نقاط ثابت آفین‌سازی جبر $\mathcal{G}$، متناظر با این خودریختی، نیز یک جبر لی آفین توسیعی است.

۳) با در نظر گرفتن آفین‌سازی یک جبر لی ساده‌ی با بعد متناهی، و یا یک جبر لی کز – مودی آفین که متناظر با یک خودریختی معین از آن توصیف شده است، قادر خواهیم بود که مثال‌های فراوانی را از جبرهای لی آفین توسیعی ارایه کنیم.

۴) آفین‌سازی یک جبر لی آفین توسیعی رام با پوچی صفر، متناظر با یک خودریختی معین از آن یک جبر لی آفین توسیعی رام با پوچی یک است.

بنابراین با توجه به کاربردهای آفین‌سازی یک جبر لی $\mathcal{L}$، متناظر با یک خودریختی معین از آن و وابستگی این مفهوم به زیرجبر نقاط ثابت $\mathcal{L}$، می‌توان دریافت که شناخت ساختار زیرجبر نقاط ثابت یک جبر لی $\mathcal{L}$، متناظر با کلاس معینی از خودریختی‌های آن دارای اهمیت و کاربرد ویژه‌ای است.

در سال ۱۹۵۵، بورل [۲] و موستو[۳] در مرجع [۷] نشان دادند که زیرجبر نقاط ثابت یک جبر لی ساده‌ی شکافنده‌ی با بعد متناهی، متناظر با یک خودریختی از مرتبه‌ی متناهی، یک جبر لی تحویلی است. از آن‌جایی که یک جبر لی ساده‌ی شکافنده‌ی با بعد متناهی یک جبر لی آفین توسیعی رام با پوچی صفر است، به‌طور طبیعی این سوال مطرح می‌شود که درباره‌ی زیرجبر نقاط ثابت یک جبر لی آفین توسیعی، متناظر با یک خودریختی معین از مرتبه‌ی متناهی چه می‌توان گفت؟ در سال ۲۰۰۵، اعظم[۴]، برمن[۵] و یوسف زاده[۶] در مرجع [۴]، به این سوال پاسخ دادند. ایشان ثابت کردند که چنین جبری ساختار شبه تحویلی دارد. به این معنی که این جبر به صورت جمع مستقیمی از جبرهای لی آفین توسیعی، زیرفضایی از مرکز زیرجبر نقاط ثابت و زیرفضایی از مرکزساز هسته زیرجبر نقاط ثابت قابل بیان است. از آن‌جایی‌که هسته بدون مرکز یک جبر لی آفین توسیعی یک چنبره‌ی لی تحویل‌ناپذیر بدون مرکز است، دومین سوال مطرح شده این بود که راجع به زیرجبر نقاط ثابت یک چنبره‌ی لی چه می‌توان گفت؟ در سال ۲۰۰۶، اعظم و خلیلی[۷] در مرجع [۵]، این سوال را مورد مطالعه قرار دادند. ایشان نشان دادند که هسته بدون مرکز زیرجبر نقاط ثابت یک چنبره‌ی لی تحویل‌ناپذیر بدون مرکز $\mathcal{L}$، متناظر با کلاس معینی از خودریختی‌های $\mathcal{L}$ به صورت جمع مستقیمی از چنبره‌های لی تحویل‌ناپذیر بدون مرکز قابل توصیف است. در راستای

[۲] A. Borel
[۳] G.D. Mostow
[۴] S. Azam
[۵] S. Berman
[۶] M. Yousofzadeh
[۷] V. Khalili

تکمیل پژوهش‌های صورت گرفته، در این پایان‌نامه که بر اساس مرجع [۱۷] تدوین شده است، به بررسی ساختار زیرجبر نقاط ثابت یک جبر لی مدرج– ریشه، متناظر با کلاس معینی از خودریختی‌های آن خواهیم پرداخت.

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل است. ابتدا، در فصل اول در چهار بخش با بیان مفاهیم و تعاریفی از تعریف یک جبر لی، سیستم‌های ریشه‌ی متناهی، جبرهای لی نیم‌ساده و نمایش‌ها و مدول‌ها زمینه را برای ورود به بدنه‌ی اصلی پایان‌نامه فراهم می‌سازیم. سپس در فصل دوم به طور مشروح، به توصیف ساختار یک جبر لی مدرج– ریشه خواهیم پرداخت. در ادامه، با در نظر گرفتن حالات مختلف، در خلال فصل سوم به تفصیل به مطالعه‌ی ساختار زیرجبر نقاط ثابت جبرهای لی $(R,\Lambda)-$ مدرج، $R-$ مدرج و $(R,S,\Lambda)-$ مدرج پرداخته و با بیان گزاره‌ی اصلی این پایان‌نامه این فصل را خاتمه می‌دهیم. سرانجام در خلال فصل چهارم مثال‌هایی را از نتایج به دست آمده در فصل سوم ارایه خواهیم کرد.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این پایان‌نامه همواره، $\mathbb{F}$ به عنوان یک میدان از مشخصه‌ی صفر و i، j، k، ℓ، m و n به عنوان اعداد صحیح نامنفی در نظر گرفته می‌شوند. شایان ذکر است، جز در مواردی که به صراحت بیان خواهد شد، همه‌ی فضاهای برداری موجود در این پایان‌نامه بر میدان $\mathbb{F}$ تعریف شده‌اند.

در این فصل برآنیم که به معرفی برخی از مفاهیم ابتدایی جبر لی که در خلال این پایان‌نامه مورد نیاز است، بپردازیم.

۱.۱ معرفی جبرهای لی

در این بخش برآنیم تا به طور اجمالی به معرفی جبرهای لی بپردازیم. در بیان مطالب این بخش از مراجع زیر استفاده می‌شود:

۱) بخش ۳.۲ از مرجع [۱۰]،

۲) بخش‌های ۹.۱ و ۱۰.۱ از مرجع [۹]،

۳) بخش ۱.۱ از مرجع [۸]،

۴) بخش ۴.۱ از مرجع [۱۴]،

۵) بخش‌های ۱.۱۰، ۲.۱۰ و ۳.۱۰ از مرجع [۱۹].

لازم به ذکر است که در این بخش از پایان‌نامه، لم‌ها و گزاره‌هایی که اثبات آن‌ها در یکی از مراجع فوق بیان شده است، فاقد اثبات می‌باشند.

تعریف ۱.۱ فرض کنید $\mathcal{L}$ یک فضای برداری و $[\cdot,\cdot] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ یک تبدیل دوخطی بر روی $\mathcal{L}$ باشد به‌طوری که برای هر $x, y, z \in \mathcal{L}$ شرایط زیر برقرار باشد،

۱) خاصیت پادجابه‌جایی: $[x, x] = 0,$

۲) اتحاد ژاکوبی: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

دراین‌صورت $\mathcal{L}$ را یک جبر لی گوییم.

از آن‌جایی که $\mathbb{F}$ یک میدان از مشخصه‌ی صفر است، شرط (۱) با شرط زیر معادل می‌باشد،

۱′) برای هر $x, y \in \mathcal{L}$، $[x, y] = -[y, x]$.

یک زیرفضای K از $\mathcal{L}$ را یک زیرجبر لی از $\mathcal{L}$ می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in K$، $[x, y] \in K$. به وضوح هر زیرجبر لی از $\mathcal{L}$ خود یک جبر لی است. فرض کنید $\mathcal{H}$ و K دو زیرفضا از $\mathcal{L}$ باشد، $[\mathcal{H}, K]$ را زیرفضای پدید آمده توسط همه‌ی عناصر به فرم $[x, y]$ تعریف می‌کنیم به‌طوری که $x \in \mathcal{H}$ و $y \in K$. دراین‌صورت دیده می‌شود که $[\mathcal{H}, K] = [K, \mathcal{H}]$ و هر بردار این فضای برداری به فرم $\sum_{i=1}^{n}[x_i, y_i]$ است به‌طوری که $n \in \mathbb{N}$ و برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، $x_i \in \mathcal{H}$ و $y_i \in K$. حال فرض کنیم I یک زیرفضا از $\mathcal{L}$ باشد به‌طوری که برای هر $x \in \mathcal{L}$، $[x, I] \subseteq I$، دراین‌صورت I را یک ایده‌آل از $\mathcal{L}$ گوییم. به راحتی دیده می‌شود که مجموع و اشتراک دو ایده‌آل (دو زیرجبرلی) از $\mathcal{L}$ یک ایده‌آل (یک زیرجبر لی) $\mathcal{L}$ است. فرض کنیم $\mathcal{L}' := [\mathcal{L}, \mathcal{L}]$، دیده می‌شود که $\mathcal{L}'$ ایده‌آلی از $\mathcal{L}$ است. $\mathcal{L}'$ را جبر مشتق $\mathcal{L}$ می‌نامیم، درضمن هرگاه $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$، $\mathcal{L}$ را یک جبر لی کامل گوییم. حال فرض کنیم I ایده‌آلی از $\mathcal{L}$ باشد، دراین‌صورت دیده می‌شود که فضای برداری خارج قسمتی $\mathcal{L}/I$ به همراه ضرب

$$[x + I, y + I] := [x, y] + I.$$

به‌طوری که $x, y \in \mathcal{L}$، یک جبر لی است.

فرض کنیم $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ دو جبر لی باشند، دراین‌صورت تبدیل خطی $\theta : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ را که برای هر $x, y \in \mathcal{L}_1$، در شرط

$$\theta([x, y]) = [\theta(x), \theta(y)]$$

صدق می‌کند، یک همریختی از جبرهای لی می‌نامیم. در صورت دوسویی بودن θ، θ یک یکریختی بین جبرهای لی $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ نامیده می‌شود، دراین‌صورت $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ را جبرهای لی یکریخت نامیده و این مطلب را با نماد $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$ نمایش می‌دهیم. برای هر همریختی $\theta : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ به سادگی دیده می‌شود که $\ker\theta := \{x \in \mathcal{L}_1 |\ \theta(x) = 0\}$ ایده‌آلی از $\mathcal{L}_1$ و $\mathrm{Img}\theta := \theta(\mathcal{L}_1)$ یک زیرجبر لی $\mathcal{L}_2$ است.

گزاره ۱.۱ فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک زیرجبر لی $\mathcal{L}$ و I و J ایده‌آل‌هایی از $\mathcal{L}$ باشند که ایده‌آل I مشمول در J است. هم‌چنین فرض کنیم $\theta : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ یک همریختی بین جبرهای لی $\mathcal{L}$ و $\mathcal{L}'$ باشد، دراین‌صورت

۱) قضیه اول یکریختی: $\mathcal{L}/\ker\theta \cong \mathrm{Img}\theta$،

۲) قضیه دوم یکریختی: $(I + \mathcal{H})/I \cong \mathcal{H}/(I \cap \mathcal{H})$،

۳) قضیه سوم یکریختی: $(\mathcal{L}/I)/(J/I) \cong \mathcal{L}/J$. □

تعریف ۲.۱ برای یک زیرمجموعه‌ی S از جبر لی $\mathcal{L}$، زیرجبر لی تولید شده توسط مجموعه‌ی S را که با نماد $\mathcal{L}(S)$ نمایش داده می‌شود، برابر اشتراک تمام زیرجبرهایی از $\mathcal{L}$ که مجموعه‌ی S را شامل می‌باشند، تعریف می‌کنیم.

در ادامه‌ی این بخش به معرفی مفاهیمی از یک جبر لی $\mathcal{L}$ پرداخته و سپس با معرفی عملگر مشتق یک جبر لی، دو مفهوم جمع مستقیم و جمع نیم‌مستقیم را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

برای جبر لی $\mathcal{L}$ و زیرمجموعه‌ی S از $\mathcal{L}$، مرکز $\mathcal{L}$ و مرکزساز S در $\mathcal{L}$ را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z(\mathcal{L}) := \{x \in \mathcal{L} |\ [x, \mathcal{L}] = \{0\}\},$$
$$C_{\mathcal{L}}(S) := \{x \in \mathcal{L} |\ [x, S] = \{0\}\},$$

لازم به ذکر است که اگر $\mathcal{L} = Z(\mathcal{L})$، $\mathcal{L}$ را یک جبر لی آبلی و در صورت صفر بودن $Z(\mathcal{L})$، $\mathcal{L}$ را یک جبر لی بدون مرکز گوییم. حال فرض کنیم برای زیرجبر $\mathcal{H}$ از $\mathcal{L}$، $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$، دراین‌صورت $\mathcal{H}$ را یک زیرجبر لی خودمرکزساز از $\mathcal{L}$ می‌نامیم.

فرض کنیم δ یک عملگر خطی از $\mathcal{L}$ باشد که برای هر $x, y \in \mathcal{L}$،

$$\delta([x,y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]$$

دراین‌صورت δ را یک عملگر مشتق از $\mathcal{L}$ می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای مشتق $\mathcal{L}$ با نماد $Der(\mathcal{L})$ نمایش داده می‌شود. به راحتی می‌توان دید که برای هر $x \in \mathcal{L}$، تبدیل خطی

$$\begin{aligned} ad\ x : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L} \\ y &\mapsto [x,y],\ y \in \mathcal{L}, \end{aligned}$$

یک عملگر مشتق از $\mathcal{L}$ است که آن را یک عملگر مشتق داخلی از $\mathcal{L}$ می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای مشتق داخلی $\mathcal{L}$ با نماد $Innder(\mathcal{L})$ نمایش داده می‌شود. حال فرض کنیم $\delta \in Der(\mathcal{L})$ پوچ‌توان باشد، لذا برای یک عدد طبیعی n، $\delta^n = ۰$. متناظر با عملگر δ، $\exp(\delta)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\exp(\delta) := ۱ + \delta + \frac{۱}{۲!}\delta^۲ + \frac{۱}{۳!}\delta^۳ + \cdots + \frac{۱}{(n-۱)!}\delta^{(n-۱)},$$

که در آن "۱" تابع همانی می‌باشد. دراین‌صورت دیده می‌شود که $\exp(\delta)$ وارون‌پذیر بوده و

$$\exp(\delta)^{-۱} = \exp(-\delta). \tag{۱.۱}$$

مثال ۲.۱ فرض کنیم $(\mathcal{A}, \cdot)$ یک جبر شرکت‌پذیر باشد. دراین‌صورت $(\mathcal{A}, \cdot)$ همراه با عمل ضرب $[\cdot,\cdot] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ که برای هر $a, b \in \mathcal{A}$، $[a,b] := ab - ba$ تعریف می‌شود، یک جبر لی است. $(\mathcal{A}, [\cdot,\cdot])$ را جبر لی متناظر با جبر شرکت‌پذیر $\mathcal{A}$ نامیده و آن را با نماد $[\mathcal{A}]$ نمایش می‌دهیم.

با توجه به این مثال، برای هر فضای برداری V، $\mathfrak{gl}(V) = [\mathrm{End}(V)]$ و برای هر جبر لی $\mathcal{L}$، $[Der(\mathcal{L})]$ و $[Innder(\mathcal{L})]$ مثال‌هایی از جبر لی متناظر با یک جبر شرکت‌پذیر می‌باشند.

فرض کنیم $(\mathcal{L}_1,[\cdot,\cdot]_1)$ و $(\mathcal{L}_2,[\cdot,\cdot]_2)$ دو جبر لی و $\theta:\mathcal{L}_1\longrightarrow[Der(\mathcal{L}_2)]$ یک همریختی از جبرهای لی باشد، حال با در نظر گرفتن فضای برداری $\mathcal{L}:=\mathcal{L}_1\oplus\mathcal{L}_2$ عمل ضرب $[\cdot,\cdot]:\mathcal{L}\times\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}$ را برای هر $x_1,y_1\in\mathcal{L}_1$ و $x_2,y_2\in\mathcal{L}_2$، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[x_1+x_2,y_1+y_2]:=[x_1,y_1]_1+\theta(x_1)(y_2)-\theta(y_1)(x_2)+[x_2,y_2]_2. \qquad (2.1)$$

گزاره ۳.۱ $(\mathcal{L},[\cdot,\cdot])$ یک جبر لی است که در صورت ناصفر بودن θ، $\mathcal{L}_1$ یک زیرجبر لی آن بوده و $\mathcal{L}_2$ ایده‌آلی از آن می‌باشد.

تعریف ۳.۱ فرض کنیم $(\mathcal{L},[\cdot,\cdot])$ جبر لی توصیف شده در گزاره ۳.۱ بوده و $\theta\neq0$. دراین صورت $\mathcal{L}$ را جمع نیم‌مستقیم جبرهای لی $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$، متناظر با نگاشت θ نامیده و با نماد $\mathcal{L}=\mathcal{L}_2\rtimes\mathcal{L}_1$ نمایش می‌دهیم.

درصورتی که $\theta=0$، $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ زیرجبرهای لی $\mathcal{L}$ خواهد بود. در این حالت $\mathcal{L}$ را جمع مستقیم $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ نامیده و به صورت $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\oplus\mathcal{L}_2$ نمایش می‌دهیم.

در ادامه‌ی این فصل برآنیم که به مطالعه‌ی فرم‌های دوخطی بر یک فضای برداری پرداخته و فرم کیلینگ یک جبر لی $\mathcal{L}$ را معرفی کنیم.

تعریف ۴.۱ برای فضای برداری V، تبدیل دوخطی $(\cdot,\cdot):V\times V\longrightarrow\mathbb{F}$ را یک فرم دوخطی بر فضای برداری V گوییم. اگر برای هر $v,v'\in V$، $(v,v')=(v',v)$، دراین‌صورت $(\cdot,\cdot)$ را یک فرم متقارن، و اگر $(v,v')=-(v',v)$، دراین‌صورت $(\cdot,\cdot)$ را یک فرم پادمتقارن می‌نامیم. حال فرض کنیم V_1 و V_2 زیرفضاهایی از V، $V=V_1\bigoplus V_2$، $(\cdot,\cdot)_1$ فرمی دوخطی بر روی V_1 و $(\cdot,\cdot)_2$ فرمی دوخطی بر روی V_2 باشد. اگر برای هر $v_1,v_1'\in V_1$ و $v_2,v_2'\in V_2$،

$$(v_1+v_2,v_1'+v_2')=(v_1,v_1')_1+(v_2,v_2')_2,$$

دراین‌صورت فرم $(\cdot,\cdot)$ را جمع مستقیم فرم‌های $(\cdot,\cdot)_1$ و $(\cdot,\cdot)_2$ نامیده و می‌نویسیم:

$$(\cdot,\cdot)=(\cdot,\cdot)_1\bigoplus(\cdot,\cdot)_2.$$

برای یک فرم دوخطی $(\cdot,\cdot)$،

$$\mathrm{rad}(\cdot,\cdot) := \{v \in V | (v, V) = \{0\}\},$$

را رادیکال فرم $(\cdot,\cdot)$ می‌گوییم. اگر $\mathrm{rad}(\cdot,\cdot) = 0$، دراین‌صورت فرم دوخطی $(\cdot,\cdot)$ را یک فرم ناتباهیده می‌نامیم.

فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی، $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ یک پایه از V و $(\cdot,\cdot)$ یک فرم دوخطی بر فضای برداری V باشد، دراین‌صورت $A_{(\cdot,\cdot)} := [(v_i, v_j)]_{n\times n}$ را ماتریس متناظر با فرم دوخطی $(\cdot,\cdot)$ می‌نامیم. دیده می‌شود که

الف) $(\cdot,\cdot)$ متقارن است اگرو فقط اگر $A_{(\cdot,\cdot)}$ متقارن باشد،

ب) $(\cdot,\cdot)$ پادمتقارن است اگرو فقط اگر $A_{(\cdot,\cdot)}$ پادمتقارن باشد،

ج) $(\cdot,\cdot)$ ناتباهیده است اگرو فقط اگر $A_{(\cdot,\cdot)}$ نامنفرد باشد.

حال فرض کنیم V^* فضای دوگان فضای برداری با بعد متناهی V و $(\cdot,\cdot)$ یک فرم دوخطی و ناتباهیده از V باشد، حال تبدیل خطی

$$\varphi : V \to V^*$$
$$v \mapsto (v, \cdot) : V \to \mathbb{F}, v' \mapsto (v, v')(v' \in V),$$

را در نظر می‌گیریم. با توجه به ناتباهیده بودن فرم $(\cdot,\cdot)$ به راحتی می‌توان دید که φ یک یکریختی است، لذا برای هر $f \in V^*$، یگانه $t_f \in V$ چنان موجود است که $f(\cdot) = (t_f, \cdot)$. از طرفی با توجه به یکریختی بودن تبدیل خطی φ^{-1}، دیده می‌شود که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_1, f_2, \ldots, f_n \in V^*$ و $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ داریم:

$$t_{\sum_{i=1}^{n} c_i f_i} = \sum_{i=1}^{n} c_i t_{f_i}.$$

لازم به ذکر است که فرم دوخطی ناتباهیده‌ی $(\cdot,\cdot)$ فرمی دوخطی را بر V^* القا می‌کند که مجدداً با نماد $(\cdot,\cdot)$ نمایش داده شده و برای هر $\alpha, \beta \in V^*$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\alpha, \beta) := (t_\alpha, t_\beta).$$