بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر

ایده‌آل‌های n- جاذب در حلقه‌های جابجایی

مؤلف :

سید علی موسوی

استاد راهنما :

دکتر رضا نکویی

شهریور ماه ۱۳۹۱

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی - دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو :

استاد راهنما :

داور ۱ :

داور۲ :

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه :

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

بپاس لطف‌های بی‌کرانشان

و

مهندس علیرضا افضلی پور و بانو فاخره صبا

بنیان‌گذاران دانشگاه شهید باهنر کرمان

تشکر و قدردانی

هر نفسی که فرو می‌رود ممد حیات است و چون برآید مفرح ذات ، پس در هر نفسی دو نعمت است و بر هر نعمت شکری است واجب.

از دست و زبان که برآید   کز عهده شکرش بدر آید

«و قلیل من عبادی الشکور»

جناب آقای دکتر نکویی، بهره‌مندی‌ام از محضر علم و اخلاقتان را همیشه با افتخار یاد می‌کنم. بی‌کران گل‌واژه‌ی سپاس را بهر وسعت بی‌وصف یاری‌هایتان، از من پذیرا باشید.

اساتید گرامی، دکتر مومنایی و دکتر هدایت، همکاری صمیمانه شما را در پذیرفتن داوری این پایان‌نامه بی‌نهایت سپاس‌گذارم.

چکیده

در این پایان‌نامه، دو تعمیم از ایده‌آل‌های اول را مطالعه و بررسی می‌کنیم. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی، یکدار و ناصفر بوده و n عدد صحیح مثبتی باشد. ایده‌آل سره‌ی I از R را یک ایده‌آل n- جاذب نامند هرگاه برای هر $x_1,...,x_{n+1} \in R$، اگر $x_1...x_{n+1} \in I$ آن‌گاه حاصل‌ضرب n تا از x_iها به I تعلق داشته باشد. I را یک ایده‌آل قویاً n- جاذب نامند هرگاه برای هر $n+1$ ایده‌آل $I_1,...,I_{n+1}$ از R، اگر $I_1...I_{n+1} \subseteq I$ آن‌گاه حاصل‌ضرب n تا از I_iها مشمول در I باشد.

خصوصیات ایده‌آل‌های n- جاذب و قویاً n- جاذب را بررسی کرده و این‌که آیا این دو مفهوم یکی هستند را به عنوان یک حدس بیان خواهیم کرد. پایداری مفهوم n- جاذب بودن را نسبت به ساختارهای گوناگون در نظریه‌ی حلقه‌ها از قبیل موضعی‌سازی، حلقه‌ی کسرها و... مورد بررسی قرار داده و ایده‌آل‌های n- جاذب را در چندین رده از حلقه‌های جابجایی مطالعه می‌کنیم. نشان می‌دهیم در یک حلقه‌ی نوتری هر ایده‌آل سره، به ازای عدد صحیح مثبتی مانند n، n- جاذب است. هم‌چنین در یک دامنه‌ی پروفر، یک ایده‌آل n- جاذب است برای بعضی $n \in \mathbb{N}$، اگر و تنها اگر حاصل‌ضربی از ایده‌آل‌های اول باشد.

کلمات کلیدی: ایده‌آل ۲- جاذب، ایده‌آل nـ جاذب، دامنه پروفر، ایده‌آل قویاً n- جاذب.

فهرست مطالب

مقدمه

ایده‌آل‌های n- جاذب در حلقه‌های جابجایی و یکدار، تعمیمی از ایده‌آل‌های اول هستند. حالت $n=۲$ (ایده‌آل‌های۲- جاذب) در [۴] معرفی و بررسی شده است.

فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد. ایده‌آل سره‌ی I از حلقه‌ی جابجایی R را یک ایده‌آل n- جاذب نامند هرگاه برای هر $x_۱,...,x_{n+۱}\in R$، اگر $x_۱...x_{n+۱}\in I$، آن‌گاه n تا از x_iها وجود داشته باشند که حاصل‌ضرب آن‌ها به I تعلق داشته باشد. به طور دقیق‌تر، اعداد متمایز $i_۱,...,i_n\in\{۱,...,n+۱\}$ وجود داشته باشند به طوری که $x_{i_۱}...x_{i_n}\in I$. ایده‌آل سره‌ی I از R یک ایده‌آل n- جاذب است اگر و تنها اگر هرگاه $x_۱...x_m\in I$، برای $x_۱,...,x_m\in R$ و $m>n$، آن‌گاه n تا از x_iها باشند که حاصل‌ضرب آن‌ها به I تعلق داشته باشد. به عبارت دیگر، I یک ایده‌آل n- جاذب از R است اگر و تنها اگر هرگاه حاصل‌ضرب $n+۱$ عنصر از $\frac{R}{I}$ صفر باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب n تا از این عناصر برابر صفر باشد. بنابراین یک ایده‌آل ۱- جاذب دقیقاً یک ایده‌آل اول است. به طور کلی، نشان می‌دهیم اشتراک n ایده‌آل اول، حاصل‌ضرب n ایده‌آل بیشین، توان نمادین nام یک ایده‌آل اول، حاصل‌ضرب n ایده‌آل اول اصلی در یک قلمروصحیح و ایده‌آل حاصل از v- حاصل‌ضرب n ایده‌آل اول یک بعدی در یک دامنه‌ی کرول، همگی ایده‌آل‌هایی n- جاذب هستند.

n- جاذب بودن ایده‌آل‌های اصلی در قلمروهای صحیح نسبت به تجزیه غیر یکتا در [۳] بررسی شده است. اخیراً تعمیم‌های دیگری نیز از ایده‌آل‌های اول در [۱] مورد پژوهش و بررسی قرار گرفته‌اند.

در فصل ۱، بعضی از خواص اساسی ایده‌آل‌های n- جاذب را به دست می‌آوریم. برای مثال، نشان می‌دهیم یک ایده‌آل n- جاذب، حداکثر n ایده‌آل اول مینیمال دارد (قضیه ۱۳,۱)؛ حاصل‌ضرب n ایده‌آل بیشین، یک ایده‌آل n- جاذب است (قضیه ۲۰,۱)؛ اگر ایده‌آل n- جاذب I، دقیقاً n ایده‌آل اول مینیمال $P_۱,...,P_n$ را داشته باشد آن‌گاه $P_۱...P_n\subseteq I$ (قضیه ۲۶,۱)؛ با این وجود، حاصل‌ضرب n ایده‌آل اول، لزوماً یک ایده‌آل n- جاذب نیست (مثال ۱۸,۱).

در فصل ۲، مطالعه‌ی خواص اساسی ایده‌آل‌های n- جاذب را ادامه می‌دهیم. به خصوص درباره‌ی ارتباط بین ایده‌آل‌های اولیه و ایده‌آل‌های n- جاذب بحث کرده و بررسی می‌کنیم چه موقع ایده‌آل $(I \underset{R}{:} x)$ یک ایده‌آل n- جاذب از R است.

در فصل ۳، پایداری ایده‌آل‌های n- جاذب را نسبت به ساختارهای گوناگون نظریه حلقه‌ها مانند موضعی‌سازی، حلقه‌های خارج‌قسمت و... مورد بررسی قرار می‌دهیم. به خصوص ایده‌آل‌های n- جاذب را در حلقه‌ی حاصل از ضرب مستقیم تعداد متناهی حلقه (نتیجه ۲۲,۳) و در قلمروهای صحیح به فرم $D + XK[[X]]$، جایی که D یک زیرحلقه از میدان K است (قضیه ۴۲,۳)، معین می‌سازیم.

در فصل ۴، به بررسی ایده‌آل‌های n- جاذب در چندین رده از حلقه‌های جابجایی می‌پردازیم. مثلاً نشان می‌دهیم هر ایده‌آل سره از یک حلقه‌ی نوتری یک ایده‌آل n- جاذب است، برای بعضی $n \in \mathbb{N}$ (قضیه ۱۵,۴). ایده‌آل I از دامنه ارزیاب R یک ایده‌آل n- جاذب است اگر و تنها اگر $I = P^m$، جایی که $P = Rad(I)$ ایده‌آل اولی از R بوده و $1 \leq m \leq n$ (قضیه ۲۱,۴). یک ایده‌آل از یک دامنه پروفر، n- جاذب است، برای بعضی $n \in \mathbb{N}$، اگر و فقط اگر حاصل‌ضربی از ایده‌آل‌های اول باشد (قضیه ۳۲,۴). هم‌چنین بررسی می‌کنیم یک حلقه‌ی R به ازای کدام اعداد صحیح مثبت n، دارای ایده‌آلی n- جاذب است که $(n-1)$- جاذب نیست.

در فصل پایانی، تعمیم دیگری از ایده‌آل‌های اول را بررسی خواهیم کرد. ایده‌آل سره‌ی I از حلقه‌ی R را یک ایده‌آل قویاً n- جاذب نامند، اگر هرگاه $I_1 \ldots I_{n+1} \subseteq I$، برای ایده‌آل‌های $I_1, \ldots, I_{n+1}$ از R، آن‌گاه حاصل‌ضرب n تا از I_jها مشمول در I باشد؛ به طور دقیق‌تر اعداد متمایز $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, n+1\}$ وجود داشته باشند به طوری که $I_{i_1} \ldots I_{i_n} \subseteq I$. بنابراین یک ایده‌آل قویاً ۱- جاذب، دقیقاً یک ایده‌آل اول است. به وضوح، یک ایده‌آل قویاً n- جاذب از R یک ایده‌آل n- جاذب است. این‌که آیا این دو مفهوم معادل هستند یک حدس می‌باشد (در نتیجه ۹,۵ نشان داده‌ایم که این دو مفهوم برای دامنه‌های پروفر معادل هستند). چند نتیجه مرتبط با ایده‌آل‌های قویاً n- جاذب را ارائه می‌کنیم. برای مثال، نشان می‌دهیم اگر I یک ایده‌آل قویاً n- جاذب با

m $(m \le n)$ ایده‌آل اول مینیمال $P_1,...,P_m$ باشد، آن‌گاه اعداد صحیح و مثبت $n_1,...,n_m$ با $n_1+...+n_m = n$ وجود دارند به طوری که $P_1^{n_1}...P_m^{n_m} \subseteq I$ (قضیه ۲,۵)؛ حاصل‌ضرب n ایده‌آل بیشین، یک ایده‌آل قویاً n- جاذب است (نتیجه ۷,۵)؛ هر ایده‌آل سره از یک حلقه‌ی نوتری یک ایده‌آل قویاً n- جاذب است، برای بعضی $n \in \mathbb{N}$ (نتیجه ۸,۵).

همان طور که در بالا اشاره شد، مفهوم ایده‌آل‌های ۲- جاذب در [۴] معرفی شده است. در این پایان‌نامه در بعضی موارد، نتایج موجود درباره‌ی ایده‌آل‌های ۲- جاذب به طور طبیعی به ایده‌آل‌های n- جاذب $(n \ge ۳)$ تعمیم داده شده‌اند. در مواردی هم این نتایج برای ایده‌آل‌های n - جاذب برقرار نیستند (برای نمونه مثال ۲۷,۳(ج) را ببینید) و در موارد کمی، این‌که آیا این نتایج برای ایده‌آل‌های n- جاذب $(n \ge ۳)$ برقرار هستند یا خیر بررسی نشده است (قضیه ۳۷,۳ و فصل ۵ را ببینید).

در سرتاسر این پایان‌نامه، حلقه‌ها جابجایی و یکدار بوده و $0 \ne 1$. هم‌چنین تمام همریختی‌های حلقه‌ای یکانی هستند. فرض کنید R یک حلقه باشد. بعد کرول R را با $\dim(R)$، مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول R را با $Spec(R)$، مجموعه‌ی ایده‌آل‌های بیشین R را با $Max(R)$، حلقه‌ی کلی کسرهای R را با $T(R)$، میدان کسرهای R را وقتی R یک قلمروصحیح است با $qf(R)$، ایده‌آل عناصر پوچ‌توان R را با $Nil(R)$ و مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر R را با $Z(R)$ نمایش می‌دهیم. اگر I یک ایده‌آل سره‌ی R باشد آن‌گاه $Rad(I)$ و $Min_R(I)$ به ترتیب نمایان‌گر رادیکال I و مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول مینیمال I هستند. اغلب ایده‌آل صفر را با 0 نمایش می‌دهیم. مطابق معمول $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ به ترتیب اشاره دارند به اعداد صحیح مثبت، اعداد صحیح، اعداد صحیح به پیمانه n، اعداد گویا و اعداد حقیقی. برای هر $n \in \mathbb{N}$، تعریف می‌کنیم $n+\infty = \infty+\infty = \infty$. نماد «$\subset$» را برای شمول اکید به کار می‌بریم. مفاهیم و اصطلاحاتی که تعریف آن‌ها را نیاورده‌ایم مطابق مراجع [۷، ۹، ۱۱، ۱۳] هستند.

این پایان‌نامه برگرفته از مرجع [۲] می‌باشد.

فصل ۱

ویژگی‌های اساسی ایده‌آل‌های n - جاذب (قسمت اول)

فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد. یادآوری می‌کنیم که ایده‌آل سره‌ی I از حلقه‌ی R، یک ایده‌آل n- جاذب است اگر هرگاه $x_1...x_{n+1} \in I$، برای $x_1,...,x_{n+1} \in R$ ، آن‌گاه n تا از x_iها وجود داشته به طوری که حاصل‌ضرب آن‌ها به I تعلق داشته باشد. در این فصل بعضی از خواص اساسی ایده‌آل‌های n- جاذب را به دست می‌آوریم. کار خود را با نتایج مقدماتی زیر شروع می‌کنیم.

قضیه ۱,۱. فرض کنید R یک حلقه و m و n اعداد صحیح مثبت باشند.

(الف) ایده‌آل سره‌ی I از R یک ایده‌آل n- جاذب است اگر و تنها اگر هرگاه $x_1...x_m \in I$، برای $x_1,...,x_m \in R$ و $m > n$، آن‌گاه n تا از x_iها وجود داشته باشند به طوری که حاصل‌ضرب آن‌ها به I تعلق داشته باشد.

(ب) اگر I یک ایده‌آل n- جاذب از R باشد آن‌گاه برای هر $m \geq n$، I یک ایده‌آل m- جاذب نیز هست.

(ج) اگر I_j یک ایده‌آل n_j- جاذب از R باشد $(1 \leq j \leq m)$، آن‌گاه $I_1 \cap ... \cap I_m$ یک ایده‌آل n- جاذب است، جایی که $n = n_1 + ... + n_m$. به خصوص اگر $P_1,...,P_n$ ایده‌آل‌های اولی از R باشند آن‌گاه $P_1 \cap ... \cap P_n$ یک ایده‌آل n- جاذب از R است.

(د) اگر $p_1,...,p_n$ عناصر اولی (نه لزوماً متمایز) از قلمروصحیح R باشند، آن‌گاه $I = p_1...p_n R$ یک ایده‌آل n- جاذب از R است.

(ه) اگر I یک ایده‌آل n- جاذب از R باشد آن‌گاه $Rad(I)$ نیز یک ایده‌آل n- جاذب از R بوده و $x^n \in I$، برای هر $x \in Rad(I)$.

اثبات: (الف) $\Rightarrow$) کافی است قرار دهیم $m = n + 1$.

$\Leftarrow$) حکم را با استقرا اثبات می‌کنیم. حکم برای $m=n+1$ به وضوح برقرار است (در واقع چیزی جز تعریف ایده‌آل n- جاذب نیست). فرض کنید حکم برای عدد طبیعی k که $k \geq n+1$ برقرار باشد؛ نشان می‌دهیم برای $k+1$ نیز برقرار است. فرض کنید $x_1,\ldots,x_k,x_{k+1} \in R$ به طوری که $x_1\ldots x_k x_{k+1} \in I$. قرار می‌دهیم $x_k x_{k+1} = x'_k$. بنابراین $x_1\ldots x_{k-1}x'_k \in I$. حال به کمک فرض استقرا یکی از دو حالت زیر را خواهیم داشت :

حالت اول: n تا از x_iها $(1 \leq i \leq k-1)$ وجود دارند به طوری که حاصل‌ضرب آن‌ها به I تعلق دارد؛ در این حالت حکم ثابت است.

حالت دوم: $n-1$ تا از x_iها مانند $x_{i_1},\ldots,x_{i_{n-1}}$ $(1 \leq i_j \leq k-1)$ وجود دارند به طوری که $x_{i_1},\ldots,x_{i_{n-1}}x'_k \in I$، بنابراین $x_{i_1}\ldots x_{i_{n-1}}x_k x_{k+1} \in I$. اما I، n- جاذب است، پس حاصل‌ضرب n تا از x_iها به I تعلق خواهد داشت.

(ب) فرض کنید $m \geq n$. چون I یک ایده‌آل n- جاذب بوده و $m+1>n$، پس طبق قسمت (الف)، هرگاه $x_1,\ldots,x_{m+1} \in R$ به طوری که $x_1\ldots x_{m+1} \in I$، آن‌گاه n تا از x_iها وجود دارند که حاصل‌ضرب آن‌ها به I تعلق دارد. حال از مابقی x_iها، $m-n$ تا را به دلخواه برداشته و در این حاصل‌ضرب، ضرب می‌کنیم. چون I ایده‌آل است پس این حاصل‌ضرب (که شامل m تا از x_i هاست) به I تعلق دارد. بنابراین I یک ایده‌آل m- جاذب است.

(ج) قرار می‌دهیم $I=I_1\bigcap\ldots\bigcap I_m$. فرض کنیم $x_1,\ldots,x_{n+1} \in R$ به طوری که $x_1\ldots x_{n+1} \in I$. بنابراین $x_1\ldots x_{n+1} \in I_j$ برای هر $1 \leq j \leq m$. اما $n \geq n_j$ و I_j، n_j- جاذب است، لذا n_j تا از x_i ها وجود دارند به طوری که حاصل‌ضرب آن‌ها به I_j تعلق دارد. حال اگر تمام این x_iها را در هم ضرب کرده و x_iهای تکراری را حذف کنیم آن‌گاه حاصل به I تعلق داشته و تعداد مولفه‌های این حاصل‌ضرب حداکثر n تاست. پس I یک ایده‌آل n- جاذب خواهد بود.گزاره‌ی به خصوص (ج) واضح است، زیرا هر ایده‌آل اول، یک ایده‌آل ۱- جاذب است .

(د) فرض کنید $x_1,\dots,x_{n+1}\in R$ به طوری که $x_1\dots x_{n+1}\in I$. بنابراین $p_1\dots p_n\,|\,x_1\dots x_{n+1}$. پس $p_j\,|\,x_1\dots x_{n+1}$، برای هر $1\le j\le n$ و لذا برای هر $1\le j\le n$، $1\le i_j\le n+1$ وجود دارد به طوری که $p_j\,|\,x_{i_j}$. در نتیجه $p_1\dots p_n\,|\,x_{i_1}\dots x_{i_n}$. لذا $x_{i_1}\dots x_{i_n}\in I$. پس I یک ایده‌آل $n-$ جاذب است.

(ه) فرض کنید I یک ایده‌آل $n-$ جاذب از R بوده و $x\in Rad(I)$. بنابراین عدد طبیعی m وجود دارد به طوری که $x^m\in I$. اگر $m\le n$، آن‌گاه $x^n=x^m x^{n-m}\in I$. اگر $m>n$ آن‌گاه چون I، $n-$ جاذب است پس $x^n\in I$. در نتیجه برای هر $x\in Rad(I)$، $x^n\in I$. حال فرض کنید $x_1,\dots,x_{n+1}\in R$ به طوری که $x_1\dots x_{n+1}\in Rad(I)$. بنابراین $(x_1\dots x_{n+1})^n\in I$ و لذا $x_1^n\dots x_{n+1}^n\in I$. قرار می‌دهیم $y_i=x_i^n$، برای هر $i=1,\dots,n+1$. بنابراین $y_1\dots y_{n+1}\in I$ و چون I، $n-$ جاذب است، بدون کم شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که $y_1\dots y_n\in I$. لذا $(x_1\dots x_n)^n=x_1^n\dots x_n^n\in I$ و در نتیجه $x_1\dots x_n\in Rad(I)$. $\square$

فرض کنید I ایده‌آل سره‌ای از حلقه‌ی R باشد. در قضیه ۱,۱(ب)، دیدیم که اگر I یک ایده‌آل $n-$ جاذب باشد آن‌گاه I یک ایده‌آل $m-$ جاذب نیز هست، برای هر $m\ge n$. لذا تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف ۲,۱. فرض کنید I یک ایده‌آل سره از حلقه R باشد. اگر برای عدد صحیح مثبتی مانند n، I یک ایده‌آل $n-$ جاذب باشد آن‌گاه $\omega_R(I)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\omega_R(I)=\min\left\{n \,\middle|\, \text{یک ایده آل } n \text{- جاذب است } I\right\}.$$

در غیر این صورت تعریف می‌کنیم $\omega_R(I)=\infty$. اگر ابهامی پیرامون R نباشد به جای $\omega_R(I)$ می‌نویسیم $\omega(I)$. مناسب است که تعریف کنیم $\omega_R(R)=0$.

بنابراین برای هر ایده‌آل I از R، $\omega(I)\in\mathbb{N}\cup\{0,\infty\}$ به طوری که

$$\omega(I)=1\Leftrightarrow I\in Spec(R),$$

$$\omega(I)=0\Leftrightarrow I=R.$$

لذا $\omega(I)$ به معنایی، فاصله‌ی ایده‌آل I را تا اول بودن اندازه‌گیری می‌کند. وقتی R یک قلمرو صحیح بوده و $0 \neq x \in R$، آن‌گاه $\omega(xR)=\omega(x)$ که $\omega(x)$ مطابق مراجع [۸,۳] تعریف می‌شود. حال بخش‌هایی از قضیه ۱,۱ را به کمک تابع ω بازنویسی می‌کنیم. برای این منظور به قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول نیاز داریم که در زیر صورت این قضیه را می‌آوریم.

قضیه ۳,۱. فرض کنید $P_1,...,P_n$ که $n \geq 2$ ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R باشند و حداکثر دو تا از آن‌ها اول نباشند. فرض کنید S زیر گروهی از گروه جمعی R باشد که نسبت به ضرب بسته است (مثلاً S ممکن است ایده‌آل یا زیرحلقه‌ای از R باشد). اگر $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ آن‌گاه به ازای j ای که $1 \leq j \leq n$، $S \subseteq P_j$.

اثبات: [۱۵، قضیه ۶۱,۳]. □

قضیه ٤,۱. فرض کنید R یک حلقه و n و m اعداد صحیح مثبتی باشند.

(الف) اگر $I_1,...,I_m$ ایده‌آل‌هایی از R باشند آن‌گاه $\omega(I_1 \cap ... \cap I_m) \leq \omega(I_1)+...+\omega(I_m)$. به خصوص، $\omega(P_1 \cap ... \cap P_n) \leq n$ جایی که P_iها ایده‌آل‌های اولی از R هستند. از طرفی هر دو نامساوی ممکن است اکید باشند.

(ب) اگر $P_1,...,P_n$ ایده‌آل‌های اول مقایسه‌ناپذیری از R باشند آن‌گاه $\omega(P_1 \cap ... \cap P_n)=n$.

(ج) اگر $x_1,...,x_n$ عناصر ناصفر و غیریکه‌ای از قلمروصحیح R باشند آن‌گاه $\omega(x_1...x_nR) \geq n$؛ ممکن است نامساوی اکید باشد.

(د) اگر $p_1,...,p_n$ عناصر اولی از قلمروصحیح R باشند آن‌گاه $\omega(p_1...p_nR)=n$.

(ه) اگر I ایده‌آلی از R باشد آن‌گاه $\omega(Rad(I)) \leq \omega(I)$؛ نامساوی ممکن است اکید باشد.

اثبات: (الف) اگر هر یک از I_jها برابر R باشند آن‌گاه $\omega(I_j)$ها از دو طرف نامساوی حذف می شوند. بنابراین می‌پذیریم I_jها همگی سره هستند. اگر برای یکی از I_jها، $\omega(I_j)=\infty$، آن‌گاه سمت راست نامساوی بینهایت شده و حکم ثابت است. پس فرض می‌کنیم برای هر

$1 \leq j \leq m$، $\omega(I_j) = n_j$. قرار می‌دهیم $n = n_1 + ... + n_m$. در این صورت، طبق قضیه‌ی ۱٫۱(ج)، $I_1 \cap ... \cap I_m$ یک ایده‌آل n- جاذب است. پس طبق تعریف ω،

$$\omega(I_1 \cap ... \cap I_m) \leq n = n_1 + ... + n_m = \omega(I_1) + ... + \omega(I_m).$$

هرگاه $P_1, ..., P_n$ ایده‌آل‌های اولی از R باشند آن‌گاه برای هر $1 \leq j \leq m$، $\omega(P_j) = 1$. پس

$$\omega(P_1 \cap ... \cap P_n) \leq \omega(P_1) + ... + \omega(P_n) = 1 + ... + 1 = n.$$

هر دو نامساوی ممکن است اکید باشند. برای مثال فرض کنید $R = \mathbb{Z}$، $I_1 = 6\mathbb{Z}$، $I_2 = 2\mathbb{Z} = P_1$ و $P_2 = 0$. در نتیجه، $I_1 \cap I_2 = 6\mathbb{Z}$ و $P_1 \cap P_2 = 0$. طبق قسمت (د) از همین قضیه، $\omega(I_1) = 2$ و $\omega(I_1 \cap I_2) = 2$. از طرفی چون I_2, P_1, P_2 و $P_1 \cap P_2$ ایده‌آل‌های اولی از R هستند پس $\omega(P_1 \cap P_2) = \omega(P_2) = \omega(P_1) = \omega(I_2) = 1$، بنابراین

$$\omega(I_1 \cap I_2) = 2 < 3 = 2 + 1 = \omega(I_1) + \omega(I_2),$$
$$\omega(P_1 \cap P_2) = 1 < 2 = 1 + 1 = \omega(P_1) + \omega(P_2).$$

(ب) قرار می‌دهیم $I = P_1 \cap ... \cap P_n$. طبق قسمت (الف)، $\omega(I) \leq n$. نشان می‌دهیم $\omega(I) = n$. فرض کنید $n \geq 2$ و $\omega(I) < n$. پس I یک ایده‌آل $(n-1)$- جاذب است. چون P_iها مقایسه‌ناپذیرند پس طبق قضیه اجتناب از ایده‌آل‌های اول، برای هر $1 \leq i \leq n$، $P_i \nsubseteq \bigcup_{j \neq i} P_j$. لذا برای هر $1 \leq i \leq n$، $x_i \in R$ وجود دارد به طوری که $x_i \in P_i \setminus \bigcup_{j \neq i} P_j$. در این صورت، $x_1 ... x_n \in I$. چون I، $(n-1)$- جاذب است، بنابراین بدون کم شدن از کلیت می‌پذیریم که $x_1 ... x_{n-1} \in I$. پس $x_1 ... x_{n-1} \in P_n$ و از آن‌جایی که P_n ایده‌آلی اول است پس $1 \leq i \leq n-1$ وجود دارد به طوری که $x_i \in P_n$ که تناقض است. بنابراین $\omega(I) = n$.

(ج) فرض کنید $x_1, ..., x_n$ عناصر ناصفر و غیر یکه‌ای از قلمروصحیح R باشند. قرار می‌دهیم $I = x_1 ... x_n R$. اگر $\omega(I) = \infty$ آن‌گاه حکم ثابت است. پس فرض می‌کنیم $\omega(I) = m$. نشان می‌دهیم $m \geq n$. فرض می‌کنیم $m < n$. چون I، m- جاذب است پس $(n-1)$- جاذب نیز خواهد بود. لذا از این که $x_1 ... x_n \in I$، بدون کم شدن از کلیت خواهیم داشت $x_1 ... x_{n-1} \in I$.

بنابراین $r \in R$ وجود دارد به طوری که $x_1 \dots x_{n-1} = x_1 \dots x_{n-1} x_n r$. چون R قلمرو صحیح است پس $x_n r = 1$؛ یعنی x_n در R یکه است که متناقض با غیر یکه بودن x_iهاست. بنابراین $\omega(I) = m \geq n$. برای $R = \mathbb{Z}$، $x_1 = 4$ و $x_2 = 2$ نامساوی فوق اکید خواهد بود.

(د) فرض کنید $p_1, \dots, p_n$ عناصر اولی از قلمرو صحیح R باشند. طبق قضیه ۱٫۱(د) ، ایده‌آل $p_1 \dots p_n R$ ، $n-$ جاذب بوده و لذا $\omega(p_1 \dots p_n R) \leq n$. از طرفی p_i ها ناصفر و غیر یکه هستند (عناصر اول طبق تعریف عناصری ناصفر و غیر یکه هستند)، پس طبق (ج) ، $\omega(p_1 \dots p_n R) \geq n$. بنابراین $\omega(p_1 \dots p_n R) = n$.

(ه) اگر $\omega(I) = 0$ آن‌گاه به وضوح نامساوی برقرار است. حال فرض کنید $\omega(I) = n$. بنابراین I یک ایده‌آل $n-$ جاذب خواهد بود. پس طبق قضیه ۱٫۱(ه)، $Rad(I)$ نیز یک ایده‌آل $n-$ جاذب بوده و لذا $\omega(Rad(I)) \leq n = \omega(I)$. برای $R = \mathbb{Z}$ و $I = 4\mathbb{Z}$ نامساوی اکید خواهد بود. □

در ادامه، حلقه‌ای را مثال می‌زنیم (مثال ۱۱٫۱) که دارای ایده‌آل‌های سره‌ای است که به ازای هیچ nای، $n-$ جاذب نیستند. برای دیدن حلقه‌های دیگر از این دست، مثال‌های **۲۹٫۳، ۴۳٫۳، ۲۴٫۴** را ببینید.

حلقه‌ای را که در مثال خواهیم آورد نمونه‌ای از یک حلقه‌ی منظم فون نویمان است. لذا ابتدا به تعریف و توصیف این حلقه‌ها و نیز مفهوم هم‌بیشین بودن (که در ادامه به آن نیاز داریم) می‌پردازیم.

تعریف ۵٫۱. حلقه‌ی R را یک حلقه منظم فون نویمان نامند اگر برای هر $a \in R$ عنصر $b \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $a^2 b = a$.

تعریف ۶٫۱. حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی کاهش یافته نامند اگر $Nil(R) = 0$.

به وضوح، حلقه‌های منظم فون نویمان، کاهش یافته هستند. عکس این مطلب در حلقه‌هایی برقرار است که بعد کرول آن‌ها صفر باشد. بعد کرول حلقه‌ی R با نماد $\dim(R)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\dim(R) := \sup\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \exists P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n ; P_i \in Spec(R)\} ;$$

به شرط آن که مجموعه‌ی فوق کراندار باشد. در غیر این صورت قرار می‌دهیم $\dim(R) = \infty$.

حکم ۷٫۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش‌یافته باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) R یک حلقه‌ی منظم فون نویمان است.

(۲) بعد کرول R برابر صفر است (معادلاً $Max(R) = Spec(R)$).

(۳) هر ایده‌آل با تولید متناهی از R اصلی بوده و توسط یک عنصر خودتوان تولید می‌شود.

اثبات: [۱۱، نکته‌ی بعد از نتیجه‌ی ۶٫۲]. □

به واسطه‌ی حکم فوق می‌توان حلقه‌های منظم فون نویمان را حلقه‌های کاهش یافته با بعد کرول صفر تعریف کرد.

تعریف ۸٫۱. فرض کنید $I, J, I_1, \ldots, I_n$ $(n \geq 2)$ ایده‌آل‌هایی از یک حلقه‌ی R باشند. I و J را هم‌بیشین نامند اگر $I + J = R$. هم‌چنین $I_1, \ldots, I_n$ را دو به دو هم‌بیشین نامند اگر $I_i + I_j = R$ برای هر $i \neq j$ که $1 \leq i, j \leq n$.

حکم ۹٫۱. فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از یک حلقه‌ی R باشند. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) I و J هم‌بیشین هستند.

(۲) برای هر دو عدد صحیح مثبت n, m، ایده‌آل‌های I^n و J^m هم‌بیشین هستند.

(۳) $Rad(I)$ و $Rad(J)$ هم‌بیشین هستند.

اثبات: [۱۵، تمرین ۲۵٫۲]. □

حکم ۱۰,۱. فرض کنید $I_1,...,I_n$ $(n\geq 2)$ ایده‌آل‌های دو به دو هم‌بیشینی از حلقه‌ی R باشند. در این صورت

(۱) $I_1\bigcap ...\bigcap I_{n-1}$ و I_n هم‌بیشین هستند و

(۲) $I_1\bigcap ...\bigcap I_n = I_1...I_n$.

به‌خصوص، اگر $M_1,...,M_k$ ایده‌آل‌های بیشین متمایزی از R و $n_1,...,n_k$ اعداد صحیح مثبتی باشند، آن‌گاه $M_1^{n_1}...M_k^{n_k} = M_1^{n_1}\bigcap ...\bigcap M_k^{n_k}$.

اثبات: [۱۵، قضیه ۵۹,۳]. □

مثال ۱۱,۱. فرض کنید $R=\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_2$. چون هر عضو R خودتوان است لذا R یک حلقه‌ی منظم فون نویمان است. برای هر عدد صحیح مثبت n، قرار می‌دهیم

$$I_n=\{(x_i)\in R \mid x_i=0\ ;\ 1\leq i\leq n\}.$$

هم‌چنین قرار می‌دهیم $I=\{(x_i)\in R \mid x_{2i-1}=0,\forall i\in\mathbb{N}\}$. به سادگی دیده می‌شود که I_n و I ایده‌آل‌های سره‌ای از R هستند. نشان می‌دهیم $\omega(I_n)=n$ برای هر n؛ هم‌چنین $\omega(I)=\omega(0)=\infty$. توجه می‌کنیم که می‌توان I_n را به صورت حاصل‌ضرب n ایده‌آل اول دو به دو هم‌بیشین نوشت. در واقع اگر $P_j=\{(x_i)\in R \mid x_j=0\}$، $1\leq j\leq n$، آن‌گاه برای هر $1\leq j\leq n$، $P_j\in Spec(R)$ و $P_i+P_j=R$ برای هر $i\neq j$. به سادگی دیده می‌شود $I_n=P_1...P_n$. اما P_jها دو به دو بیشین هستند، لذا $I_n=P_1\bigcap ...\bigcap P_n$. پس طبق قضیه‌ی ۴,۱(ب)، $\omega(I_n)=n$.

حال نشان می‌دهیم $\omega(I)=\infty$. برای این منظور نشان می‌دهیم I، n- جاذب نیست، برای هر $n\geq 1$. ما این ادعا را برای $n=1,2,3$ ثابت می‌کنیم. برای $n\geq 4$ به طور مشابه اثبات می‌شود. I، ۱- جاذب نیست؛ زیرا قرار دهید $\alpha_1=(1,0,0,...)$ و $\alpha_2=(0,0,1,0,0,...)$. در این صورت $\alpha_1\alpha_2=0\in I$ اما $\alpha_1\notin I$ و $\alpha_2\notin I$.

I، ۲- جاذب نیست. کافی است $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳ \in R$ را به صورت زیر در نظر بگیریم. $\alpha_۱ \in R$ عنصری باشد که مولفه‌های اول و سوم آن ۱ بوده و مابقی مولفه‌ها 0 باشند. $\alpha_۲ \in R$ عنصری باشد که مولفه‌های سوم و پنجم آن ۱ بوده و مابقی مولفه‌ها 0 باشند. $\alpha_۳ \in R$ عنصری باشد که مولفه‌های پنجم و اول آن ۱ بوده و مابقی مولفه‌ها 0 باشند. در این صورت $\alpha_۱\alpha_۲\alpha_۳ = 0 \in I$، اما $\alpha_۱\alpha_۲ \notin I$ ، $\alpha_۱\alpha_۳ \notin I$ و $\alpha_۲\alpha_۳ \notin I$.

I، ۳- جاذب نیست. کافی است $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳, \alpha_۴ \in R$ را به صورت زیر در نظر بگیریم. $\alpha_۱ \in R$ عنصری باشد که مولفه‌های اول، سوم، پنجم آن ۱ بوده ومابقی مولفه‌هایش 0 باشند؛ $\alpha_۲ \in R$ عنصری باشد که مولفه‌های سوم، پنجم، هفتم آن ۱ بوده و مابقی مولفه‌هایش 0 باشند؛ $\alpha_۳ \in R$ عنصری باشد که مولفه‌های پنجم، هفتم، اول آن ۱ بوده و مابقی مولفه‌هایش 0 باشند؛ $\alpha_۴ \in R$ عنصری باشد که مولفه‌های هفتم، اول، سوم آن ۱ بوده و مابقی مولفه‌هایش 0 باشند. در این صورت $\alpha_۱\alpha_۲\alpha_۳\alpha_۴ = 0 \in I$، اما حاصل‌ضرب هیچ ۳ تا از α_iها به I تعلق ندارد. به روش مشابه می‌توان نشان داد که I، n- جاذب نیست، برای $n = ۴, ۵, ...$. لذا $\omega(I) = \infty$. از طرفی فرآیند فوق این را هم نشان می‌دهد که $\omega(0) = \infty$. لذا حلقه‌ی R دارای ایده‌آل‌های سره‌ای است که به ازای هیچ nای، n- جاذب نیستند.

فرض کنید I یک ایده‌آل سره از یک حلقه R باشد. ایده‌آل اول P از R را یک ایده‌آل اول مینیمال از I نامند اگر P یک عضو مینیمال در مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول R باشد که I را شامل می‌شوند. اولین نتیجه‌ی مهم این فصل (قضیه ۱۳,۱) این است که هر ایده‌آل n- جاذب، حداکثر n ایده‌آل اول مینیمال دارد. برای اثبات این مطلب، به لم زیر نیاز داریم.

لم ۱۲,۱. فرض کنید $I \subseteq P$ ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R بوده که P ایده‌آلی اول است. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) P یک ایده‌آل اول مینیمال I است.

(۲) برای هر $x \in P$، $y \in R \setminus P$ و عدد طبیعی n وجود دارند به طوری که $yx^n \in I$.