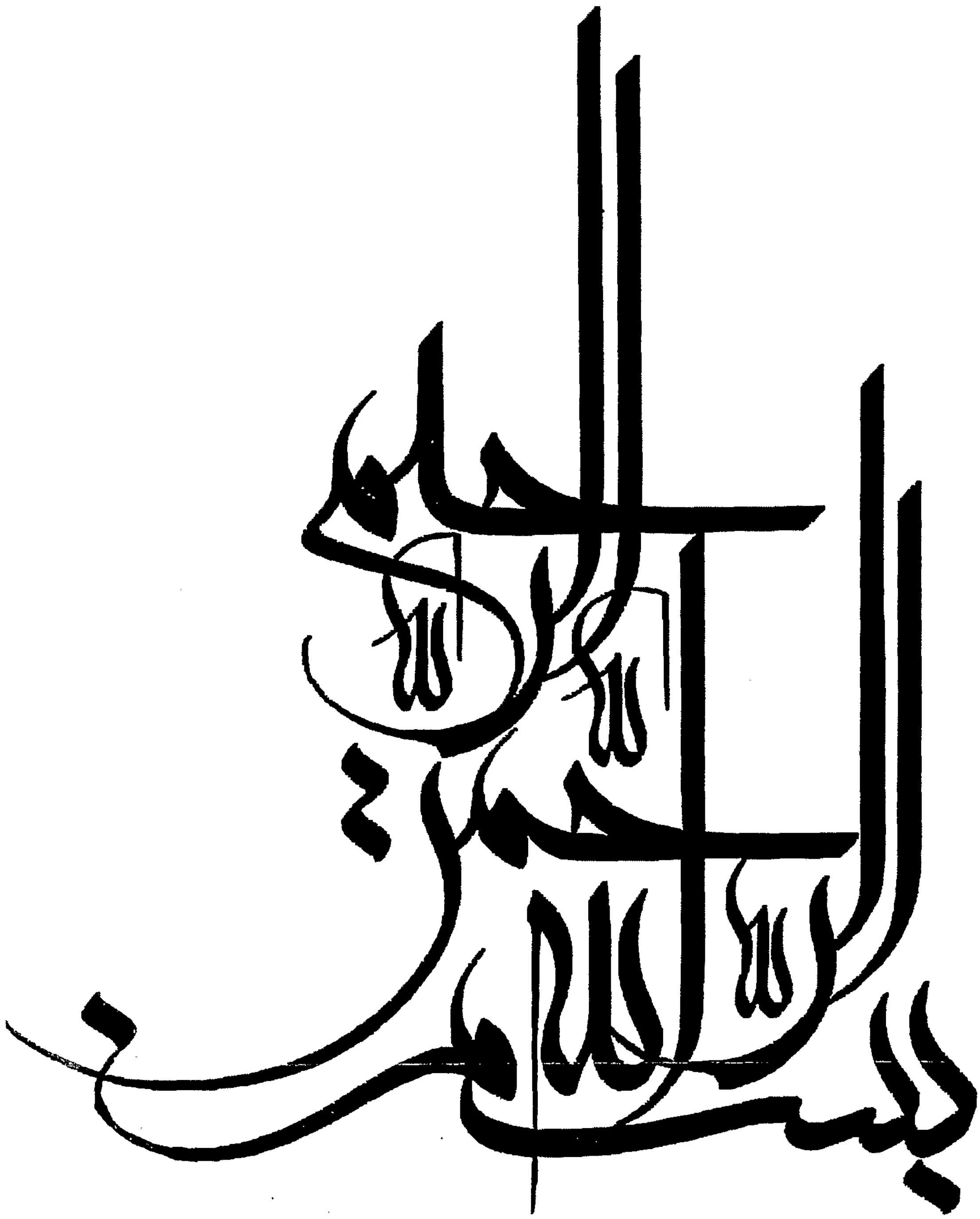

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش جبر

گراف Z_n و تعدادی از گراف های مرتبط با Z_n

استادان راهنما:

دکتر علیرضا عبدالهی

دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی

پژوهشگر:

آزاده رمضانپور ناصری

دی ماه ۱۳۸۷

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم آزاده رمضان پور ناصری

تحت عنوان:

گراف Z_n و تعدادی از گراف های مرتبط با Z_n

در تاریخ ... ۸۷/۱۰/۴ ..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....بسیار خوب.... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکترعلیرضا عبدالهی با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۲- استاد راهنمای پایان نامه دکتر علی اکبر محمدی با مرتبه علمی استاد امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکتر شکرا.. سالاریان با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۴- استاد داور خارج گروه دکتر غلامرضا امیدی با مرتبه علمی استادیار امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

تقدیر و تشکر

الحمدالله الذی تحبب الی و هو غنی عنی

ستایش خدای را که به من اظهار کمال دوستی فرمود با آن که از من بی نیاز بود

الهی اکنون که در پایان یکی دیگر از مراحل علمی زندگیم قرار گرفته ام تو را شکر می گویم که به من آموختی که هیچ نمی دانم و این دانستنم

را مدیون الطاف خفیه ی تو هستم.

بر خود واجب می دانم از زحمات همه ی اساتید ارجمندی که تاکنون از فیض وجودشان بهره برده ام کمال تشکر را داشته باشم

به ویژه

سپاس صمیمانه ام را تقدیم اساتید عزیزیم جناب آقای دکتر علیرضا عبدالهی و جناب آقای دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی را دارم.

اگر چه توانایی ادای دین و جبران زحمات ایشان را نخواهم داشت ولی با کمال خضوع از خداوند متعال برای این بزرگواران توفیق و

سلامتی را خواهانم.

از داور محترم خارج از گروه جناب آقای دکتر امیدی که با نظرات سودمند خویش سعی در هر چه بهتر شدن این پایان نامه داشته اند

تشکر ویژه دارم. همچنین از داور داخلی جناب آقای دکتر سالاریان تشکر می کنم.

همچنین از زحمات سرکار خانم ها گرامی، غازی، فرهمند و معارکه در تدوین این پایان نامه یاری نموده اند سپاسگزارم.

در پایان از همراهی ها و همدلی های خانواده ی بزرگوارم و به خصوص مادر عزیزم بی نهایت تشکر می کنم.

همچنین از همه ی دوستان عزیزم به ویژه خانم ها عاطفه فریدونی و مریم اشراقی و فرشته اشراقی و آقایان دکتر ابراهیم وطن دوست و جاهد نقی پور تشکر و قدردانی می کنم و توفیق همگان را از خداوند متعال خواهانم.

تقدیم به

گرانبهاترین سرمایه های زندگی ام

پدر و مادر عزیزم

چکیده

فرض می کنیم G گرافی ساده باشد. در این پایان نامه به معرفی انواع ماتریس ها و چندجمله ای ویژه گراف پرداخته و در ادامه انواع طیف های گراف و ساختار آنها را معرفی کرده ایم. همچنین اگر G یک گراف و H گرافی هم طیف با آن باشد بررسی کرده ایم که چه موقع گراف های G و H یکریخت اند.

در پایان چگونگی مشخص شدن یک گراف نسبت به طیفش را مورد بررسی قرار داده و گراف هایی که توسط طیف شان مشخص می شوند؟ گراف Z_n و گراف های مرتبط با آن را مورد بررسی قرار داده ایم.

کلیدواژه: طیف گراف، گراف های هم طیف، مقادیر ویژه گراف ، درخت های ستاره ای.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل اول: مفاهیم اولیه

فصل دوم: طیف و چندجمله ای ویژه یک گراف

فصل سوم: چه گراف هایی توسط طیف شان مشخص می شوند؟

پیشگفتار

نظریه طیفی گراف، ابزاری قوی برای تحقیق در ریاضیات و علوم کاربردی دیگر (مانند شیمی) و در زمینه‌های مختلف ترکیبیاتی علی الخصوص ترکیبیات جبری و نظریه‌ی جبری گراف است. همچنین نظریه طیفی گراف زمینه‌ای است در ریاضیات، که از ترکیب مسئلهٔ مقادیر ویژه ماتریس‌ها با مطالعات و پژوهش‌های گراف‌ها و به ویژه ماتریس مجاورت آن‌ها تشکیل می‌یابد. اولین مقاله‌ی تخصصی در زمینه‌ی طیف گراف، توسط کولاتز [۱] و سینوگوویتز [۲]، در سال ۱۹۵۷ منتشر شد [۱۵]. البته قبل از آن در سال ۱۹۳۱ هوکل [۳][۱۵]، از طیف گراف در بررسی نظریه کوانتومی شیمی هیدروکربن‌های بنزوئیدی استفاده کرد. در بین سال‌های ۱۹۵۷—۱۹۳۱، مقالات کمی در مورد تکنیک‌های طیفی گراف که در شیمی و فیزیک مولکولی کاربرد دارد انتشار یافته بود، که اکثراً در زمینه‌ی نظریه ماتریس و گراف‌ها و کاربرد آن‌ها در ریاضی، اقتصاد و هندسه بودند. بعد از سال ۱۹۵۷، مقالات زیادی در مورد طیف گراف انتشار یافته‌است.

در سال ۱۹۵۶ گانترارد [۴] و پریمایز [۵] نظریه‌هایی درباره طیف گراف بیان و ادعا کردند که همه‌ی گراف‌ها به وسیله طیف خودشان تعیین می‌شوند. اما یک سال بعد کولاتز و سینوگوویتز یک زوج درخت هم‌طیف برای رد این نظریه ارائه کردند [۴] و [۷].

[۱] Collatz
[۲] Sinogowitz
[۳] Huckel
[۴] Gunthard
[۵] Primas

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل است که فصل اول آن مربوط به تعاریف و مفاهیم مقدماتی نظریه گراف است. در بخش آخر این فصل انواع ماتریس‌های یک گراف از جمله ماتریس مجاورت [۶]، لاپلاسین [۷] و لاپلاسین بی‌علامت [۸] را تعریف کرده‌ایم[۱۵].

در فصل دوم ابتدا چندجمله‌ای ویژه مجاورت و لاپلاسین یک گراف را تعریف کرده و خواص مربوط به ضرایب آن را بیان نموده‌ایم. در ادامه طیف یک گراف و ساختار آن را مورد بررسی قرار داده‌ایم. در پایان این فصل به بررسی گراف‌های هم‌طیف پرداخته‌ایم [۵]، [۱۱]، [۱۴]، [۱۵].

در فصل سوم به تعریف گراف‌های DS (گراف‌هایی که به وسیله‌ی طیف‌شان مشخص می‌شوند را گراف‌های DS می‌نامیم) پرداخته و در ادامه برخی از گراف‌های DS از جمله گراف Z_n و گراف‌های مرتبط با آن را نسبت به طیف مجاورت و لاپلاسین بررسی کرده‌ایم [۸].

[۶] Adjacency Matrix

[۷] Laplacian Matrix

[۸] Signless Laplacian Matrix

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱—۱ تعاریف مقدماتی و برخی نمادگذاری‌ها در نظریه گراف

در این فصل تعاریف و قضایای اساسی مباحث نظریه‌ی گراف و ماتریس‌ها را می آوریم تا از آن‌ها در فصول بعدی استفاده کنیم.

گراف مجموعه‌ای است متشکل از نقاط و خطوطی که این نقاط را به هم متصل می‌کند. هر نقطه را یک رأس و هر خط را یک یال می‌نامیم. مجموعه رأس‌های گراف G را با $V(G)$ و مجموعه یال‌های آن را با $E(G)$ نشان می‌دهیم. اگر $E(G) = \emptyset$، آنگاه G را

یک گراف تهی می‌نامیم.

اگر $e=\{u,v\}$ یالی از گراف G باشد، آنگاه u و v را دو رأس مجاور G گوییم. به منظور ساده نویسی از نماد uv به جای $\{u,v\}$ برای یال مجاور به دو رأس u و v استفاده می‌کنیم. رأس v را واقع بر یال e گوئیم هرگاه v یکی از دو انتهای e باشد. درجه‌ی رأس v در گراف G تعداد یال‌های مجاور به رأس v در گراف G است، در این مورد از نماد $\deg_G(v)$ و در مواردی که ابهامی ایجاد نشود نماد ساده‌تر $\deg(v)$ را به کار می‌بریم. درجه رأسی با کمترین درجه ممکن در گراف G را با $\delta(G)$ و درجه رأسی با بیشترین درجه ممکن در G را با $\Delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱—۱.۱ گراف $\bar{G}$ را مکمل G گوئیم هرگاه $V(G)=V(\overline{G})$ و هر دو رأس در $\overline{G}$ مجاور هستند اگر و فقط اگر در G مجاور نباشند.

تعریف ۱—۲.۱ یک گراف ساده را که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشد، یک گراف کامل می‌نامیم. گراف کامل با n رأس را به صورت K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱—۳.۱ فرض می‌کنیم $G=(V(G),E(G))$ و $H=(V(H),E(H))$ دو گراف باشند. در این صورت گراف‌های $G\cup H$ و $G\cap H$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$G\cup H=(V(G)\cup V(H),E(G)\cup E(H))$ و $G\cap H=(V(G)\cap V(H),E(G)\cap E(H))$.

گاهی اوقات اجتماع دو گراف را با نماد $G+H$ نمایش می‌دهیم.

اگر $G\cap H=\emptyset$ آنگاه G و H را جدا از هم گوئیم. اگر $V(H)\subseteq V(G)$ و $E(H)\subseteq E(G)$، آنگاه H را یک زیر گرافی از G نامیده و می‌نویسیم $H\subseteq G$. در این صورت G شامل H است. اگر $H\subseteq G$ و H شامل همه‌ی یال‌های $xy\in E(G)$

که $x, y \in V(H)$، آنگاه H را یک زیر گراف القایی G می‌نامیم. هرگاه $H \subseteq G$ و $V(H) = V(G)$، آنگاه H را یک زیر گراف فراگیر [۱] G می‌نامیم.

تعریف ۱—۴.۱ گراف G را $k-$ بخشی، $k \geq ۱$ گوئیم هرگاه $V(G)$ را بتوان به k بخش $V_۱$، $V_۲$، $\cdots$، V_k (بخش‌های گراف) افراز کرد به طوری که هر عضو $E(G)$ رأسی از V_i را به رأسی از V_j، $i \neq j$ متصل کند. در حالت خاص $k = ۲$، گراف را دو بخشی گوئیم. گراف $k-$ بخشی کامل G یک گراف $k-$ بخشی با بخش‌های $V_۱$، $V_۲$، $\cdots$، V_k است، با این خاصیت که اگر $u \in V_i$ و $v \in V_j$، $i \neq j$، آنگاه $uv \in E(G)$.

تعریف ۱—۵.۱ یک گراف جهت‌دار H، عبارت است از یک زوج $(V(H), F(H))$ که در آن $V(H)$، یک مجموعه متناهی ناتهی از رئوس و $F(H)$ خانواده‌ای متناهی از زوج‌های مرتب از اعضای $V(H)$ به نام کمان است. $V(H)$ و $F(H)$ را به ترتیب مجموعه رئوس و خانوادهٔ کمان‌ها می‌نامند.

تعریف ۱—۶.۱ گراف G را همبند گوئیم هرگاه بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد. به عبارت دیگر گراف G را همبند گوئیم هرگاه نتوان آن را به صورت اجتماع مجزای دو گراف در نظر گرفت. در غیر این صورت گراف ناهمبند است. هر گراف ناهمبند را می‌توان به صورت اجتماع تعداد متناهی گراف‌های همبند دو به دو مجزا در نظر گرفت، هر یک از این گراف‌های همبند را یک مؤلفه [۲] (همبند) G می‌نامیم.

---

[۱] Spanning Subgraph

[۲] Component

تعریف ۱—۷.۱ گراف G را منظم گوئیم هرگاه درجه تمام رئوس آن با هم برابر باشد. اگر درجه‌ی هر رأس r باشد، گراف را منظم از درجه‌ی r می‌نامیم.

تعریف ۱—۸.۱ گراف غیر تهی $(V(P), E(P))$ را که $V(P) = \{v_۰, v_۱, ..., v_k\}$ و $E(P) = \{v_۰v_۱, v_۱v_۲, ..., v_{k-۱}v_k\}$، یک مسیر [۳] می‌نامیم. تعداد یال‌های یک مسیر را طول مسیر می‌گوئیم.

اگر $P = v_۰v_۱...v_{k-۱}v_k$ که در آن $k \geq ۳$ یک مسیر باشد، آنگاه $G = P + v_kv_۰$ را یک دور [۴] می‌نامیم.

تعریف ۱—۹.۱ منظور از یک راه به طول k در یک گراف به معنی دنباله‌ای از رئوس $v_۰$، $v_۱$، $\cdots$، v_k است، به طوری که برای هر $i = ۱, ۲, ..., k$، یک یال از رأس v_i به رأس $v_{i-۱}$ وجود داشته باشد و یک راه را بسته گوئیم اگر $v_۰ = v_k$.

لم ۱—۱۰.۱ در یک گراف بدون دور به طول ۴، تعداد راههای بسته به طول ۴ برابر است با ۲ برابر تعداد یال‌های گراف به اضافه ۴ برابر مسیرهای تولید شده به طول ۲.

اثبات . رأس v_i از گراف n رأسی G را در نظر می‌گیریم تعداد راه‌های بسته به طول ۴ از رأس v_i به خودش برابر است با

$$\sum_{i=۱}^{n} \deg v_i = ۲m \qquad (۱)$$

حال سه رأس v_i، v_j و v_k از گراف G را در نظر می‌گیریم به طوری که یال‌های $e_۱$ از رأس v_i به v_j و $e_۲$ از رأس v_j به v_k و $e_۳$ از رأس v_k به v_j و یال $e_۴$ از رأس v_j به v_k را

Path[۳]

Cycle[۴]

داشته باشیم. در این صورت مسیر های تولید شده به طول ۴ از رأس v_i به خودش عبارت است از

$$e_۱, e_۳, e_۲, e_۴$$

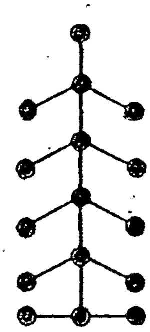
$$e_۴, e_۳, e_۲, e_۱ \qquad (۲)$$

$$e_۱, e_۲, e_۳, e_۴$$

$$e_۴, e_۲, e_۳, e_۱$$

در نتیجه با توجه به حالت‌های (۱) و (۲) تعداد راه‌های بسته به طول ۴ از رأس v_i به خودش برابر است با دو برابر تعداد یال‌های گراف به اضافه ۴ برابر مسیرهای تولید شده به طول ۲. ■

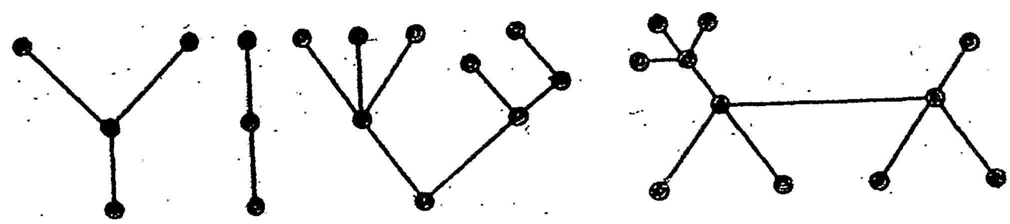
تعریف ۱−۱۱.۱ گراف همبندی که در آن هر دو رأس فقط با یک مسیر به هم وصل می‌شوند را یک درخت[5] می‌نامیم. در واقع درخت به صورت گرافی همبند تعریف می شود که در آن دور وجود ندارد.(شکل ۱−۱ را ببینید)



شکل ۱−۱

Tree[5]

تعریف ۱—۱۲.۱ یک گراف بدون دور را جنگل [۶] می‌نامیم. برای مثال شکل ۱—۲ یک جنگل با چهار مؤلفه را نشان می‌دهد که هر مؤلفه یک درخت است که در آن دور وجود ندارد. (شکل ۱—۲ را ببینید)



شکل ۱—۲

تعریف ۱—۱۳.۱ فرض می‌کنیم G گرافی همبند باشد. یک دور از G (در صورت وجود) را در نظر می‌گیریم و یکی از یال‌های آن را بر می‌داریم. گراف حاصل هنوز همبند است. این روند را با هر یک از دورهای موجود ادامه می‌دهیم تا وقتی که هیچ دوری باقی نماند. گرافی که می‌ماند یک درخت همبند است که شامل تمام رئوس G است و آن را درخت فراگیر G می‌نامند.

به عبارت کلی‌تر، اگر G یک گراف دلخواه باشد که n رأس، m یال و k مؤلفه دارد، می‌توان روند فوق را برای هر یک از مؤلفه‌های آن به کار برد. نتیجه را یک جنگل فراگیر می‌نامند.

تعریف ۱—۱۴.۱ فرض می‌کنیم $G = (V(G), E(G))$ و $H = (V(H), E(H))$ دو

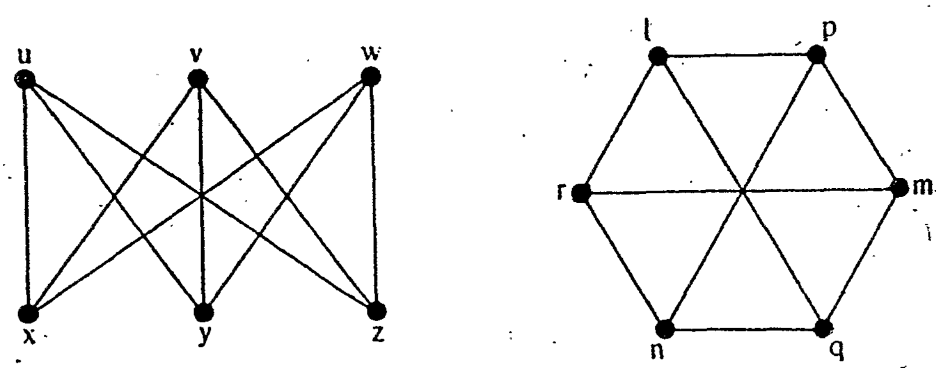
[۶] Forest

گراف باشند. در این صورت G و H را یکریخت[۷] می‌گوئیم و به صورت $G \simeq H$ نمایش می‌دهیم، هرگاه نگاشت دو سویی $\varphi : V(G) \longrightarrow V(H)$ وجود داشته باشد به طوری که برای $x, y \in V(G)$ داشته باشیم، $xy \in E(G)$ اگر و فقط اگر $\varphi(x)\varphi(y) \in E(H)$.

به عبارت دیگر دو گراف G و H را یکریخت گوئیم، هرگاه یک تناظر یک به یک بین رئوس G و H وجود داشته باشد، به طوری که تعداد یال‌هایی که هر دو رأس از G را به هم وصل می‌کند برابر تعداد یال‌هایی باشد که رئوس نظیر در H را به هم وصل می‌کنند. بنابراین گراف‌های نشان داده شده در شکل زیر تحت تناظر

$z \leftrightarrow r, y \leftrightarrow q, x \leftrightarrow p, w \leftrightarrow n, v \leftrightarrow m, u \leftrightarrow l$

یکریخت هستند. (شکل ۱—۳ را ببینید)



شکل ۱—۳

تعریف ۱—۱.۱۵ گراف یالی، $L(G)$[۸]، از گراف ساده G گرافی است که رئوس آن در تناظر یک به یک با یال‌های G باشند. دو رأس از $L(G)$، مجاورند اگر و فقط اگر

Isomorphism[۷]

Edge graph[۸]

یال‌های نظیر در G مجاور باشند.

۱—۲ ماتریس‌های یک گراف

در این بخش ماتریس‌های یک گراف از جمله ماتریس مجاورت، وقوع[۹]، لاپلاسین، لاپلاسین بی‌علامت را تعریف می‌کنیم.

در سرتاسر این پایان نامه G گرافی ساده است مگر این که خلاف آن ذکر شود.

تعریف ۱—۱.۲ G را گرافی ساده در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $V(G) = \{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\}$. در این صورت به گراف G ماتریس $n \times n$، $A(G)$ به نام ماتریس مجاورت (ماتریس اتصال) را نسبت می‌دهیم که درایه ij—ام آن را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

برای گراف‌های بدون جهت

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{دو راس } v_i \text{ و } v_j \text{ مجاور باشند} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برای گراف‌های جهت‌دار

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر کمانی از راس } v_i \text{ به } v_j \text{ وجود داشته باشد} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

[۹] Incidence Matrix

مجموعه‌ی مقادیر ویژه ماتریس $A(G)$ همراه با دفعات تکرارشان را طیف [۱۰] گراف می‌نامیم و با $\mathrm{Spec}(A(G))$ نمایش می‌دهیم. باید توجه داشت که اگر ترتیب دیگری از رئوس گراف را در نظر بگیریم و ماتریس مجاورت $A'(G)$ را تشکیل دهیم، آنگاه ماتریس جایگشتی P وجود دارد به طوری که $A'(G) = PA(G)P^{-۱}$ (به ازای جایگشتی مانند σ متعلق به S_n، داریم $P_{i\sigma(i)} = ۱$ $\quad ۱ \leq i \leq n$، بقیه درایه‌های P صفرند.) بنابراین چون مقادیر ویژه‌ی دو ماتریس متشابه یکی می‌باشند (برای دیدن اثبات این مطلب به [۱۸] مراجعه کنید.) $\mathrm{Spec}(A(G))$ خوش تعریف است.

ماتریس مجاورت یک گراف ساده G ماتریسی متقارن است. از طرفی از جبر خطی می‌دانیم یک ماتریس متقارن قطری شدنی است و تمامی مقادیر ویژه‌اش حقیقی می‌باشند. در نتیجه طیف G متشکل از اعداد حقیقی است و بردارهای ویژه‌ی $A(G)$، n بردار مستقل خطی هستند. برای دیدن اثبات این مطالب می‌توانید به [۱۸] مراجعه کنید.

تعریف ۱—۲.۲ ماتریس مجاورت گراف مکمل را با $\bar{A}$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\bar{A} = J - A - I$$

لم ۱—۳.۲ اگر G یک گراف با ماتریس مجاورت A باشد، آنگاه به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ درایه ij ـ ام ماتریس A^k، تعداد راههای به طول k از رأس v_i به رأس v_j است.

اثبات . به استقرا روی k حکم را ثابت می‌کنیم .

[۱۰] Spectrum