پرودگارا...

پرواز را به ما بیاموز تا مرغ دست آموز نشویم و از نور خویش آتش در ما بیفروز تا در سرمای بی خبری نمانیم. خون شهیدان را در تن ما جاری گردان تا به ماندن خو نکنیم و دست شهیدان را بر پیکرمان آویز تا مشت خونینشان را برافراشته داریم.

خدایا! چشمی عطا کن تا برای تو بگرید، دستی عطا کن تا دامانی جز تو نگیرد، پایی عطا کن که جز راه تو نرود و جانی عطا کن که برای تو برود.

الهی چون در تو نگرم از جمله ی تاج دارانم و چون در خود نگرم از جمله ی خاکسارانم. الهی در سر خمار تو دارم و در دل اسرار تو دارم و بر زبان اشعار تو. الهی اگر گویم ستایش و ثنای تو گویم و اگر جویم رضای تو جویم. الهی اگر طاعت بسی ندارم اندر دو جهان جز تو کسی ندارم.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم قدردانی و تشکر ویژه داشته باشم از آقای دکتر بهمن حیاتی، به خاطر همه‌ی زحماتی که برای من در تمام دوره کشیدند. بدون شک راهنمایی‌ها و محبت‌های ایشان را در به نتیجه رسیدن این پایان‌نامه نمی‌توان نادیده گرفت. گرچه این نوشته‌ها جبران زحمات و محبت‌های بی‌دریغ ایشان نخواهد بود.

در پایان از خانواده‌ام، بالاخص پدر، مادر و همسر عزیزم که همواره با صبر و حوصله همراه من بوده‌اند تشکر می‌کنم، که اگر دلسوزی‌ها و محبت‌هایشان نبود این کار به پایان نمی‌رسید. باشد که بتوانم روزی ذره‌ای از زحماتشان را جبران کنم.

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه ملایر

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان پایان نامه:

میانگین پذیری مرکز جبرهای گروهی

استاد راهنما:

دکتر بهمن حیاتی

نام دانشجو:

الهه امین

۱۳۹۱

میانگین پذیری مرکز جبرهای گروهی

نام دانشجو:
الهه امین

پایان نامه ارایه شده به تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی از فعالیت های لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض (گرایش آنالیز ریاضی)

دانشگاه ملایر

ارزیابی و تایید توسط کمیته پایان نامه با درجه ....

دکتر بهمن حیاتی استادیار ریاضیات محض (استاد راهنما).............................

دکتر حسین سلیمانی استادیار ریاضیات محض (داور خارجی)............................

دکتر مهشید دشتی استادیار ریاضیات محض (داور داخلی)..................

دکتر عیسی سلگی (نماینده تحصیلات تکمیلی)....................................

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: امین نام: الهه

عنوان پایان نامه: میانگین پذیری مرکز جبرهای گروهی

استاد راهنما: دکتر بهمن حیاتی

استاد مشاور: دکتر حسین سلیمانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی
دانشگاه ملایر– گروه ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی:۱۳۹۱
تعداد صفحات: ۸۰ صفحه

کلید واژه: گروه فشرده، جبر گروهی، میانگین پذیری

چکیده

هدف این مقاله بررسی شرایطی از گروه G است، که تحت آن شرایط $ZL^1(G)$ میانگین پذیر می شود. در فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیم لازم می پردازیم.
در فصل دوم مباحثی را در زمینه‌ی جبرهای ابرتاوبری، نمایش گروه، جبرگروه $L^1(G)$ و $ZL^1(G)$ ارایه می دهیم و قضایایی در رابطه با میانگین پذیری $L^1(G)$ بیان می کنیم، همچنین به بررسی خواصی از گروه G می پردازیم که با آن شرایط $ZL^1(G)$ میانگین پذیر می شود.

فهرست مطالب

مقدمه

با شروع نظریه اندازه در آنالیز ریاضی این سوال مطرح شد:
آیا تابع مجموعه‌ای و به طور متناهی جمعی که تحت عمل گروه خاصی پایا باشد، وجود دارد؟

مفهوم میانگین‌پذیری پس از طرح این سوال به وجود آمد.

در سال ۱۹۲۹ میلادی برای اولین بار فون– نویمن[۱] میانگین‌پذیری را برای گروه‌های به طور موضعی فشرده و گسسته تعریف کرد. پس از آن در سال ۱۹۴۰ میلادی این مفهوم به عنوان یکی از مفاهیم مهم در آنالیز هارمونیک تبدیل شد و در سال ۱۹۴۹ میلادی دی[۲] ، میانگین‌پذیری را برای گروه‌های توپولوژیکی به این صورت تعریف کرد: گروه هاسدورف و به طور موضعی فشرده‌ی G را میانگین‌پذیر می‌نامیم، هرگاه میانگین پایای چپی روی جبر $L^{\infty}(G)$ وجود داشته باشد.

جانسون[۳] در سال ۱۹۷۲ میلادی نشان داد که گروه هاسدورف و به طور موضعی فشرده‌ی G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر برای جبر باناخ $L^{1}(G)$ و هر $L^{1}(G)$ ـ مدول باناخ مانند E، اولین گروه کوهمولوژی $L^{1}(G)$ با ضرایب در E' بدیهی گردد؛ به عبارت دیگر $\mathcal{H}^{1}(L^{1}(G), E') = \{0\}$.

پس از آن میانگین‌پذیری جبرهای باناخ را به این صورت تعریف کرد:

جبر باناخ $\mathcal{U}$ میانگین‌پذیر است هرگاه برای هر $\mathcal{U}$ـ مدول باناخ مانند E؛ $\mathcal{H}^{1}(\mathcal{U}, E') = \{0\}$.

همچنین بسیاری از ویژگی‌های جبرهای باناخ میانگین‌پذیر توسط جانسون به اثبات رسیده که این ویژگی‌ها، اهمیت مفهوم میانگین‌پذیری را به خوبی آشکار می‌کنند، [6].

بعد از جانسون؛ در سال ۱۹۸۷ میلادی باده، کرتیس و دیلز[۴] توانستند میانگین‌پذیری ضعیف را برای

[۱] Von-Neumann
[۲] Day
[۳] johnson
[۴] Bade, Curtis, Dales

جبرهای باناخ تعریف کنند. جبر باناخ $\mathcal{U}$ را میانگین‌پذیر ضعیف گوییم هرگاه $\mathcal{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{U}')=\{0\}$. به وضوح میانگین‌پذیری، میانگین‌پذیری ضعیف را نتیجه می‌دهد اما عکس این مطلب صادق نیست، جبرهای باناخ زیادی وجود دارند که میانگین‌پذیر ضعیف هستند اما میانگین‌پذیر نیستند. به طور مثال برای همه‌ی گروه‌های هاسدورف و به طور موضعی فشرده‌ی G؛ $L^1(G)$ میانگین‌پذیر ضعیف است و میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر G میانگین‌پذیر باشد ؛ C^*- جبرها میانگین‌پذیر ضعیف هستند.
بحث های مقدماتی از جبرهای باناخ اولین بار در سال ۱۹۶۰ توسط ریکات[5] مطرح شد.
گلفاند[6] ، نایمارک[7] و زلاسکو[8] از جمله اولین کسانی بودند که به بحث درباره‌ی جبرهای باناخ پرداختند.
جانسون[9] در سال ۱۹۷۲ قضیه‌ی زیر را در رابطه با میانگین پذیری ارائه داد:
جبر باناخ $L^1(G)$ میانگین پذیر است اگر و تنها اگر گروه G میانگین پذیر باشد. جانسون جبر باناخ A را میانگین پذیر نامید هرگاه برای هر A ـ مدول باناخ مانند E؛ $H^1(A,E^*)=\{o\}$. ویژگیهای زیادی توسط جانسون در مورد جبرهای باناخ میانگین پذیر ثابت شد که این ویژگیها، اهمیت مفهوم میانگین پذیری را به خوبی آشکار می کنند.
در سال ۱۹۷۳ رودین با کتاب « آنالیز تابعی » ، بنسال و دانکن با کتاب « جبرهای نرمدار کامل »، پالمر[10] درسالهای ۱۹۹۴ و ۲۰۰۱، رونده[11] در سال ۲۰۰۱ در زمینه میانگین پذیری دوگان جبرهای باناخ و پیر[12] در سال ۱۹۸۴ در زمینه میانگین پذیری گروههای موضعاً فشرده، مطالب مهمی را ارائه داده اند.

در مورد ویژگی های جبرهای گروهی، مانند جبر اندازه ی $M(G)$ ، جبر فوریه [13] $A(G)$ ، جبر فوریه اشتلیس [14] (تعریف دقیق در [۴۰])، جبر گروهی گسسته ی $l^1(G)$ ، $l^1(G,\omega)$ ، $L^1(G)$ ، جبر

[5] Rickat
[6] Gelfand
[7] Naimark
[8] Zelazko
[9] B.E.Johnson
[10] palmer
[11] Runde
[12] Pier
[13] Fourier
[14] Fourier-Stieltjes

بورلینگ [15] $L^1(G,\omega)$ ، جبر آمالگام [16] $(L^p, L^q)(G)$ و... مطالعات زیادی صورت گرفته است.
همچنین گراهام [17] در سال ۱۹۷۹، لارسن [18] و رودین [19] در سال ۱۹۶۲ مباحثی در زمینه ی جبرهای گروهی، که در آن G یک گروه موضعاً فشرده آبلی است ارائه داده اند.
در سال ۲۰۰۱ ویلیس [20] در کتاب« تجزیه ایده‌آلهای متناهی بعد جبرهای گروهی» مباحثی را در زمینه ایده‌آلهای جبرهای گروهی ارائه داد.
ایمارد[21] در سال ۱۹۶۴ در مقاله ی جبر فوریه از گروههای موضعاً فشرده، جبرهای فوریه و فوریه اشتلیس را تعریف کرده است.
اگر G گروه موضعاً فشرده دلخواه باشد آنگاه مرکز $L^1(G)$ یعنی مجموعه عناصری از $L^1(G)$ که با سایر اعضایش جابه جا می شود و آن را با $ZL^1(G)$ نمایش می دهند، یک جبر باناخ جابه جایی است و این مطلب در « آنالیز هارمونیک و مرکز جبرهای گروهی» از لیوکنن[22] و موساک [23] اثبات شده است.
این پایان نامه، شامل بخشهایی از میانگین پذیری مرکز جبرهای گروهی است که توسط دکتر ابراهیم سامعی، دکتر احمدرضا عظیمی فرد و نیکو اسپرونک [24] در سال ۲۰۰۹ ارایه شده است، می باشد.

[15] Beurling
[16] Amalgame
[17] Graham
[18] Laursen
[19] Rudin
[20] Willis
[21] Eymard
[22] Liukkonen
[23] Mosak
[24] Nico Spronk

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی مورد نیاز در این پایان نامه را بیان می کنیم. گروههای توپولوژیک، فضای موضعاً فشرده، جبر، جبرهای باناخ، جبر گروه، مرکز گروه، نمایش گروه، منیفلد، گروههای لی، اندازه مطلقاً پیوسته، میانگین پذیری، میانگین پذیری ضعیف، ضرب تانسوری و خاصیت ابرتاوبری را تعریف می کنیم. همچنین مثالها و قضایایی را از آنها ارائه می دهیم.

۲.۱ تعاریف و مقدمات اولیه

تعریف ۱.۱ : یک گروه توپولوژیک، یک گروه به همراه یک توپولوژی روی آن است به گونه ای که دو نگاشت:

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G, \qquad G \longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto xy, \qquad x \longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

پیوسته باشند.

مثال ۲.۱ : $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{C}$ با جمع، گروههای توپولوژیک هستند [1].

تعریف ۳.۱ : یک فضای توپولوژیک را موضعاً فشرده گوییم، اگر هر نقطه اش یک همسایگی فشرده داشته باشد. یک گروه توپولوژیک را موضعاً فشرده گوییم، اگر هاسدورف و موضعاً فشرده باشد.[30].

تعریف ۴.۱ : یک زیرمجموعه‌ی A از گروه توپولوژیک X را فشرده‌ی نسبی گوییم، اگر بستارش $\bar{A}$ در X فشرده باشد [30].

گزاره ۵.۱ : اگر G یک گروه موضعاً فشرده باشد، برای هر زیرگروه بسته‌ی H ، فضای خارج قسمتی G/H یک گروه موضعاً فشرده‌ی هاسدورف است [30].

تعریف ۶.۱ : فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای توپولوژیک باشد و $C(\mathcal{X})$ فضای برداری همه‌ی توابع پیوسته مختلط مقدار از $\mathcal{X}$ بتوی $\mathbb{C}$ باشد. برای یک مجموعه ی فشرده ی $K \subset \mathcal{X}$ و یک مجموعه ی باز $U \subset \mathbb{C}$ ، مجموعه‌ی

$$L(K,U) = \{f \in C(\mathcal{X}) : \ f(K) \subset U\}$$

را تعریف می کنیم. توپولوژی تولید شده توسط مجموعه های $L(K,U)$ ها، توپولوژی باز فشرده نامیده می شود [30].

تعریف ۷.۱ : فرض کنید μ یک اندازه مثبت روی یک σ –جبر $\mathcal{M}$ و λ یک اندازه دلخواه روی $\mathcal{M}$ باشد، λ ممکن است مختلط یا مثبت باشد. گوییم λ مطلقاً پیوسته است و می نویسیم $\lambda \ll \mu$ ، اگر $E \in \mathcal{M}$ و $\mu(E) = 0$ ، آنگاه $\lambda(E) = 0$.

تعریف ۸.۱ : فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک هاسدورف و $\mathcal{B}$ ، $\sigma -$ جبر مجموعه های بورل آن باشد.

یک اندازه ی $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ را یک اندازه ی بورل منتظم گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند.

۱) برای هر مجموعه‌ی فشرده‌ی K ، $\mu(K) < \infty$.

۲) اگر B یک مجموعه‌ی بورل از X باشد

$$\mu(B) = \inf \{\mu(O) : \quad B \subseteq O \text{ و } O \text{ باز}\}$$

۳) اگر O یک زیر مجموعه‌ی باز از X باشد

$$\mu(O) = \sup \{\mu(K) : \quad K \subseteq O \text{ و } K \text{ فشرده}\}$$

قضیه ۹.۱ : اگر G یک گروه توپولوژیکی موضعاً فشرده باشد، آنگاه یک اندازه بورل منتظم مثبت یکتای m روی G وجود دارد به طوریکه:

آ) $m(G) = ۱$.

ب) اگر U یک مجموعه باز غیرتهی از G باشد، آنگاه $m(U) > ۰$.

ج) اگر Δ هر مجموعه بورل از G و $x \in G$ ، سپس $m(\Delta) = m(x\Delta) = m(\Delta^{-۱})$ ، که در آن $x\Delta \equiv \{xa : a \in \Delta\}$, $\Delta^{-۱} \equiv \{a^{-۱} : a \in \Delta\}$.

اندازه m را اندازه هار برای G می گویند [1,(11.4)].

تعریف ۱۰.۱ : فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد و فرض کنید $۰ < p < \infty$ ، در این صورت گردایه تمام توابع اندازه پذیر f که $| f |^p$ انتگرال پذیر است را با $L_p(\mu)$ نمایش داده می شود؛ نرم این فضا به صورت زیر تعریف می شود:

$$||f||_p = (\int |f|^p d\mu)^{\frac{۱}{p}}.$$

۳.۱ گروه لی

تعریف ۱۱.۱ : فرض کنید M یک فضای توپولوژیک هاسدورف، غیر تهی و E یک فضای برداری با بعد متناهی باشد. اگر $\phi : U \to V$ یک همسانریختی بین مجموعه‌های باز $U \subseteq E$ و $V \subseteq M$ باشد، در این صورت می گوییم که ϕ یک چارت بر M است. همچنین اگر $p \in V$ ، می‌گوییم ϕ یک چارت در نقطه‌ی p است.

در ادامه از نمادهای $\phi, \phi_\alpha, \phi_\beta$ ، به ترتیب برای چارتهایی با دامنه‌ی U, U_α, U_β و برد V, V_α, V_β استفاده می کنیم.

تعریف ۱۲.۱ : فرض کنید که به ازای هر α از یک مجموعه‌ی اندیس گذار مفروض A ، (ϕ_α, U_α) چارتی بر M است. گردایه‌ی $\{(\phi_\alpha, U_\alpha) \ | \ \alpha \in A\}$ را در صورتی اطلس بر M گوییم که:

۱) هر یک از U_α ها در یک فضای برداری با بعد متناهی مفروض E قرار داشته باشد.

۲) اجتماع V_α برابر M باشد.

در این حالت M را یک منیفلد (یا یک منیفلد مدل شده بر E) می‌گوییم. (هنگامی که بخواهیم به طور دقیق صحبت کنیم، زوج مرتب $(M, \{(\phi_\alpha, U_\alpha) \ | \ \alpha \in A\})$ را منیفلد می گوییم.)

مثال ۱۳.۱ : (فضای برداری). اگر M یک فضای برداری با بعد متناهی به همراه توپولوژی استانداردش باشد و $Id : M \to M$ نگاشت همانی باشد، در این صورت $(M, \{Id\})$ منیفلد است.

تعریف ۱۴.۱ : فرض کنید M یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد.

۱) مسیر در M نگاشتی پیوسته به فرم $f : [\circ, ۱] \to M$ می باشد. $f(\circ)$ و $f(۱)$ را نقاط انتهایی f می نامند، اگر $f(\circ) = f(۱)$ ، می‌گوییم f یک مسیر بسته در نقطه‌ی

پایه ای $f(\circ)$ است.

۲) فضای M را در صورتی همبند راهی گوییم که هر جفت از نقاط در M، نقاط انتهایی مسیری در M باشند.

۳) فضای M را در صورتی همبند ساده گوییم که همبند راهی بوده و نقطه‌ی $p_\circ$ ی در M چنان وجود داشته باشد، که به ازای هر مسیر بسته ی f در M با نقطه‌ی پایه ای $p_\circ$، نگاشت پیوسته‌ی $h : [\circ, ۱] \times [\circ, ۱] \to M$ وجود داشته باشد که

الف) $h(s, \circ) = f(s)$ و به ازای هر $s \in [\circ, ۱]$ ای $h(s, ۱) = p_\circ$

ب) به ازای هر $t \in [\circ, ۱]$ ای $h(\circ, t) = p_\circ = h(۱, t)$.

تعریف ۱۵.۱ : (مشتقات مرتبه بالا ـ نگاشت هموار). فرض کنید E یک فضای برداری با بعد متناهی باشد و f تابعی از یک زیر مجموعه‌ی باز U از E به توی فضای دیگر F باشد. نگاشت f را در یک نقطه (بر یک مجموعه ی باز) هموار گوییم، اگر تمام مشتقات f در یک همسایگی از آن نقطه (مجموعه ی باز) وجود داشته باشد.

تعریف ۱۶.۱ : در صورتی اطلس $\{(\phi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ بر فضای توپولوژیک هاسدورف M را هموار گوییم که به ازای هر $\alpha, \beta \in A$ ای، تابع $\phi_\beta^{-۱} o\, \phi_\alpha$ بر $\phi_\alpha^{-۱}(V_\alpha \cap V_\beta)$ هموار باشد. یک چنین اطلسی را ماکسیمال گوییم، اگر $U \subseteq E$ و $V \subseteq M$ زیر مجموعه هایی باز و $\phi : U \to V$ همسانریختی باشد که به ازای هر $\alpha \in A$، هر یک از توابع

$$\phi_\alpha^{-۱} o\, \phi : \phi^{-۱}(V \cap V_\alpha) \to \phi_\alpha^{-۱}(V \cap V_\alpha)$$

$$\phi^{-۱} o\, \phi_\alpha : \phi_\alpha^{-۱}(V \cap V_\alpha) \to \phi^{-۱}(V \cap V_\alpha)$$

هموار باشند، آنگاه $\phi \in \{\phi_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

تعریف ۱۷.۱ : منیفلد $(M, \{(\phi_\alpha, U_\alpha) \ \mid \alpha \in A\})$ را در صورتی هموار گوییم که اطلس آن هموار و در عین حال ماکسیمال باشد.

تعریف ۱۸.۱ : (نگاشت هموار). در صورتی که M و N دو منیفلد هموار، به ترتیب، با اطلسهای هموار $\{(\phi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ و $\{(\psi_\beta, V_\beta) \mid \beta \in B\}$ باشند، در صورتی می‌گوییم نگاشت $f : U \subseteq M :\to N$ (U باز) هموار است که به ازای هر $\alpha \in A$ و هر $\beta \in B$ نگاشت $\psi_\beta{}^{-1} \ o \ \phi_\alpha$ بر $\phi_\alpha{}^{-1}(V_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta))$ هموار باشد.

فرض کنید U زیر مجموعه ای باز از فضای برداری متناهی بعد E است. اگر $\xi : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ ، ($\epsilon > 0$) و $\xi(0) = p$ باشد، در این صورت می توان قبول کرد که ξ در p دارای مماس است. به بیان ریاضی، مماس بر ξ در p را به عنوان برداری در E با نماد $\xi'(0)$ نشان می دهیم. پس می توان E را فضای مماس به U در p دانست. حال فرض کنیم که M یک منیفلد تحلیلی مدل شده بر E است. فرض کنید $C(M)$ نمایشگر مجموعه‌ی همه‌ی نگاشتهای تحلیلی ξ از یک همسایگی باز از $0 \in \mathbb{R}$ بتوی M است که در شرط $\xi(0) = p$ صدق می کنند. مشتق ξ تعریف نشده است، اما با در نظر گرفتن $\phi_\alpha^{-1} \ o \ \xi$ در 0 می‌توان این مشکل را حل نمود، که ϕ_α یک چارت حول p می باشد. رابطه‌ی هم ارزی روی $C(M)$ را به صورت

$$\xi \sim \eta \quad \leftrightarrow \quad (\phi_\alpha^{-1} \ o \ \xi)'(0) = (\phi_\alpha^{-1} \ o \ \eta)'(0)$$

تعریف می کنیم. فرض کنیم $[[\xi]]_p$ نمایشگر دسته‌ی شامل همه‌ی منحنی های هم ارز با ξ است. فضای مماس به M در p را به صورت مجموعه‌ی همه‌ی چنین دسته های هم ارزی تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۹.۱ : فرض کنید $(M, \{\phi_\alpha \mid \alpha \in A\})$ منیفلدی تحلیلی و p نقطه ای از M است. رابطه‌ی هم ارزی

$$(\phi_\alpha, v) \sim (\phi_\beta, w) \quad \leftrightarrow \quad (\phi_\beta^{-1} \ o \ \phi_\alpha^{-1}(p))(v) = w$$

را بر زوج های به شکل (ϕ_α, v) ، که ϕ_α یک چارت حول p و v برداری از E می باشد، تعریف می کنیم. این روند را به صورت زیر می توان تصور نمود:

بسته به هر چارت مفروض حول p ، یک کپی از فضای E را به نقطه ی p الصاق کرده و سپس هر جفت از این الصاقها را به کمک رابطه ی هم ارزی اخیر یکی می گیریم. پس از این کار عملاً یک شی واحد در نقطه ی p خواهیم داشت که از انتخاب چارت مستقل می باشد. بعلاوه، مشاهده می شود که این شی به طور طبیعی دارای ساختار فضای برداری یکریخت با E است. این شی به همراه ساختار مذکور را فضای مماس بر M در p می نامیم.[22]
رابطه‌ی فوق یک رابطه‌ی هم ارزی است [22]. مجموعه‌ی همه‌ی کلاسهای هم ارزی نسبت به این رابطه، به همراه ساختار جبری تعریف شده را با نماد $T_p(M)$ نشان داده و فضای مماس به M در p می نامیم.

تعریف ۲۰.۱ : (کلاف مماس) . فرض کنید $(M, \{\phi_\alpha | \ \alpha \in A\}$ منیفلدی تحلیلی و p نقطه ای از M است. کلاف مماس به M را به صورت اجتماع (مجزای) فضاهای $T_p(M)$ (که p در M حرکت می کند) تعریف نموده و با $T(M)$ نشان می دهیم.

تعریف ۲۱.۱ : (نگاشت مشتق). اگر $f : M \to N$ نگاشتی تحلیلی بین منیفلدهای تحلیلی $(M, \{\phi_\alpha\})$ و $(N, \{\psi_\beta\})$ باشد و $p \in M$. در این صورت نگاشت خطی $f_{*,p} : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ را با ضابطه ی

$$f_{*,p} : [\phi_\alpha, v]_p \rightarrowtail \Big[\psi_\beta, \Big(\psi_\beta^{-1} o\ f\ o\ \phi_\alpha\Big)'\Big(\phi_\alpha^{-1}(p)\Big)(v)\Big]_{f(p)}$$

بنام مشتق f در p تعریف می کنیم.

قضیه ۲۲.۱ : (فرمول تیلور). فرض کنید f تابعی هموار از یک مجموعه‌ی باز U از یک فضای برداری متناهی بعد E به فضای دیگری مانند F باشد. فرض کنید $x \in U$ و $y \in E$ به گونه ای باشند که به ازای هر $t \in [0, 1]$ ، $x + ty \in U$. اگر $m-$ تایی $(y, ..., y)$ را با نماد $y^{(m)}$ نشان دهیم، در این صورت به ازای هر $m \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, ...\}$

$$f(x + y) = f(x) + f'(x)y + ... + \frac{1}{m!}f^{(m)}(x)y^{(m)} + R_{m+1}(y)$$

که جمله‌ی خطای $R_{m+1}(y)$ در رابطه‌ی $\lim\limits_{y\to 0} R_{m+1}(y).||y||^{-m} = 0$ صدق می‌کند.

تعریف ۲۳.۱ : (تابع تحلیلی). تابع مفروض $f : U \to F$ را در صورتی بر U تحلیلی گوییم که به ازای هر $x \in U$ یک گوی باز $B \subseteq U$ به مرکز در x طوری یافت شود که سری

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(x) y^{(m)}$$

به ازای همه ی $z = x + y \in B$ ها همگرای مطلق باشد و به $f(z)$ همگرا باشد. در صورتی گوییم تابع $f : U \to F$ در x تحلیلی است که در یک همسایگی از x تحلیلی باشد.

قرارداد: نگاشت $\pi : T(M) \to M$ را با ضابطه‌ی $\pi([\phi_\alpha, v]_p) = p$ به نام تصویر طبیعی تعریف می کنیم.

تعریف ۲۴.۱ : در صورتی نگاشت X از M به $T(M)$ را میدان برداری گوییم که به ازای هر $p \in M$، $\pi(X(p)) = p$. چون M و $T(M)$ منیفلدهای تحلیلی اند، می توان در مورد میدان های برداری تحلیلی سخن گفت.

تعریف ۲۵.۱ : (میدان برداری ناوردای چپ). فرض کنید $X : G \to T(G)$ میدان برداری باشد، در صورتی آن را ناوردای چپ گوییم که:

$$X \; o \; L_a = (L_a)_* o \; X \qquad \forall a \in G$$

که در اینجا L_a نمایشگر انتقال از چپ به اندازه‌ی a و با ضابطه‌ی $x \in G \;,\; x \to ax \in G$ است.

تعریف ۲۶.۱ : (حاصلضرب لی). اگر X و Y دو میدان برداری تحلیلی بر M باشند، حاصلضرب $[X,Y] : M \to T(M)$ را به صورت

$$[X,Y](p) = [\phi_\alpha, (P_\alpha o \; Y \; o \; \phi_\alpha)'(v)(P_\alpha o \; X \; o \; \phi_\alpha)(v))$$

$$- \; (P_\alpha o \; X \; o \; \phi_\alpha)'(v)((P_\alpha o \; Y \; o \; \phi_\alpha)(v))]$$