دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیزعددی

عنوان

روش‌های صریح برای معادلات دیفرانسیل کسری و خواص پایداری آن‌ها

استاد راهنما
غلامرضا حجتی

استاد مشاور
مهرداد لکستانی

پژوهشگر
رویا دین‌پژوه

شهریور ۱۳۹۰

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی همتاست. گواهی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

پدرم ، مادرم

همسر صبورم

و

نور چشمم علی

بنام خدا

و لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **غلامرضا حجتی** ، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر **مهرداد لکستانی** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از همسرم و کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

در پایان از تمام دوستان دوران تحصیلم و مخصوصاً از خانم *اکرم موحدی نژاد* به خاطر کمک‌های بی‌دریغ‌شان سپاسگزارم.

رویا دین‌پژوه
شهریور ۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: دین‌پژوه نام: رویا
عنوان: روش‌های صریح برای معادلات دیفرانسیل کسری و خواص پایداری آن‌ها
استاد راهنما : غلامرضا حجتی استاد مشاور : مهرداد لکستانی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیزعددی دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۰ تعداد صفحات: ۷۴
کلید واژه‌ها: معادله‌ی دیفرانسیل، مرتبه‌ی کسری، روش چندگامی، روش صریح، ناحیه‌ی پایداری، بازه‌ی پایداری
چکیده در زمینه‌ی حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری، تلاش‌های زیادی برای معرفی روش‌های مفید و موثر صورت گرفته است که اکثر آن‌ها ضمنی می‌باشند. ولی در چندین مورد استفاده از این روش‌ها مستلزم انجام حجم عظیمی از محاسبات است. برای مقابله با این مشکل روش‌های صریح برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری و معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات جزئی معرفی شده‌اند. در این پایان‌نامه خاصیت‌های پایداری برخی روش‌های چندگامی صریح مورد بررسی قرار گرفته و روش‌هایی با بازه‌ی پایداری وسیع‌تر و هزینه‌ی محاسباتی کمتر معرفی شده‌اند. همچنین چندین آزمایش عددی ارائه شده تا نتایج تئوری را تایید کنند.

فهرست مطالب

مقدمه

در سه دهه‌ی اخیر، موضوع محاسبات کسری (که در آن انتگرال و مشتق از هر مرتبه‌ی دلخواه محاسبه می‌شود) به دلیل ظهور عملی در زمینه‌های مختلف از علوم پایه و مهندسی به شهرت قابل ملاحظه‌ای دست یافته است. بررسی معادلات دیفرانسیلی که شامل مشتق و انتگرال کسری هستند، برای مدت‌های زیادی زمینه‌ای محض از ریاضیات بود [۱۵]. ولی در دهه‌ی اخیر در شرح پدیده‌های فیزیکی و شیمیایی، به طور روز افزونی مورد توجه قرار گرفته است. به عنوان مثال پویایی‌شناسی ملکول‌های پروتئین، پخش ناخالصی در ساختارهای زمین‌شناسی پیچیده، مدل‌بندی سیستم‌های دینامیکی و ... نمونه‌هایی از کاربردهای عملی معادلات دیفرانسیل کسری هستند [۱۶]. در حال حاضر روش‌هایی با قابلیت‌های بالا برای حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال کسری به وجود آمده است، که به دو دسته‌ی حل عددی و حل تئوری این نوع معادلات تقسیم‌بندی می‌شوند.

در زمینه‌ی حل عددی این نوع معادلات تلاش‌های زیادی صورت گرفته است که اکثر آن‌ها از نوع ضمنی می‌باشند [۱، ۲، ۳، ۶، ۱۱] و استفاده از آن‌ها منجر به انجام حجم بالایی از محاسبات می‌شود. بنابراین برای حل این مشکل روش‌های صریح معرفی و برخی خاصیت‌های پایداری آن‌ها در مراجع [۷، ۱۸] بررسی شده‌اند. مشکل بزرگ روش‌های صریح مربوط به پایداری آن‌هاست. لذا برای استفاده از قابلیت‌های این روش‌ها باید خاصیت‌های پایداری آن‌ها به طور وسیع و عمیق مورد بررسی قرار گیرد.

در این پایان‌نامه روش‌های صریحی معرفی شده و مشکلاتی که در استفاده از این روش‌ها برای حل معادلات سخت وجود دارد بیان می‌شوند. سپس روش‌هایی صریح با خاصیت‌های پایداری بهتر معرفی شده و مزیت‌های آن‌ها نسبت به روش‌های صریح قبلی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

این پایان‌نامه بر اساس مرجع [۵] تنظیم شده است.

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی

مقدمه

این فصل شامل مفاهیم پایه‌ی محاسبات کسری، تعاریف مختلف مشتق کسری، معرفی معادلات دیفرانسیل کسری خطی و نمونه‌هایی از کاربردهای عملی آن‌هاست.

۱.۱ تاریخچه پیدایش محاسبات کسری

سوال اصلی که منجر به پیدایش محاسبات کسری شد این بود: آیا می‌توان مفهوم مشتق از مرتبه‌ی صحیح $\frac{d^ny}{dx^n}$ را به حالتی تعمیم داد که n کسری باشد؟
نماد $\frac{d^ny}{dx^n}$ برای مشتق مرتبه‌ی n ام، اولین بار توسط لایبنیتز[۱] معرفی شد. سپس در سال ۱۶۹۵ هوپیتال[۲] طی نامه‌ای از او سوال کرد: ''اگر $n=\frac{1}{2}$ نتیجه چه خواهد شد؟'' لایبنیتز جواب داد: ''...این یک تناقض آشکار است که روزی از آن نتایج مفیدی حاصل خواهد شد.'' با این جمله محاسبات کسری متولد شد. در مکاتبه‌ای که لایبنیتز با والیس[۳] (۱۶۹۷) داشت، اظهار کرد نتایجی که او در رابطه با حاصل‌ضرب نامتناهی $\frac{1}{2}\pi$ به دست آورده را می‌توان با استفاده از محاسبات کسری نیز به‌دست آورد. در سال ۱۷۷۲ لاگرانژ[۴] با اثبات قانون نمایی برای مشتق از مرتبه‌ی صحیح به صورت غیر مستقیم به محاسبات کسری کمک کرد. او بیان کرد:

$$\frac{d^m}{dx^m}\cdot\frac{d^n}{dx^n}y=\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}y.$$

زمانی که بحث محاسبات کسری پیش آمد، ریاضی‌دانان علاقه داشتند بدانند چه محدودیتی باید روی $y(x)$ اعمال شود تا این قانون برای هر m,n دلخواه صحیح باشد. در سال ۱۸۱۹، برای اولین بار از مشتق کسری در یک متن نام برده شد. لاکروایکس[۵] حدود دو صفحه از کتاب هفتصد صفحه‌ای خود را به این موضوع اختصاص داد. او فرض کرد $y(x)=x^m$ که در آن m یک عدد صحیح مثبت است و مشتق مرتبه‌ی n ام آن به صورت

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n},\ m>n,$$

[۱] Leibniz

[۲] Hopital

[۳] Wallis

[۴] Lagrange

[۵] Lacroix

است. سپس با استفاده از نماد لژاندر[۶] برای حالت تعمیم یافته‌ی فاکتوریل (تابع گاما)، به‌دست آورد:
$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$
و به عنوان مثال قرار داد $y = x$ و $n = \frac{1}{2}$ ، و نتیجه گرفت:
$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}},$$
که این نتیجه با آن‌چه که امروزه با استفاده از روش ریمان و لیوول به دست می‌آید هم‌خوانی دارد. ولی لاکروایکس روند کلی که برای هر مرتبه‌ی دلخواه قابل استفاده باشد، ارائه نکرد. در سال‌های بعد نیز کارهایی توسط فوریه[۷] و ریمان-لیوول[۸] و... صورت گرفت. حدود سه قرن، قضایای مشتق کسری فقط به صورت تئوری قابل استفاده برای ریاضی‌دانان بودند ولی در چند دهه‌ی اخیر محققان نشان داده‌اند که مدل‌های از مرتبه‌ی غیر صحیح بسیار کاراتر از مدل‌های قبلی هستند که از مرتبه‌ی صحیح بودند.

۲.۱ توابع استفاده شده در محاسبات کسری

در این قسمت توابعی معرفی می‌شوند که در حل مسائل مربوط به محاسبات کسری نقش مفیدی دارند.

۱.۲.۱ تابع گاما

تابع گاما به صورت
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$$
تعریف می‌شود که در سمت راست صفحه‌ی مختلط $(\mathrm{Re} z > 0)$ همگرا می‌باشد. بدیهی است که اگر z حقیقی باشد، تابع گاما برای هر z حقیقی و مثبت تعریف شده است.

[۶] Legendre

[۷] Fourier

[۸] Riemann-Liouville

۲.۲.۱ تابع بتا

تابع بتا به صورت

$$\mathbf{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

تعریف می‌شود که در آن $\mathrm{Re}x>0$ و $\mathrm{Re}y>0$. نمایش آن بر حسب تابع گاما به صورت

$$\mathbf{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{۱.۱}$$

است.

۳.۲.۱ تابع گامای ناقص

اگر $\mathrm{Re}z>0$، در این صورت تابع گامای ناقص به صورت

$$\gamma^*(\nu,z)=\frac{1}{\Gamma(\nu)z^\nu}\int_0^z t^{\nu-1}e^{-t}\,dt$$

تعریف می‌شود.

۴.۲.۱ تابع بتای ناقص

اگر $\mathrm{Re}x>0$ و $0<\xi<1$ ، تابع بتای ناقص به صورت

$$\mathbf{B}_\xi(x,y)=\int_0^\xi t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

تعریف می‌شود.

۵.۲.۱ تابع خطا

تابع خطا به صورت

$$Erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

تعریف می‌شود و نمایش آن بر حسب تابع گامای ناقص به صورت
$$Erf(x) = x\gamma^*(\frac{1}{2}, x^2)$$
است.

۶.۲.۱ توابع فوق هندسی

سری فوق هندسی تعمیم یافته‌ی ${}_pF_q$ به صورت
$${}_pF_q(a_1, ..., a_p, b_1, ...b_q; z) = \frac{\Gamma(b_1)...\Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1)...\Gamma(a_p)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1+k)...\Gamma(a_p+k)z^k}{\Gamma(b_1+k)...\Gamma(b_q+k)k!}$$
تعریف می‌شود (به شرطی که b_i ها اعداد صحیح غیر منفی باشند). اگر $p \leqslant q$، آنگاه سری به ازای هر z همگرا خواهد بود و اگر $p = q + 1$ آنگاه به ازای z هایی که $|z| < 1$ همگرا خواهد بود و اگر $p > q + 1$ آنگاه به ازای هر z غیر صفر واگرا خواهد بود. اگر $p = q = 1$ ، در این صورت تابع
$${}_1F_1(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)z^k}{\Gamma(c+k)k!}$$
تابع فوق هندسی نامیده می‌شود. البته گاهی اوقات ${}_1F_1$ تابع کامر[۹] نیز نامیده می‌شود (چون در معادله‌ی دیفرانسیل کامر که دارای شکل کلی
$$Ky(t) = tD^2y(t) + (c-t)Dy(t) - aD^0y(t) = 0$$
است، صدق می‌کند). نمایش انتگرالی آن به صورت
$${}_1F_1(a, c, ; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{zt}\, dt$$
است. $U(a, c, z)$ نیز یکی دیگر از توابع فوق هندسی است که به صورت
$$U(a, c, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} x^{a-1}(1+x)^{c-a-1}e^{-zx}\, dx$$
تعریف می‌شود. این تابع نیز یک جواب معادله‌ی دیفرانسیل کامر است.

[۹] Kummer

۷.۲.۱ تابع میتگ-لفلر

در محاسبات مربوط به معادلات دیفرانسیل از مرتبه‌ی صحیح، تابع e^z نقش مهمی ایفا می‌کند. به طور مشابه در محاسبات مربوط به معادلات دیفرانسیل کسری نیز تابع میتگ-لفلر[۱۰] نقش مهمی دارد. این تابع دارای دو نوع تک پارامتری و دو پارامتری است که به صورت زیر تعریف می‌شوند

تابع میتگ-لفلر تک پارامتری

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha\, k+1)},$$

که بسط آن به شکل سری نامتناهی به شکل

$$E_\alpha(z) = 1 + \frac{z}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + ...$$

است. این تابع در سال ۱۹۰۳ توسط میتگ-لفلر معرفی شد.

تابع میتگ-لفلر دو پارامتری

تابع میتگ-لفلر دو پارامتری به صورت

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha\, k+\beta)}, \qquad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

تعریف می‌شود. اگر $\beta = 1$ باشد، تابع میتگ-لفلر تک پارامتری حاصل می‌شود و اگر $\alpha = \beta = 1$ در این صورت داریم

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z.$$

۳.۱ انتگرال کسری ریمان-لیوول

تعریف ۱.۳.۱ (انتگرال کسری ریمان-لیوول مرتبه‌ی ν تابع f). اگر $\mathrm{Re}\nu > 0$، f روی $J' = (0, \infty)$ به صورت تکه‌ای پیوسته و بر هر زیر بازه‌ی متناهی از $J = [0, \infty)$ انتگرال‌پذیر

---

[۱۰] Mittage-Leffler

باشد، در این صورت به ازای هر $t > 0$ عبارت

$$ {}_0D_t^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} f(\xi)\, d\xi $$

را انتگرال کسری ریمان-لیوول f از مرتبه‌ی ν گوییم.

چند بحث درباره‌ی این تعریف:

- واضح است که اگر f تابعی پیوسته بر $[0, X]$ و $X > 0$ باشد و $\nu \geq 1$ ، آنگاه

$$ \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} f(\xi)\, d\xi $$

به ازای هر t موجود است ولی می‌توان شرط وجود انتگرال را کلی‌تر کرد. برای مثال اگر f روی $(0, x]$ پیوسته باشد و f در همسایگی مبدا مانند t^λ که در آن $-1 < \lambda < 0$ رفتار کند یا $0 < \mathrm{Re}\nu < 1$ باشد، در این صورت انتگرال مذکور به عنوان انتگرال ناسره وجود خواهد داشت.

- در تعریف فوق، شرط تکه‌ای پیوسته بودن f بر $(0, \infty)$ باعث می‌شود که f با توابعی مطابقت کند که در همسایگی مبدا مانند $t^\lambda(-1 < \lambda < 0)$ رفتار می‌کنند. لذا بنا نکته‌ی قبل لزوماً انتگرال آن وجود خواهد داشت.

- به توابعی که در شرایط تعریف ذکر شده صدق می‌کنند، کلاس توابع $\mathbf{C}$ گفته می‌شود.

- بعد از این بدون این که خللی به کلیت مطلب وارد شود، فرض می‌کنیم ν حقیقی است و لذا شرط $\mathrm{Re}\nu > 0$ به شرط $\nu > 0$ تبدیل می‌شود.

۱.۳.۱ مثال‌هایی از انتگرال کسری ریمان-لیوول

- انتگرال کسری از مرتبه‌ی ν تابع $f(t) = t^\mu$
بنا بر تعریف انتگرال کسری ریمان-لیوول داریم

$$ \begin{aligned} {}_0D_t^{-\nu} t^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1}\, \xi^\mu\, d\xi = \frac{\mathbf{B}(\mu+1, \nu)}{\Gamma(\nu)} t^{\mu+\nu} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} t^{\mu+\nu}. \end{aligned} $$

پس نشان دادیم که

$$ {}_0D_t^{-\nu}t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}t^{\mu+\nu}, \qquad \nu>0, \quad \mu>-1, \quad t>0. \qquad (۲.۱) $$

در حالت خاص اگر $\mu = 0$ باشد، می‌توان نتیجه گرفت انتگرال کسری ثابت K از مرتبه‌ی ν برابر است با

$$ {}_0D_t^{-\nu}K = \frac{K}{\Gamma(\nu+1)}t^{\nu}, \qquad \nu>0. \qquad (۳.۱) $$

نکته‌ای که در این قسمت باید به آن توجه شود، این است که اگر در رابطه‌ی (۲.۱) $\nu > 0$ و $\mu > -1$ باشد، خواهیم داشت

$$ \lim_{t\to 0} {}_0D_t^{-\nu} = \begin{cases} 0 & \mu+\nu>0 \\ \Gamma(\mu+1) & \mu+\nu=0 \\ \infty & \mu+\nu<0 \end{cases} $$

پس با توجه به رابطه‌ی (۲.۱) می‌توان نتیجه گرفت که حتی پیوستگی تابع f در مبدأ، دیفرانسیل‌پذیری ${}_0D_t^{-\nu}f(t)$ را در $t=0$ ضمانت نمی‌کند.

- اگر $f(t) = \exp(at)$ باشد که در آن a یک عدد ثابت است، در این صورت $\exp(at)$ عضو کلاس $\mathbf{C}$ است و بنا بر تعریف داریم

$$ {}_0D_t^{-\nu}e^{at} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-\xi)^{\nu-1}e^{a\xi}\,d\xi, \qquad \nu>0. \qquad (۴.۱) $$

حال اگر تغییر متغیر $x = t - \xi$ را بر (۴.۱) اعمال کنیم، خواهیم‌داشت

$$ {}_0D_t^{-\nu}e^{at} = \frac{e^{at}}{\Gamma(\nu)}\int_0^t x^{\nu-1}e^{-ax}\,dx, \qquad \nu>0, $$

و با توجه به تعریف تابع گامای ناقص می‌توان نوشت

$$ {}_0D_t^{-\nu}e^{at} = t^{\nu}e^{at}\gamma^*(\nu, at). $$

از آن‌جایی که طرف راست رابطه‌ی (۴.۱) در بسیاری از مطالعات مربوط به محاسبات کسری

ظاهر می‌شود، آن را با نماد$E_t(\nu,a)$ نمایش می‌دهیم. لذا خواهیم‌داشت
$$E_t(\nu,a)=t^{\nu}e^{at}\gamma^*(\nu,at).$$

در حالت خاص اگر $\nu=\frac{1}{2}$ باتوجه به تعریف تابع خطا خواهیم داشت

$$\begin{aligned}{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}e^{at}&=E_t(\frac{1}{2},a)\\&=a^{-\frac{1}{2}}e^{at}Erf(at)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

- برای تابع $\cos(at)$ انتگرال کسری مرتبه‌ی ν با نماد $C_t(\nu,a)$ وبرای تابع $\sin(at)$ با نماد $s_t(\nu,a)$ نمایش داده می‌شود.
پس اگر $\nu=\frac{1}{2}$ باشد، با توجه به تعریف انتگرال کسری خواهیم داشت

$$\begin{aligned}{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}cosat&=C_t(\frac{1}{2},a)\\&=\sqrt{\frac{2}{a}}[(cosat)C(x)+(sinat)S(x)]\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}sinat&=S_t(\frac{1}{2},a)\\&=\sqrt{\frac{2}{a}}[(sinat)C(x)-(cosat)S(x)]\end{aligned}$$

که در این روابط $x=\sqrt{\frac{2at}{\pi}}$ و$C(x),S(x)$ توابع فرنل[11] می‌باشند که به صورت
$$C(x)=\int_0^x cos(\frac{1}{2}\pi t^2)\,dt,\qquad s(x)=\int_0^x sin(\frac{1}{2}\pi t^2)\,dt,$$
تعریف می‌شوند. البته از برخی روابط مثلثاتی می‌توان برای محاسبه‌ی انتگرال کسری توابع مثلثاتی استفاده کرد. به عنوان مثال، با استفاده از رابطه‌ی
$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta,$$

[11] Fresnel

می‌توان نوشت

$$ {}_0Dt^{-\nu}cos^2at = \frac{t^\nu}{2\Gamma(\nu+1)} + \frac{1}{2}C_t(\nu,2a) $$

و

$$ {}_0D_t^{-\nu}sin^2at = \frac{t^\nu}{2\Gamma(\nu+1)} - \frac{1}{2}C_t(\nu,2a). $$

- فرض کنیم

$$ f(t) = (a-t)^\lambda, \qquad a > t > 0. $$

در این صورت f عضو کلاس $\mathbf{C}$ است و با استفاده از تعریف داریم

$$ {}_0D_t^{-\nu}(a-t)^\lambda = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-\xi)^{\nu-1}(a-\xi)^\lambda\,d\xi, \quad a > t > 0. $$

حال اگر تغییر متغیر $x = \frac{t-\xi}{a-\xi}$ را بر انتگرال اخیر اعمال کنیم، خواهیم داشت

$$ {}_0D_t^{-\nu}(a-t)^\lambda = \frac{(a-t)^{\nu+\lambda}}{\Gamma(\nu)}\int_0^{\frac{t}{a}} (x)^{\nu-1}(1-x)^{-\nu-\lambda-1}\,dx. $$

بنابراین با توجه به تعریف تابع بتای ناقص می‌توان نوشت

$$ {}_0D_t^{-\nu}(a-t)^\lambda = \frac{1}{\Gamma(\nu)}(a-t)^{\lambda+\nu}\mathbf{B}_{\frac{t}{a}}(\nu,-\lambda-\nu). $$

- تابع دیگری که در اکثر محاسبات کسری ظاهر می‌شود $f(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ است که در $t=0$ تحلیلی نیست. در این قسمت انتگرال کسری حالت کلی‌تر این تابع یعنی $f(t) = t^\lambda e^{-\frac{a}{t}}$, $\lambda > -1$ را بررسی می‌کنیم. با استفاده از تعریف داریم

$$ {}_0D_t^{-\nu}[t^\lambda e^{-\frac{a}{t}}] = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-\xi)^{\nu-1}\xi^\lambda e^{-\frac{a}{\xi}}\,d\xi. $$

با اعمال تغییر متغیر $\xi = \frac{t}{x+1}$ خواهیم داشت

$$ {}_0D_t^{-\nu}[t^\lambda e^{-\frac{a}{t}}] = t^{\lambda+\nu}e^{-\frac{a}{t}}U(\nu,-\lambda,\frac{a}{t}), $$

که در آن $t > 0$ و $\lambda > -1$ و $\nu > 0$.

۲.۳.۱ قانون نماها برای انتگرال‌های کسری

لم ۲.۳.۱ (فرمول دیریکله[۱۲]). *فرض‌کنیم F روی تمام صفحه‌ی اقلیدسی پیوسته باشد و λ, μ, ν اعداد مثبت باشند. دراین صورت*

$$\int_a^t (t-x)^{\mu-1}\, dx \int_a^x (y-a)^{\lambda-1}(x-y)^{\nu-1}F(x,y)\, dy$$
$$= \int_a^t (y-a)^{\lambda-1}\, dy \int_y^t (t-x)^{\mu-1}(x-y)^{\nu-1}F(x,y)\, dx. \quad (۵.۱)$$

در حالت خاص اگر $a = 0$ و $\lambda = 1$ و $F(x,y) = g(x)f(y)$، در این صورت رابطه‌ی (۵.۱) به شکل

$$\int_0^t (t-x)^{\mu-1}g(x)\, dx \int_0^x (x-y)^{\nu-1}f(y)\, dy$$
$$= \int_0^t f(y)\, dy \int_y^t (t-x)^{\mu-1}(x-y)^{\nu-1}g(x)\, dx. \quad (۶.۱)$$

تبدیل می‌شود. اگر فرض‌کنیم $g(x) = 1$، رابطه‌ی (۶.۱) به شکل

$$\int_0^t (t-x)^{\mu-1}\, dx \int_0^x (x-y)^{\nu-1}f(y)\, dy$$
$$= \boldsymbol{B}(\mu,\nu) \int_0^t (t-y)^{\mu+\nu-1}f(y)\, dy, \quad (۷.۱)$$

نوشته می‌شود که در آن $\boldsymbol{B}$ تابع بتا است.

برهان. ر.ک [۱۲]. □

قضیه ۳.۳.۱ (قانون نماها برای انتگرال‌های کسری). *فرض‌کنیم f روی J پیوسته باشد و $\mu, \nu > 0$. در این صورت به ازای هر t داریم*

$$_0D_t^{-\nu}[_0D_x^{-\mu}f(t)] =_0 D_t^{-(\mu+\nu)}f(t) =_0 D_x^{-\mu}[_0D_t^{-\nu}f(t)]. \quad (۸.۱)$$

[۱۲] Dirichlet

برهان. با توجه به تعریف انتگرال کسری داریم

$$ {}_0D_t^{-\nu}[{}_0D_x^{-\mu}f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-x)^{\nu-1}[\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x (x-y)^{\mu-1}f(y)\,dy]\,dx, $$

از طرفی

$$ {}_0D_t^{-(\mu+\nu)} = \frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^t (t-y)^{\mu+\nu-1}f(y)\,dy, $$

روابط (۶.۱) و (۱.۱) درستی رابطه‌ی (۹.۱) را نتیجه می‌دهند. □

چند نکته درباره‌ی این قضیه:

- اگر بخواهیم قضیه برای هر μ (ν) که برابر صفر است صحیح باشد، باید ${}_0D_t^0$ را معادل با عملگر همانی تعریف کنیم.
- همان‌گونه که در بخش قبل دیدیم، حاصل انتگرال کسری یک تابع اولیه (دیفرانسیل‌پذیر)، لزوماً یک تابع اولیه نیست ولی بنا به این قضیه می‌توان انتگرال کسری تابع غیر دیفرانسیل‌پذیر را محاسبه کرد.

به عنوان مثال اگر $f(t) = e^{at}$ باشد، با توجه به پیوسته بودن e^{at} ، قضیه‌ی ۳.۳.۱ نتیجه می‌دهد

$$ {}_0D_t^{-\nu}E_t(\mu,a) = E_t(\mu+\nu,a), \qquad \mu > -1\,, \nu > 0 $$

و به طور مشابه داریم

$$ {}_0D_t^{-\nu}C_t(\mu,a) = C_t(\mu+\nu,a), \qquad \mu > -1\,, \nu > 0, $$

$$ {}_0D_t^{-\nu}S_t(\mu,a) = S_t(\mu+\nu,a), \qquad \mu > -2\,, \nu > 0, $$

$$ {}_0D_t^{-\nu}[tE_t(\mu,a)] = tE_t(\mu+\nu,a) - \nu E_t(\mu+\nu+1,a), \quad \mu > -2\,, \nu > 0. $$

۳.۳.۱ مشتق انتگرال کسری وانتگرال کسری مشتق

قضیه ۴.۳.۱. *فرض کنیم f بر J پیوسته باشد، آن‌گاه*

الف) اگر Df عضو کلاس $\boldsymbol{C}$ باشد داریم

$$ {}_0D_t^{-\nu-1}[Df(t)] = {}_0D_t^{-\nu}f(t) - \frac{f(0)}{\Gamma(\nu+1)}t^{\nu}. $$