بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه خوارزمی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه **کارشناسی ارشد**

ریاضی **محض (جبر)**

عنوان

مدول های اول**دار**

تدوین

نگین فرشاد

استاد راهنما

دکتر عبدالجواد طاهری**زاده**

مهر ۱۳۹۱

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و یکدار است. دراین پایان‌نامه رده جدیدی از مدول‌ها روی حلقه R که آن‌ها را مدول‌های اول‌دار نامیم، معرفی شده است. هر مدول ناصفر و اول‌دار، دارای طیف اول ناتهی و نگاشت طبیعی آن پوشا است. این رده از مدول‌ها به‌طور واقعی شامل خانواده تمام $R-$مدول‌های با تولید متناهی است. هم‌چنین نشان داده شده است که خواص زیرمدول‌های اول از مدول‌های اول‌دار مشابه مدول‌های با تولید متناهی است.

واژه‌های کلیدی: *زیرمدول اول، اشباع، مدول اول‌دار، طیف اول.*
رده بندی موضوعی(۲۰۱۰) : 13C99، 13C13.

مقدمه

در سال ۱۹۵۸، *Zariski* و *Samual* برای زیرمدول N از M، رادیکال N را به‌صورت مجموعه عناصری از R مانند r که برایnای طبیعی $r^nM \subseteq N$، تعریف کردند. به‌عبارت دیگر $\text{rad}_M(N) = \sqrt{N : M}$. در سال ۱۹۸۴، *C.P.Lu* در [۱۲] زیرمدول‌های اول را مورد بررسی قرار داد. در سال ۱۹۹۵، *C.P.Lu* در [۱۴] به مطالعه طیف‌های یک مدول پرداخت و برخی مدول‌هایی را که دارای طیف ناتهی هستند را به‌دست آورد. در سال ۲۰۰۳، *C.P.Lu* در [۱۶] به مطالعه زیرمدول‌های اول با نظریه اشباع زیرمدول‌ها پرداخت و نتایج مهمی را به‌دست آورد. در این پایان‌نامه به مطالعه مدول‌های اول‌دار، خواص مدول‌های اول‌دار و نتایج دیگری از مدول‌های اول‌دار می‌پردازیم.

فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و M یک $R-$مدول باشد و $N \leq M$ $\,(N < M)$. پوچساز $R-$مدول $\dfrac{M}{N}$ را با $N : M$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$N : M = \{r \in R \mid rM \subseteq N\}$$

زیرمدول سره P از M یک زیرمدول اول ($p-$اول) نامیده می‌شود، درصورتی‌که برای‌هر $r \in R$ و هر $m \in M$، هرگاه $rm \in P$ آنگاه $p = P : M$ یا $r \in P$ یا $m \in P$. مجموعه تمام زیرمدول‌های اول M، طیف اول M، نامیده و با $\text{Spec}\, M$ نمایش داده می‌شود. به‌طور مشابه برای‌هر $p \in \text{Spec}\, R$ مجموعه زیرمدول‌های $p-$اول M با $\text{Spec}_p\, M$ نشان داده می‌شود و $\text{Spec}(0) = \emptyset$ تعریف می‌شود.ممکن است برای مدول ناصفر M، $\text{Spec}\, M$ مساوی تهی شود. به‌عنوان مثال $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به‌عنوان $\mathbb{Z}-$مدول، زیرمدول اول ندارد. چنین مدولی، مدول بدون‌اول نامیده می‌شود. زمانی‌که $\text{Spec}\, M \neq \emptyset$ نگاشت $\psi : \text{Spec}\, M \longrightarrow \text{Spec}\, \dfrac{R}{\text{Ann}\, M}$ با ضابطه $\psi(P) = \dfrac{P : M}{\text{Ann}\, M}$، برای‌هر $P \in \text{Spec}\, M$، نگاشت طبیعی پوشا از $\text{Spec}\, M$ نامیده می‌شود. این پایان‌نامه برگرفته از [۱۵] ؛که در آن $X = \text{Spec}\, M$، مجهز به توپولوژی، به‌نام توپولوژی زاریسکی است. هدف این پایان‌نامه بررسی خواص جبری مدول‌هایی است که طیف اول آن‌ها ناتهی و هر یک دارای نگاشت طبیعی پوشا هستند. در قضیه ۱.۱.۲ زیرمدول‌های اول چنین مدول‌هایی را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۲ .فرض کنیم M یک $R-$مدول ناصفر باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.

(۱) نگاشت طبیعی $\psi : \text{Spec}(M) \longrightarrow \text{Spec}(R/\,\text{Ann}\, M)$ پوشاست.

(۲) برای هر $p \in V(\text{Ann}\, M)$، $P \in \text{Spec}\, M$ وجود دارد به‌طوری‌که $P : M = p$.

(۳) برای هر $p \in V(\operatorname{Ann} M)$، $pM_p \neq M_p$.

(۴) برای هر $p \in V(\operatorname{Ann} M)$، $S_p(pM)$ یک زیرمدول $p-$اول از M است.

(۵) برای هر $p \in V(\operatorname{Ann} M)$، $\operatorname{Spec}_p(M) \neq \emptyset$.

نخستین گام در فصل ۲ معرفی $R-$مدول اول‌دار M است. $R-$مدول M اول‌دار نامیده می‌شود درصورتی‌که $M = \langle 0 \rangle$ و درصورتی‌که $M \neq \langle 0 \rangle$ آنگاه M در یکی از شرایط قضیه ۱.۱.۲ صدق کند. بنابراین مدولی که طیف اول آن دارای نگاشت طبیعی پوشا باشد، یک مدول اول‌دار است. در قضیه ۱۱.۱.۲ نشان خواهیم داد که هر مدول با تولید متناهی و مدول‌های خارج‌قسمتی آن، اول‌دار هستند. در نتیجه ۱۲.۱.۲ کاربردی از قضیه ۱۱.۱.۲ را نشان خواهیم داد. در حقیقت این نتیجه در سراسر پایان‌نامه به‌کار برده شده است.

در فصل ۳ به بررسی شباهت خواص زیرمدول‌های اول مدول‌های با تولید متناهی و زیرمدول‌های اول مدول‌های اول‌دار می‌پردازیم. همچنین نشان می‌دهیم، $R-$مدول اول‌دار M، در لم ناکایاما و در تساوی $\operatorname{Supp} M = V(\operatorname{Ann} M)$ صدق می‌کند. و این قضایا را برای مدول‌های با تولید متناهی تعمیم می‌دهیم. و از آن‌جا در قضیه ۱۴.۱.۳ نتیجه می‌گیریم که اگر M یک مدول ضربی باشد، گزاره‌های زیر معادلند.

(۱) M با تولیدمتناهی است.

(۲) M اول‌دار است.

(۳) $\operatorname{Supp} M = V(\operatorname{Ann} M)$.

(۴) برای هر $p \in V(\operatorname{Ann} M)$، $pM : M = p$.

(۵) برای هر $p \in V(\operatorname{Ann} M)$، $pM \neq M$.

در فصل ۴ به موضعی سازی زیرمدول‌ها و مدول‌های خارج‌قسمتی از یک مدول اول‌دار می‌پردازیم. همچنین جمع‌مستقیم مدول‌های اول‌دار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. و متذکر می‌شویم که لزوما اول‌دار نیستند. از طرفی دیگر روشی برای ساختن مدول‌های اول‌دار را با مفهوم جمع‌مستقیم معرفی می‌کنیم.

در فصل ۵ برای شرایط مختلفی از $R-$مدول M و برای هر ایده‌آل I شامل $\operatorname{Ann} M$، نشان می‌دهیم که $\operatorname{rad} IM = \sqrt{I}M$. این تساوی برای $R-$مدول با تولید متناهی M بنابر [۱۳] برقرار است. ما این تساوی را برای مدول‌هایی که لزوما با تولید متناهی نیستند، اما در هر یک از شرایط زیر صدق می‌کنند توسعه می‌دهیم.

(۱) مدول‌های محتوی یکدست اول‌دار

(۲) مدول‌های ضربی اول‌دار

(۳) مدول‌های یکدست اول‌دار، روی حلقه‌ای با طیف اول نوتری

در این پایان‌نامه تمام حلقه‌ها جابه‌جایی و با عضو همانی و تمام مدول‌ها یکانی هستند. اگر Y یک زیرمجموعه ناتهی از $\operatorname{Spec} R$ یا $\operatorname{Spec} M$ باشد، دراین‌صورت اشتراک تمام عناصر Y، با $\tau(Y)$ نشان داده می‌شود. این پایان‌نامه براساس مقاله زیر تدوین شده است.

C.P. Lu, A module whose prime spectrum has the surjective natural map, Houston Journal of Mathematics, Volume 33, No 1, (2007).

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات

در این پایان‌نامه، R حلقه‌ای جابجایی و یکدار است. در این فصل با این فرض که خواننده با مباحث جبر پیشرفته و جابجایی آشنایی لازم را دارد به بیان تعاریف و قضایای مورد نیاز می‌پردازیم.

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد، دراین‌صورت پوچساز M را با $\operatorname{Ann}_R M$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\operatorname{Ann}_R M := \{r \in R \mid rm = 0, \text{برای هر} m \text{متعلق به} M\} = (0 :_R M)$$

تعریف ۲.۱.۱. $R-$مدول M باوفا نامیده می‌شود، در صورتی که $\operatorname{Ann}_R M = 0$.

لم و تعریف ۳.۱.۱. [28, Lemma and definition 3.46] *فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد. دراین‌صورت*

$$\sqrt{I} := \{r \in R : r^n \in I \text{ موجود باشد که } \mathbb{N} \text{ متعلق‌به } n\}$$

ایده‌آلی از R و شامل I است؛ و رادیکال I نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم R یک حوزه‌ی صحیح و M یک $R-$مدول باشد. دراین‌صورت

$$T(M) := \{m \in M : rm = 0 \text{ موجود باشد که } r \in R \setminus \{0\}\}$$

زیر مدول M است و زیر مدول تابی M نامیده می‌شود. اگر $T(M) = M$ آنگاه M یک مدول تابدار و اگر $T(M) = 0$ آنگاه M یک مدول آزادازتاب نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم N یک $R-$مدول باشد. $R-$مدول N یکدست نامیده می‌شود، هرگاه برای هر رشته‌ی دقیق از $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها مانند

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

رشته‌ی زیر دقیق باشد.

$$0 \longrightarrow M' \bigotimes_R N \longrightarrow M \bigotimes_R N \longrightarrow M'' \bigotimes_R N \longrightarrow 0$$

همچنین $R-$مدول N یکدست باوفا نامیده می‌شود، در صورتی‌که گزاره‌ی فوق و عکس آن هر دو برقرار باشند.

گزاره ۶.۱.۱. [26, Proposition 3.49] *فرض کنیم R یک حوزه‌ی صحیح و M یک $R-$ مدول یکدست باشد. دراین‌صورت M آزاد از تاب است.*

قضیه ۷.۱.۱. [26, Corollary 3.51] *فرض کنیم R یک حوزه ایده‌آل اصلی باشد. دراین‌صورت $R-$مدول M یکدست است اگروتنهااگر M آزاد از تاب باشد.*

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. $r \in R$ یک مقسوم علیه صفر روی M نامیده می‌شود، اگر $m \in M$ موجود باشد، به‌طوری‌که $m \neq 0$ و $rm = 0$. مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر روی M را با $Z_R(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱. $R-$مدول E بخش‌پذیر نامیده می‌شود، در صورتی‌که برای هر $e \in E$ و هر r غیر مقسوم علیه صفر ، عضوی مانند e' از E موجود باشد به‌طوری‌که $e = re'$.

قضیه ۱۰.۱.۱. *فرض کنیم R حوزه‌ی صحیح و K میدان کسرهای R باشد؛ دراین‌صورت K به عنوان $R-$مدول بخش‌پذیر است.*

لم ۱۱.۱.۱. *(لم ناکایاما). فرض کنیم M یک $R-$مدول با تولید متناهی و $\underline{a}$ یک ایده‌آل از R باشد، به‌طوری‌که $\underline{a}M = M$ و $\underline{a} \subseteq \operatorname{Jac}(R)$، دراین‌صورت $M = 0$.*

قضیه ۱۲.۱.۱. *فرض کنیم M یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد، و $\underline{a}$ یک ایده‌آل از R به‌طوری‌که $\underline{a}M = M$؛ دراین‌صورت $\underline{a} + \operatorname{Ann} M = R$.*

ملاحظه ۱۳.۱.۱. [6, P.29.remark] *اگر M یک $R-$مدول یکدست باوفا باشد آنگاه M یکدست و باوفاست. عکس این مطلب در حالت کلی صحیح نیست.*

قضیه ۱۴.۱.۱. [18, Theorem 7.2] *فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

(۱) *M روی R یکدست باوفا است.*

(۲) *M روی R یکدست است و برای هر $R-$مدول ناصفر N ، $N \bigotimes_R M \neq 0$.*

(۳) *M روی R یکدست است و برای هر ایده‌آل ماکسیمال $\underline{m}$ از R ، $\underline{m}M \neq M$.*

(۴) *M روی R یکدست است و برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R ، $\mathfrak{p}M \neq M$.*

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم $\psi : A \longrightarrow B$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. همریختی ψ یکدست باوفا نامیده می‌شود، درصورتی‌که B به عنوان $A-$مدول یکدست باوفا باشد.

قضیه ۱۶.۱.۱. [18, P.28.Theorem 3] *فرض کنیم $\psi : A \longrightarrow B$ یک همریختی حلقه‌ای باشد دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

(۱) *ψ یکدست باوفا است.*

(۲) *ψ یکدست و $^a\psi : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ با ضابطه $\psi^{-1}(q) = q^c$ پوشا است.*

(۳) *ψ یکدست است و برای هر ایده‌آل ماکسیمال $\underline{m}$ از A ، ایده‌آل ماکسیمال $\underline{m'}$ از B وجود دارد، به‌طوری‌که $\underline{m'} \bigcap A = \underline{m}$.*

تعریف ۱۷.۱.۱. حلقه‌ی جابجایی R که دقیقاً یک ایده‌آل ماکسیمال مانند $\underline{m}$ دارد شبه موضعی نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۸. حلقه جابه‌جایی و نوتری R که شبه موضعی باشد، حلقه موضعی نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۹. حلقه R تحویل یافته نامیده می‌شود، هرگاه رادیکال پوچ آن صفر باشد. به‌عبارت‌دیگر دارای عنصر ناصفر پوچ‌توان نباشد.

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنیم R یک حلقه و M یک $R-$مدول باشد. محمل M با $\operatorname{Supp} M$ نشان داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\operatorname{Supp} M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid M_{\mathfrak{p}} \neq ۰\}$$

تعریف ۱.۱.۲۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. دراین‌صورت ارتفاع p را با نماد $\operatorname{ht}_R(\mathfrak{p})$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\operatorname{ht}_R(\mathfrak{p}) := \sup\{n \mid \text{است } \mathfrak{p} \text{ طول زنجیری اکید از ایده‌آل‌های اول مختوم به} \ n\}$$

اگر سوپریمم مجموعه فوق موجود نباشد، قرار می‌دهیم $\operatorname{ht}_R(\mathfrak{p}) = \infty$.

تعریف ۱.۱.۲۲. بعد حلقه R به‌صورت

$$\dim(R) := \sup\{\operatorname{ht}_R(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R\}$$

تعریف می‌شود. اگر سوپریمم مجموعه فوق موجود نباشد، قرار می‌دهیم $\dim(R) = \infty$.

- *اگر $\dim(R) = ۰$، هر ایده‌آل اول از حلقه، ماکسیمال است.*

قضیه ۱.۱.۲۳. *فرض کنیم R یک حلقه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\underline{m}$ باشد. دراین‌صورت* $\dim(R) = \operatorname{ht} \underline{m} < \infty$.

تعریف ۱.۱.۲۴. فرض کنیم F یک $R-$مدول آزاد با پایه‌ای متناهی باشد. دراین‌صورت هر پایه F متناهی و تعداد عضوهای هردو پایه F یکسان است. تعداد عضوهای هر پایه F رتبه F نامیده می‌شود و با $\operatorname{rank} F$ نشان داده می‌شود.

- *فضای برداری با بعد متناهی است اگروتنهااگر دارای پایه‌ای متناهی باشد.*

تعریف ۱.۱.۲۵. فرض کنیم $(R, \underline{m})$ یک حلقه موضعی باشد. دراین‌صورت حلقه R موضعی منظم نامیده می‌شود هرگاه ایده‌آل ماکسیمال آن توسط $\dim R$ عنصر تولید شود.

- *حلقه $(R, \underline{m})$ موضعی منظم است هرگاه* $\dim R = V \dim \dfrac{m}{m^۲}$.

قضیه ۱.۱.۲۶. [28, Theorem 15.34] *هر حلقه موضعی منظم، حوزه صحیح است.*

گزاره ۱.۱.۲۷. *فرض کنیم R یک حوزه صحیح و M یک $R-$مدول و K میدان کسرهای R باشد. دراین‌صورت*

$$\operatorname{rank}_R(M) = V \dim_K(K \bigotimes_R M)$$

قضیه ۱.۱.۲۸. [26, Corollary 4.15] *فرض کنیم R یک حوزه ایده‌آل اصلی* (P. I. D) *و N یک زیرمدول از $R-$مدول آزاد F باشد. دراین‌صورت N یک $R-$مدول آزاد است و* $\operatorname{rank}(N) \leq \operatorname{rank}(F)$.

قضیه ۱.۱.۲۹. [28, Theorem 13.7] *فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. دراین‌صورت M نوتری است اگروتنهااگر هر زیرمدول M با تولید متناهی باشد.*

لم ۳۰.۱.۱. [28, Lemma 14.7] *فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. دراین‌صورت اگر M نوتری باشد آنگاه هر زیرمدول و هر مدول خارج‌قسمتی آن نیز نوتری است.*

قضیه ۳۱.۱.۱. [30, P.216.Corollary 1] *فرض کنیم R یک حوزه صحیح نوتری و m یک ایده‌آل سره از R باشد. دراین‌صورت $\bigcap_i (m^i) = 0$.*

قضیه ۳۲.۱.۱. [19, Theorem 7.4] *فرض کنیم M یک $R-$مدول یکدست باشد و I_1 و I_2 دو ایده‌آل از R باشند. دراین‌صورت*

$$(I_1 \bigcap I_2)M = I_1M \bigcap I_2M$$

قضیه ۳۳.۱.۱. [19, Theorem 7.12] *فرض کنیم M یک $R-$مدول پروژکتیو باشد. دراین‌صورت برای‌هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R، $M_{\mathfrak{p}}$ یک $R_{\mathfrak{p}}-$مدول پروژکتیو است.*

تعریف ۳۴.۱.۱. [26, P.171.Definition] $R-$مدول M بی‌تاب نامیده می‌شود هرگاه M با زیرمدولی از حاصل‌ضرب مستقیم Rها یکریخت باشد.

قضیه ۳۵.۱.۱. [24, P.55] *مدول M با رتبه متناهی روی حوزه صحیح R بی‌تاب است اگروتنهااگر M زیرمدولی از یک مدول آزاد با تولید متناهی باشد.*

لم ۳۶.۱.۱. [28, Lemma 3.34] *فرض کنیم R یک حوزه ایده‌آل اصلی باشد و $\mathfrak{p} \in R \setminus \{0\}$، دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

(۱) *$R\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول و ناصفر R است.*

(۲) *$\mathfrak{p}$ عضو اول R است.*

(۳) *$\mathfrak{p}$ عضو تحویل‌ناپذیر R است.*

تعریف ۳۷.۱.۱. [28, Definition 16.13] فرض کنیم R زیرحلقه‌ای از حلقه تعویض‌پذیر S باشد و $s \in S$. s روی R صحیح است اگر $h \in \mathbb{N}$ و $r_0, \cdots, r_{h-1} \in R$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$s^h + r_{h-1}s^{h-1} + \cdots + r_1 s + r_0 = 0$$

یعنی s ریشه یک چند جمله‌ای تکین متعلق به $R[X]$ باشد.

- *گوییم S روی R صحیح است اگر هر عضو S روی R صحیح باشد.*

قضیه ۳۸.۱.۱. [28, Theorem 34.13] *(قضیه وقوع). فرض کنیم R زیرحلقه‌ای از حلقه تعویض‌پذیر S $(R \subseteq S)$ بوده و S روی R صحیح باشد. فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ دراین‌صورت $q \in \operatorname{Spec} S$ وجود دارد به‌طوری‌که $q \bigcap R = \mathfrak{p}$.*

۲.۱ مدول ضربی

تعریف ۱.۲.۱. مدول M ضربی نامیده می‌شود، درصورتی‌که برای‌هر زیرمدول N از M ایده‌آل I از R موجود باشد به‌طوری‌که $N = IM$.

- *در تعریف مدول ضربی $I = (N :_R M)$ است. یعنی $R-$مدول M ضربی است اگر برای‌هر زیرمدول N از M داشته باشیم $N = (N :_R M)M$.*

لم ۱.۲.۲. [5, Lemma 2] فرض کنیم R یک حلقه باشد.

(۱) فرض کنیم S یک بسته ضربی از R و M یک $R-$مدول ضربی باشد. دراین‌صورت $S^{-1}M$ یک $S^{-1}R-$مدول ضربی است.

(۲) $R-$مدول با تولید متناهی M ضربی است اگروتنهااگر برای‌هر ایده‌آل اول (ماکسیمال) $\mathfrak{p}$ از R، $M_{\mathfrak{p}}$ یک $R_{\mathfrak{p}}-$مدول ضربی باشد.

قضیه ۱.۲.۳. [8, Theorem 1.6] فرض کنیم M یک $R-$مدول باوفا باشد. دراین‌صورت M ضربی است اگروتنهااگر

(۱) برای‌هر مجموعه ناتهی از ایده‌آل‌های $I_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ از R

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda M) = (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)M$$

(۲) برای‌هر زیرمدول N از M و ایده‌آل A از R که $N \subset AM$، ایده‌آل B موجود باشد به‌طوری‌که $B \subset A$ و $N \subseteq BM$.

لم ۱.۲.۴. [8, Lemma 2.10] فرض کنیم $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از حلقه R و M یک $R-$مدول ضربی باوفا باشد. فرض کنیم $ax \in \mathfrak{p}M$ که در آن $x \in M$ و $a \in R$. دراین‌صورت $a \in \mathfrak{p}$ یا $x \in \mathfrak{p}M$.

نتیجه ۱.۲.۵. [8, Corollary 2.11] فرض کنیم M یک $R-$مدول ضربی و N زیرمدول سره از M باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.

(۱) N اول است.

(۲) $\operatorname{Ann}\dfrac{M}{N}$ یک ایده‌آل اول از R است.

(۳) ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R وجود دارد به‌طوری‌که $\operatorname{Ann} M \subseteq \mathfrak{p}$ و $N = \mathfrak{p}M$.

۱.۳ زیرمدول اولیه

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. زیرمدول سره N از M، زیرمدول اولیه نامیده می‌شود، درصورتی‌که برای‌هر $r \in R$ و $m \in M$، اگر $rm \in N$ آنگاه $m \in N$ و یا عدد طبیعی n موجود باشد، به‌طوری‌که $r^nM \subseteq N$.

لم و تعریف ۱.۳.۲. [29, Lemma 4.17] فرض کنیم N یک زیرمدول اولیه از $R-$مدول M باشد، دراین‌صورت

$$P = \{r \in R \mid r^nM \subseteq N \text{ موجود باشد به‌طوری‌که } n \text{ عدد طبیعی }\} = \sqrt{N : M}$$

یک ایده‌آل اول R است و N یک زیرمدول $\mathfrak{p}-$اولیه M نامیده می‌شود.

توجه ۱.۳.۳. اگر N یک زیرمدول $\mathfrak{p}-$اولیه از M باشد آنگاه $N : M \subseteq \mathfrak{p}$. به ویژه اگر q یک ایده‌آل $\mathfrak{p}-$اولیه R باشد آنگاه $\mathfrak{p} \subseteq q$.

قضیه ۱.۳.۴. [23, Proposition 18] فرض کنیم N یک زیرمدول اولیه از $R-$مدول M باشد. دراین‌صورت $N : M$ یک ایده‌آل $\mathfrak{p}-$اولیه است.

۴.۱ زیرمدول‌های اول و اول مینیمال

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. زیرمدول سره P از M، زیرمدول اول نامیده می‌شود در صورتی‌که برای‌هر $r \in R$ و هر $e \in M$، اگر $re \in P$ آنگاه $e \in P$ یا $r \in P : M$.

توجه ۲.۴.۱. *اگر P یک زیرمدول اول از M باشد. آنگاه $P : M$ یک ایده‌آل اول R است و اگر قرار دهیم $\mathfrak{p} := (P : M)$ آنگاه به P، زیرمدول $\mathfrak{p}-$اول M گفته می‌شود.*

- *واضح است که هر زیرمدول اول، اولیه است و هم‌چنین هر ایده‌آل اول حلقه R یک زیرمدول اول از R به عنوان $R-$مدول است.*

تذکر ۳.۴.۱. *اگر برای زیرمدول سره N از M، $M : N$ یک ایده‌آل اول باشد، آنگاه لزوماً N یک زیرمدول اول M نیست.*

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک $R-$مدول باشد. دراین‌صورت مجموعه تمام زیرمدول‌های اول M را با $\operatorname{Spec} M$ نمایش می‌دهیم. به ویژه مجموعه تمام زیرمدول‌های $\mathfrak{p}-$اول M را با $\operatorname{Spec}_{\mathfrak{p}} M$ نشان می‌دهند و $\operatorname{Spec}_{\mathfrak{p}} M \subseteq \operatorname{Spec} M$.

قضیه ۵.۴.۱. [12, Result 3] *زیرمدول تابدار $T(M)$ از مدول M روی حوزه صحیح R یک زیرمدول اول است هرگاه $T(M) \neq M$.*

قضیه ۶.۴.۱. [12, Theorem 1] *فرض کنیم N یک زیرمدول سره از $R-$مدول M باشد، و $\mathfrak{p} = N : M$، دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

(۱) *N یک زیرمدول اول است.*

(۲) *$\frac{M}{N}$ یک $\frac{R}{\mathfrak{p}}-$مدول آزادازتاب است.*

گزاره ۷.۴.۱. [12, Proposition 2] *فرض کنیم N یک زیرمدول سره از $R-$مدول M باشد به‌طوری‌که $M : N$ یک ایده‌آل ماکسیمال R است. دراین‌صورت N یک زیرمدول اول است. به ویژه برای‌هر ایده‌آل ماکسیمال $\underline{m}$ از R به‌طوری‌که $M \neq \underline{m}M$، $\underline{m}M$ یک زیرمدول اول M است.*

گزاره ۸.۴.۱. [12, Proposition 4] *فرض کنیم M یک $R-$مدول و N زیرمدول ماکسیمال از M باشد. دراین‌صورت N یک زیرمدول اول است و $M : N$ یک ایده‌آل ماکسیمال R است.*

قضیه ۹.۴.۱. *فرض کنیم R یک حوزه صحیح باشد که میدان نیست و K میدان کسرهای R باشد. دراین‌صورت $\operatorname{Spec}_R(K) = \{(0)\}$.*

قضیه ۱۰.۴.۱. [14, Proposition 1] *فرض کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد، به‌طوری‌که $\mathfrak{p} \bigcap S = \emptyset$ و M یک $R-$مدول باشد. دراین‌صورت یک تناظر یک‌به‌یک بین گردایه زیرمدول‌های $\mathfrak{p}-$اول P از M و گردایه زیرمدول‌های $S^{-1}\mathfrak{p}-$اول W از $S^{-1}M$ برقرار است و این تناظر به‌گونه‌ای است که $P = W \bigcap M$ و $W = S^{-1}P$.*

نتیجه ۱۱.۴.۱. [14, Corollary 3] *فرض کنیم M یک $R-$مدول و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. دراین‌صورت تناظری یک‌به‌یک بین زیرمدول‌های اول $R_{\mathfrak{p}}-$مدول $M_{\mathfrak{p}}$ و زیرمدول‌های اول N از M برقرار است، به‌طوری‌که $N : M \subseteq \mathfrak{p}$.*

قضیه ۱۲.۴.۱. [14, Theorem 2] *فرض کنیم M یک $R-$مدول ناصفر باشد و $R \neq 0$. دراین‌صورت؛*

(۱) اگر M با تولید متناهی باشد، آنگاه یک تابع پوشا از $\operatorname{Spec} M$ به $\operatorname{Spec} \dfrac{R}{\operatorname{Ann} M}$ وجود دارد. لذا $\operatorname{Spec} M \neq \emptyset$.

(۲) اگر M روی R یکدست باوفا باشد، آنگاه یک تابع پوشا از $\operatorname{Spec} M$ به $\operatorname{Spec} R$ وجود دارد. لذا $\operatorname{Spec} M \neq \emptyset$.

(۳) اگر M یک مدول آزادازتاب روی حوزه صحیح R باشد، آنگاه $\operatorname{Spec} M \neq \emptyset$.

(۴) اگر M یک مدول ضربی باشد، آنگاه $\operatorname{Spec} M \neq \emptyset$.

گزاره ۱.۴.۱۳. [15, Proposition 3.5] *فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. در هریک از شرایط زیر نگاشت طبیعی $\psi : \operatorname{Spec} M \longrightarrow \operatorname{Spec} \dfrac{R}{\operatorname{Ann} M}$ با ضابطه $\psi(P) = \dfrac{P : M}{\operatorname{Ann} M}$ پوشا است.*

(۱) M یک مدول با تولید متناهی ناصفر باشد.

(۲) M یک مدول یکدست باوفای ناصفر باشد

(۳) M را حلقه‌ای مانند S می‌گیریم به‌طوری‌که حلقه S شامل R است(S $(R \hookrightarrow S)$ یک $R-$مدول و نگاشت طبیعی $\theta : \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ با ضابطه $\theta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \bigcap R$، برای‌هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S$ پوشا باشد.

قضیه ۱.۴.۱۴. [12, Theorem 3] *فرض کنیم M یک $R-$مدول یکدست باشد و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از R، به‌طوری‌که $\mathfrak{p}M \neq M$. اگر q ایده‌آل $\mathfrak{p}-$اولیه از R باشد آنگاه qM زیرمدول $\mathfrak{p}-$اولیه از M است. به ویژه $\mathfrak{p}M$ یک زیرمدول $\mathfrak{p}-$اول از M باشد.*

تعریف ۱.۴.۱۵. فرض کنیم M یک $R-$مدول و $N \leq M$. دراین‌صورت واریته N را با $V(N)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V(N) = \{P \in \operatorname{Spec} M \mid P \supseteq N\}$$

اگر $V(N)$ تحت رابطه شمول حداقل دارای یک عضو مینیمال باشد، آنگاه چنین عضو مینیمالی را یک زیرمدول اول مینیمال (روی) N نامند. به‌عبارت‌دیگر زیرمدول اول P از M، زیرمدول مینیمال (روی) N نامیده می‌شود درصورتی‌که؛

(۱) $N \subseteq P$.

(۲) اگر P' زیرمدول اول دیگری از M باشد به‌طوری‌که $N \subseteq P' \subseteq P$، آنگاه $P' = P$.

توجه شود که زیرمدول اول مینیمال، زیرمدول (0) را زیرمدول اول مینیمال مدول M گویند.

- *اگر P یک زیرمدول اول مینیمال M باشد، آنگاه P را یک زیرمدول اول مینیمال نیز گویند.*

۱.۵ اشباع زیرمدول‌ها

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنیم M یک $R-$مدول و $N \leq M$ و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ و $\varphi : M \longrightarrow M_{\mathfrak{p}}$ همریختی طبیعی باشد. دراین‌صورت اشباع زیرمدول N نسبت به $\mathfrak{p}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S_{\mathfrak{p}}(N) = (N_{\mathfrak{p}})^c = \varphi^{-1}(N_{\mathfrak{p}})$$

که در آن

$$S_{\mathfrak{p}}(N) = \{e \in M \mid se \in N \text{ وجود دارد به‌طوری‌که } s \in R \setminus \mathfrak{p}\}$$

و $S_{\mathfrak{p}}(N)$ زیرمدولی از M شامل N است. $S_{\mathfrak{p}}(N)$ را S-مولفه N در M نیز می‌گویند که در آن S زیرمجموعه بسته ضربی $S = R \setminus \mathfrak{p}$ است.

تعریف ۲.۵.۱. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. دراین‌صورت زیرمدول N از M نسبت به $\mathfrak{p}$ اشباع شده است هرگاه $S_{\mathfrak{p}}(N) = N$.

لم ۳.۵.۱. [16, Result 1] *فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. دراین‌صورت؛*

(۱) $S_{\mathfrak{p}}(S_{\mathfrak{p}}(N)) = S_{\mathfrak{p}}(N)$ و $(S_{\mathfrak{p}}(N))_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{p}}$.

(۲) $N : M \subseteq S_{\mathfrak{p}}(N : M) \subseteq S_{\mathfrak{p}}(N) : M = S_{\mathfrak{p}}(S_{\mathfrak{p}}(N) : M)$.

لم ۴.۵.۱. [16, Result 2] *فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. دراین‌صورت؛*

(۱) *N یک زیرمدول $\mathfrak{p}$-اولیه ($\mathfrak{p}$-اول) از M است اگروتنهااگر $S_{\mathfrak{p}}(N) = N$ و $\sqrt{N : M} = \mathfrak{p}$ ($N : M = \mathfrak{p}$).*

(۲) *اگر N نسبت به $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ اشباع شده باشد. دراین‌صورت برای‌هر $q \in V(\mathfrak{p})$، $N = S_{\mathfrak{p}}(N) = S_q(N)$.*

قضیه ۵.۵.۱. [16, Theorem 2.1] *فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. دراین‌صورت؛*

(۱) $N_{\mathfrak{p}} : M_p = (S_{\mathfrak{p}}(N) : M)_{\mathfrak{p}}$.

(۲) *گزاره‌های زیر معادلند.*

(i) $N_{\mathfrak{p}} \neq M_{\mathfrak{p}}$.

(ii) $S_{\mathfrak{p}}(N) : M \subseteq \mathfrak{p}$.

(iii) $S_{\mathfrak{p}}(N) \neq M$.

(iv) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} \frac{M}{N}$.

لم ۶.۵.۱. [16, Lemma 2.2] *فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقه R باشد و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

(۱) *$S_{\mathfrak{p}}(I)$ یک ایده‌آل $\mathfrak{p}$-اولیه از R است.*

(۲) $\sqrt{S_{\mathfrak{p}}(I)} = \mathfrak{p}$.

(۳) *$\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول مینیمال از I است.*

قضیه ۷.۵.۱. [16, Theorem 2.3] *فرض کنیم M یک R-مدول و $N \leq M$ و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

(۱) *$S_{\mathfrak{p}}(N)$ یک زیرمدول $\mathfrak{p}$-اولیه از M است.*

(۲) *$S_{\mathfrak{p}}(N) : M$ یک ایده‌آل $\mathfrak{p}$-اولیه از R است.*

(۳) $\sqrt{S_{\mathfrak{p}}(N) : M} = \mathfrak{p}$.

به ویژه $S_{\mathfrak{p}}(N)$ یک زیرمدول $\mathfrak{p}$-اول از M است اگروتنهااگر $S_{\mathfrak{p}}(N) : M = \mathfrak{p}$.

گزاره ۸.۵.۱. [16, Proposition 2.4] *فرض کنیم M یک R-مدول و $N \leq M$ و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ به‌طوری‌که $\mathfrak{p}M \subseteq N$. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

(۱) $S_{\mathfrak{p}}(N) \neq M$.

(۲) $N : M = S_{\mathfrak{p}}(N) : M = \mathfrak{p}$.

(۳) $S_{\mathfrak{p}}(N)$ *یک زیرمدول اول است.*

نتیجه ۹.۵.۱. *هرگاه $N \leq M$ و $\mathfrak{p}M \subseteq N$ یک زیرمدول $\mathfrak{p}$-اول باشد، آنگاه $S_{\mathfrak{p}}(N)$ یک زیرمدول $\mathfrak{p}$-اول است.*

نتیجه ۱۰.۵.۱. *فرض کنیم M یک R-مدول و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول از R باشد، به‌طوری‌که $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M) \neq M$. دراین‌صورت $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M)$ یک زیرمدول $\mathfrak{p}$-اول از M است و $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M)$ اشتراک تمام زیرمدول‌های $\mathfrak{p}$-اول P از M است به‌طوری‌که $P : M = \mathfrak{p}$.*

قضیه ۱۱.۵.۱. [16, Theorem 3.5] *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی باشد و $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann} M)$. دراین‌صورت اگر q یک ایده‌آل $\mathfrak{p}$-اولیه از R باشد، آنگاه $S_{\mathfrak{p}}(qM)$ یک زیرمدول $\mathfrak{p}$-اولیه و $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M)$ یک زیرمدول $\mathfrak{p}$-اول از M است.*

نتیجه ۱۲.۵.۱. *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی باشد و $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann} M)$. دراین‌صورت $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M)$ یک زیرمدول $\mathfrak{p}$-اول است و $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M)$ اشتراک تمام زیرمدول‌های $\mathfrak{p}$-اول P از M است به‌طوری‌که $P : M = \mathfrak{p}$.*

قضیه ۱۳.۵.۱. *فرض کنیم M یک R-مدول و $N \leq M$ و $p \in \operatorname{Spec} R$. دراین‌صورت؛*

(۱) *اگر $S_{\mathfrak{p}}(N)$ زیرمدول اول باشد، آنگاه یک زیرمدول اول مینیمال (روی) N است و هر زیرمدول $\mathfrak{p}$-اول شامل N، شامل $S_{\mathfrak{p}}(N)$ است.*

(۲) $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M)$ *یک زیرمدول $\mathfrak{p}$-اول است اگروتنهااگر $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M) \neq M$.*

(۳) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ *اگروتنهااگر $S_{\mathfrak{p}}(\circ) \neq M$.*

برهان. (۱). فرض کنیم L یک زیرمدول اول از M باشد به‌طوری‌که $N \subseteq L \subseteq S_{\mathfrak{p}}(N)$. لذا

$$S_{\mathfrak{p}}(N) \subseteq S_{\mathfrak{p}}(L) \subseteq S_{\mathfrak{p}}(S_{\mathfrak{p}}(N))$$

از طرفی بنابر لم ۳.۵.۱ $S_{\mathfrak{p}}(S_{\mathfrak{p}}(N)) = S_{\mathfrak{p}}(N)$، بنابراین

$$S_{\mathfrak{p}}(N) = S_{\mathfrak{p}}(L) \quad (I)$$

حال فرض کنیم $L : M = \mathfrak{p}'$. از اینکه $L \subseteq S_{\mathfrak{p}}(N)$ لذا

$$\mathfrak{p}' = L : M \subseteq S_{\mathfrak{p}}(N) : M$$

از طرفی بنابر گزاره ۸.۵.۱ $S_{\mathfrak{p}}(N) : M = \mathfrak{p}$. بنابراین $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$. حال نشان می‌دهیم $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$. فرض کنیم $\mathfrak{p} \nsubseteq \mathfrak{p}'$، دراین‌صورت $r \in \mathfrak{p}$ وجود دارد که $r \notin \mathfrak{p}' = L : M$ پس $m \in M$ای وجود دارد به‌طوری‌که $rm \notin L$. حال از اینکه $\mathfrak{p} = S_{\mathfrak{p}}(N) : M$ و $r \in \mathfrak{p}$ نتیجه می‌گیریم، $rm \in S_{\mathfrak{p}}(N)$ بنابراین $s \in R \setminus \mathfrak{p}$وجود دارد به‌طوری‌که $srm \in N$ و از آنجا بنابر اول بودن L داریم.

$$s \in L : M = \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$$

که یک تناقض است. پس $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ و در نتیجه

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \qquad (II)$$

بنابراین بنابر (I) و (II) و لم ۴.۵.۱

$$S_{\mathfrak{p}}(N) = S_{\mathfrak{p}}(L) = S_{\mathfrak{p}'}(L) = L$$

بنابراین $S_{\mathfrak{p}}(N)$ یک زیرمدول اول مینیمال (روی) N است. حال فرض کنیم L یک زیرمدول $\mathfrak{p}-$اول از M و شامل N باشد. بنابراین $S_{\mathfrak{p}}(N) \subseteq S_{\mathfrak{p}}(L) = L$ و برهان کامل می‌شود.
(۲). فرض کنیم $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M) \neq M$. نشان می‌دهیم $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M)$ یک زیرمدول $\mathfrak{p}-$اول است. اول بودن $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M)$ بنابر گزاره ۸.۵.۱ واضح است. کافیست نشان دهیم $p = S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M) : M$. فرض کنیم $r \in S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M) : M$ به‌طوری‌که $r \notin \mathfrak{p}$. بنابراین $rM \subseteq S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M)$. لذا برای‌هر $m \in M$، وجود دارد $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ به‌طوری‌که $rms \in pM$. اما $rs \notin R \setminus \mathfrak{p}$، بنابراین برای‌هر $m \in M$، $m \in S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M)$. پس $M \subseteq S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M)$. در نتیجه $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M) = M$. و این با فرض در تناقض است. برعکس، فرض کنیم $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M)$ یک زیرمدول $\mathfrak{p}-$اول باشد لذا بنابر گزاره ۸.۵.۱ $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M) \neq M$.
(۳). فرض کنیم $S_{\mathfrak{p}}(\circ) \neq M$. دراین‌صورت بنابر قضیه ۵.۵.۱ $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$. برعکس، فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ بنابراین $M_{\mathfrak{p}} \neq \circ$، در نتیجه $m \in M$ وجود دارد به‌طوری‌که $\frac{m}{1} \neq \circ$. بنابراین برای‌هر $s \in R \setminus \mathfrak{p}$، $sm \neq \circ$ از اینجا $m \notin S_{\mathfrak{p}}(\circ)$ پس $S_{\mathfrak{p}}(\circ) \neq M$. □

۶.۱ حلقه ارزیابی گسسته

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنیم A یک حوزه صحیح و K میدان کسرهای آن باشد. دراین‌صورت A حلقه ارزیابی K نامیده می‌شود، اگر برای‌هر عنصر ناصفر x از K، $x \in A$ یا $x^{-1} \in A$.

تعریف ۲.۶.۱. فرض کنیم K یک میدان باشد. نگاشت $V : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ ($K^* = K - \{\circ\}$ یک گروه ضربی از K) ارزیابی گسسته روی K است درصورتی‌که؛

(۱) $V(xy) = V(x) + V(y)$ (V یک همریختی)

(۲) $V(x+y) \geq \min(V(x), V(y))$

مجموعه شامل ∘ و تمام $x \in K^*$ به‌طوری‌که $V(x) \geq \circ$ یک حلقه ارزیابی (روی میدان K) از V نامیده می‌شود. $V(\circ) = +\infty$ تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۶.۱. حوزه صحیح A یک حلقه ارزیابی گسسته است اگر یک ارزیاب گسسته مانند V از میدان کسرهای K از A موجود باشد به‌طوری‌که A حلقه ارزیابی از V باشد.

- *حلقه موضعی و منظم با بعد ۱ حلقه ارزیابی گسسته است.*

قضیه ۴.۶.۱. [3, proposition 9.2] *فرض کنیم A یک حوزه صحیح موضعی نوتری با بعد ۱ باشد، و $\underline{m}$ ایده‌آل ماکسیمال A و $K = \frac{A}{\underline{m}}$. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

(۱) *A حلقه ارزیابی گسسته است.*

(۲) *A به‌طور صحیح بسته است.*

(۳) *$\underline{m}$ یک ایده‌آل اصلی است.*

(۴) $\dim \frac{m}{m^{2}} = 1$.

(۵) *هر ایده‌آل ناصفر آن توانی از ایده‌آل ماکسیمال $\underline{m}$ است.*

قضیه ۱.۶.۵. [3, Theorem 11.2] *فرض کنیم A یک حلقه ارزیابی گسسته باشد. دراین‌صورت A یک حلقه موضعی با بعد $\underline{1}$ است.*

۱.۷ فضای توپولوژیکی نوتری

تعریف ۱.۷.۱. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد. مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم.

$$F = \{V(I) \mid \text{یک ایده‌آل از } R \text{ است } I\}$$

مجموعه F از زیرمجموعه‌های $\operatorname{Spec} R$ در شرایط زیر صدق می‌کند.

(۱) F شامل $\emptyset$ و $\operatorname{Spec} R$ است.

(۲) نسبت به اشتراک دلخواه و اجتماع متناهی بسته است.

بنابراین F در تعریف توپولوژی براساس مجموعه‌های بسته صدق می‌کند. این توپولوژی روی $\operatorname{Spec} R$ توپولوژی **زاریسکی** [1] نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۷.۲. فضای توپولوژیکی X را نوتری گوییم، هرگاه هر دنباله نزولی از زیرمجموعه‌های بسته X متوقف شود.

قضیه ۱.۷.۳. [19, Exercise 4.9] *فرض کنیم R یک حلقه نوتری باشد. دراین‌صورت مجموعه ایده‌آل‌های اول R $(\operatorname{Spec} R)$ یک فضای توپولوژیکی نوتری است.(عکس این مطلب در حالت کلی صحیح نیست).*

تعریف ۱.۷.۴. مجموعه بسته و ناتهی V در فضای توپولوژیکی تحویل پذیر نامیده می‌شود هرگاه بتوان V را به‌صورت اجتماع دو زیرمجموعه بسته و اکید V_1 و V_2 از آن نوشت $(V = V_1 \bigcup V_2)$. در غیر این صورت تحویل ناپذیر نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۷.۵. [19, Exercise 4.10] *فرض کنیم R یک حلقه نوتری باشد. دراین‌صورت برای‌هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$، $V(\mathfrak{p})$ مجموعه بسته تحویل ناپذیر است.*

قضیه ۱.۷.۶. [19, Exercise 4.11] *هر زیرمجموعه بسته از فضای توپولوژیکی نوتری را می‌توان به‌صورت اجتماع متناهی از مجموعه‌های بسته تحویل‌ناپذیر نوشت.*

تعریف ۱.۷.۷. حلقه R، **لاسکرین** [2] نامیده می‌شود هرگاه هر ایده‌آل آن اشتراک متناهی از ایده‌آل‌های اولیه باشد.

قضیه ۱.۷.۸. [9, Theorem 4] *هر حلقه لاسکرین دارای طیف اول نوتری است.*

---
[1] Zariski
[2] laskerian

فصل ۲

مدول‌های اول‌دار

این فصل را با قضیه بنیادی شروع می‌کنیم، و سپس به بیان تعریف مدول اول‌دار می‌پردازیم.

۱.۲ مدول‌های اول‌دار

قضیه ۱.۱.۲. *فرض کنیم M یک $R-$مدول ناصفر باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

(۱) *نگاشت طبیعی $\psi : \operatorname{Spec}(M) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R/\operatorname{Ann} M)$ پوشا است.*

(۲) *برای هر $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann} M)$، $P \in \operatorname{Spec} M$ **وجود دارد** به‌طوری‌که $P : M = \mathfrak{p}$.*

(۳) *برای هر $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann} M)$، $\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}} \neq M_{\mathfrak{p}}$.*

(۴) *برای هر $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann} M)$، $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}M)$ یک زیرمدول $\mathfrak{p}-$اول از M است.*

(۵) *برای هر $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann} M)$، $\operatorname{Spec}_{\mathfrak{p}}(M) \neq \emptyset$.*

برهان. ۱) $\Longleftarrow$ ۲).برای هر $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann} M)$،$\mathfrak{p}/\operatorname{Ann} M \in \operatorname{Spec}(R/\operatorname{Ann} M)$. از طرفی بنابه فرض نگاشت طبیعی $\psi : \operatorname{Spec}(M) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R/\operatorname{Ann} M)$ باضابطه $\psi(P) = P : M/\operatorname{Ann} M$ پوشا است. لذا $P \in \operatorname{Spec}(M)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\psi(P) = \mathfrak{p}/\operatorname{Ann} M$، بنابراین $P : M/\operatorname{Ann} M = \mathfrak{p}/\operatorname{Ann} M$. حال نشان می‌دهیم از تساوی فوق $P : M = \mathfrak{p}$ را داریم.

فرض کنیم $r \in \mathfrak{p}$. بنابراین

$$r + \operatorname{Ann} M \in \mathfrak{p}/\operatorname{Ann} M$$

از آنجایی‌که $P : M/\operatorname{Ann} M = \mathfrak{p}/\operatorname{Ann} M$ درنتیجه