دانشگاه رازی

دانشکده علوم
گروه آمار

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

توسط

محمد حسن خیراندیش

استاد راهنما

دکتر بهاءالدین خالدی

استاد مشاور

بهمن ماه ۱۳۸۹

تقدیم به

ماندگارترین ذات لایتناهی،

او که ذاتش یگانه، مهرش جاودانه و علمش بی کرانه است.

تقدیم به‌پژوهشگران عرصه علم و هنر،

تقدیم به خانواده‌ی عزیزم

و تقدیم به همه‌ی انسان هایی که به شادی دیگران شاد می شوند

و به غم آنان غمگین

قدردانی

مراتب سپاس و قدردانی‌ام را به پیشگاه استاد گرانقدر و فرزانه‌ام آقای دکتر بهاالدین خالدی تقدیم می‌دارم که شخصیت علمی و اخلاقی ایشان همواره برایم الگو بوده است.

همچنین از استاد گرانقدر آقای دکتر عبد الرضا سیاره به‌خاطر نقطه‌نظرات دانشمندانه‌ای که در انجام این پایان‌نامه ایراد نمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از اساتید محترم آقای دکتر جباری و آقای دکتر هاشمی سپاسگزارم که بزرگوارانه زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شده و با دقت عالمانهٔ خود نکات ظریفی را در زیبا شدن این پایان‌نامه بیان داشتند.

از اساتید گرانقدرم آقای دکترهاشمی، آقای دکتر قزوینی، آقای دکتر قریشی و آقای دکترفرج زاده که در دوره کارشناسی ارشد افتخار شاگردی ایشان را داشتم نیز قدردانی می‌نمایم.

صمیمانه ترین سپاسگزاری ها را تقدیم پدر و مادرم می دارم که لحظات زندگی ام لبریز از عطر محبت‌شان است.

همچنین از دوستانی که به هر نحو در انجام این کار مرا یاری رساندند، تشکر می‌کنم.

نسرین حامی گلزار

کرمانشاه، آذر ۱۳۸۸

چکیده

مفهوم آماره های ترتیبی تعمیم یافته، برای یکپارچه نمودن مدل های مختلف آماره های ترتیبی مانند آماره های ترتیبی معمولی، مقادیر رکورد، آماره های ترتیبی سانسوریده‌ی فزاینده‌ی نوع دوم (II) و غیره معرفی شده است. بنابراین قضایایی که برای آماره های ترتیبی تعمیم یافته بیان و اثبات می‌شود، تحت شرایطی برای آماره های ترتیبی که از مدل آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته به دست می آیند، صادق هستند. ابتدا به بیان مفاهیم و تعاریف اساسی مورد نیاز در این پایان نامه پرداخته‌ایم. مقایسه‌های تصادفی میان آماره های ترتیبی معمولی شرطی را بیان کرده ایم که مطالعه‌ی آن با توجه به نقش اساسی آماره های ترتیبی معمولی در قابلیت اعتماد حائز اهمیت است. سپس آخرین مطالعات در باب مقایسه‌های تصادفی تک متغیره و چند متغیره، از دیدگاه ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب تصادفی نرخ خطر و ترتیب تصادفی نسبت درست نمایی میان آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته شرطی در حالت یک نمونه ای و دو نمونه ای تشریح شده اند. در پایان قضایایی جدید در باب مقایسه تصادفی، از دیدگاه ترتیب تصادفی نسبت درست نمایی تک متغیره و چند متغیره، میان توزیع‌های شرطی مقادیرآماره های ترتیبی تعمیم‌یافته بیان و اثبات می شوند.

فهرست مندرجات

نمادها و علائم اختصاری

آماره ترتیبی تعمیم‌یافته r ام در اولین n آماره ترتیبی تعمیم‌یافته با پارامترهای m و k	$X_{(r,n,m,k)}$
آماره‌های ترتیبی در نمونه‌ای به اندازه n	$X_{1:n}, X_{2:n}, \cdots, X_{n:n}$
امید ریاضی	$E(.)$
اندازه احتمال	$P(.)$
برابری در توزیع (هم‌توزیعی)	$\stackrel{d}{=}$
به‌شرط آنکه	$\mid$
به‌طور مستقل و مشابه توزیع شده	iid
بینهایت	∞
تابع بقاء توزیع F	$\bar{F}$
تابع توزیع	F ، G
تابع چگالی احتمال	f ، g
تابع مشخصه مجموعه A	$I_A(.)$
تابع معکوس تابع توزیع F	F^{-1}
تابع نرخ شکست توزیع F	$\lambda_F(.)$
تابع نرخ شکست معکوس توزیع F	$\tilde{\lambda}_F(.)$
توزیع شدن	$\sim$
صعودی بودن (برای توابع)	$\uparrow$
صعودی بودن در مفهوم ترتیب تصادفی معمولی	$\uparrow_{st}$
سور عمومی	$\forall$
سور وجودی	$\exists$
عضویت مجموعه‌ای	$\in$

عملگر مجموعه‌ای سوپریمم .... Sup

عملگر مجموعه‌ای ماکسیمم .... Max

عملگر مجموعه‌ای می‌نیمم .... Min

کوچکتری در ترتیب تصادفی معمولی .... $\leq_{st}$

کوچکتری در ترتیب نرخ شکست .... $\leq_{hr}$

کوچکتری در ترتیب نرخ شکست معکوس .... $\leq_{rh}$

کوچکتری در ترتیب نسبت درستنمایی .... $\leq_{lr}$

ماکزیمم x و y .... $x \vee y$

متغیر تصادفی هم‌توزیع با $[X_i - t | X_i > t]$ .... X_i^t

متناسب است با .... $\propto$

مجموعه اعداد حقیقی .... $\Re$

مجموعه اعداد حقیقی مثبت .... $\Re_+$

مجموعه اعداد حقیقی n بعدی .... $\Re^n$

مجموعهٔ اعداد حقیقی n بعدی مثبت .... $\Re_+^n$

مجموعه اعداد طبیعی $\{۱,۲,\ldots\}$ .... N

مقدار رکورد n ام (دنباله $\{X_i\}_{i=۱}^{\infty}$) .... $R_n\,(R_n^X)$

مینیمم مقدار x و y .... $x \wedge y$

نزولی بودن (برای توابع) .... $\downarrow$

نقطه انتهایی چپ تکیه‌گاه X .... l_X

نقطه انتهایی راست تکیه‌گاه X .... u_X

نمونه تصادفی به اندازهٔ n .... $X_۱, X_۲, \cdots, X_n$

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱—۱ مقدمه

در این فصل تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در این پایان‌نامه را بیان می‌کنیم. در بخش‌های ۱—۲ و ۱—۳ به ترتیب مرور مختصری بر آماره‌های مرتب و سیستم‌ها خواهیم داشت. سپس برخی از توابع مهم در تئوری قابلیت اعتماد را بیان می‌کنیم و ترتیب‌های تصادفی مورد نیاز و روابط میان آنها را در بخش ۱—۵ معرفی خواهیم کرد. در پایان تعدادی از خانواده‌های توزیع‌های مهم در نظریه‌ی طول عمر را ذکر می‌کنیم.

۱—۲ آماره‌های مرتب معمولی

آماره‌های مرتب معمولی یا همان آماره‌های مرتب نقش بسیار مهمی را در اکثر شاخه‌های آماری اعم از استنباط آماری پارامتری و ناپارامتری و قابلیت اعتماد، ایفا می‌کند. به طور مثال بردار آماره‌های مرتب همواره یک آماره‌ی بسنده برای پارامتر تحت مطالعه در یک خانواده از توابع چگالی است یا در قابلیت اعتماد، در بررسی طول عمر سیستم های $k-$ از$-n$، طول عمر سیستم با طول عمر $(n-k+۱)$ امین آماره‌ی مرتب تعیین می‌شود. برای $n \geq ۱$ فرض کنید $X_{i:n}$، نشان‌دهنده‌ی i امین آماره مرتب از نمونه‌ی تصادفی $X_۱$،$X_۲$،$\cdots$،X_n از توزیع پیوسته F(با تابع چگالی f) باشد. توزیع توأم و حاشیه‌ای این متغیرها به ترتیب برابر است با:

$$f_{(X_{۱:n},X_{۲:n},\cdots,X_{n:n})}(x_۱,x_۲,\cdots,x_n)=n!\left(\prod_{i=۱}^{n}f(x_i)\right)$$
$$f_{(X_{i:n})}(x_i)=\frac{n!}{(i-۱)!(n-i)!}[F(x_i)]^{i-۱}[۱-F(x_i)]^{n-i}f(x_i)$$

خواننده برای جزئیات کامل‌تر می‌تواند به آرنولد[1] و همکاران (۱۹۹۲)، کمپس[2] (۱۹۹۵)، دیوید[3] (۱۹۸۱)، دیوید و ناگاراجا[4] (۲۰۰۳) مراجعه نماید. در فصل سوم نیز نوع دیگری از آماره‌های مرتب تحت عنوان آماره‌های مرتب دنباله‌ای را معرفی می‌کنیم. این آماره‌ها توصیف‌کننده‌ی طول عمر مؤلفه‌های سالم بر جای مانده از یک سیستم $n - k + 1$ از n از کار افتاده است که در آن شکست هر مؤلفه بر روی توزیع عمر مؤلفه‌های بر جای مانده تاثیرگذار است. مبحث سیستم‌ها و طول عمر آنها و باقی‌مانده‌ی عمر مولفه‌های بر جای مانده از یک سیستم از کار افتاده، از مباحث اصلی این پایان‌نامه می‌باشد، در ادامه مطالبی از سیستم‌ها و برخی از توابع مهم در قابلیت اعتماد را توضیح می‌دهیم.

۱—۳ مروری بر سیستم‌ها

موتور یک هواپیما یا اتومبیل، انواع وسایل الکتریکی مانند اتو، لباسشویی، انواع لامپ‌ها، یک قطعه الکترونیکی مانند IC و غیره، همه مثال‌هایی از یک سیستم هستند. از اهداف اصلی بررسی طول عمر سیستم‌ها، ارتقا و بهبود وضعیت سیستم است. در اغلب اوقات سیستم‌ها دارای یک ساختار چند جزئی هستند، یعنی آن‌ها از چند جزء ساده‌تر تشکیل شده‌اند. به هر کدام از اجزاء ساده‌ی یک سیستم، مؤلفه می‌گوییم. طول عمر یک سیستم به طور مستقیم با آماره‌های مرتب حاصل از طول عمر مؤلفه‌هایش ارتباط دارد. شاخه‌ای از علم آمار که به بررسی زمان کارکرد انواع سیستم‌ها و چگونگی بهبود آن‌ها می‌پردازد، قابلیت اعتماد نام دارد. به منظور بررسی طول عمر یا زمان از کار افتادگی سیستم، بررسی طول عمر یا زمان از کار افتادگی مؤلفه‌هایی که سیستم از آن‌ها تشکیل شده‌است، مهم است.

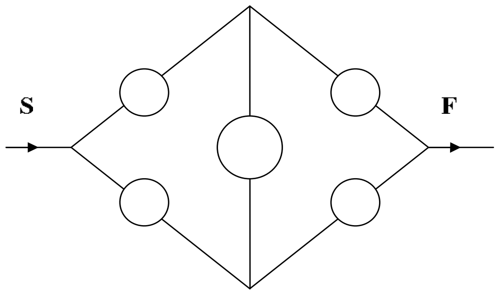
زمان از کار افتادگی سیستم‌ها به ساختاری که مؤلفه‌ها در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند، بستگی دارد. سیستم سری، موازی، سری—موازی، ساختار پل و از همه مهم‌تر سیستم‌های k— از —n از مهم‌ترین ساختار سیستم‌ها هستند. سیستم سری به سیستمی گویند که کار می‌کند اگر و تنها اگر همه‌ی مؤلفه‌های آن کار کنند و سیستم موازی، سیستمی است که به شرط کارکرد حداقل یکی از مؤلفه‌هایش کار می‌کند. برخی از سیستم‌ها دارای ساختاری هستند که نمی‌توان آن‌ها را به صورت ترکیبی از زیرساختارهای سری و موازی نشان داد. ساختار "پل" که ساده‌ترین حالت آن در شکل زیر نشان داده شده است، از جمله‌ی این ساختارهاست.

---
۱ Arnold

۲ Kamps

۳ David

۴ Nagaraja

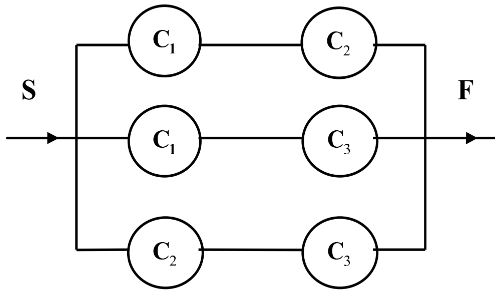


شکل ۱.۳.۱: ساختار (سیستم) پل

برای اطلاعات بیشتر در این زمینه و آشنایی بیشتر با ساختارهای مختلف سیستم‌ها می‌توان به بارلو[۵] و پروشان [۶] (۱۹۸۱) رجوع کرد. در این پایان‌نامه تنها به مطالعه‌ی سیستم‌های $n-k+1$—از—n و خواص عمر مؤلفه‌های بر جای مانده‌ی چنین سیستم‌هایی می‌پردازیم.

سیستم $n-k+1$—از—n

سیستمی شامل n مؤلفه، که تا زمان کار کردن حداقل $n-k+1$ تا از مؤلفه‌هایش کار می‌کند، سیستم $n-k+1$—از—n نامیده می‌شود. به بیان دیگر این سیستم تا زمانی که کمتر از k مولفه خراب باشد، همچنان در حال کار کردن است و به محض از کار افتادن k امین مؤلفه، این سیستم دیگر کار نخواهد کرد. شکل ۲.۲.۱ ساختار یک سیستم ۲—از—۳ را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۳.۱: ساختار (سیستم) ۲—از—۳

به عنوان حالات خاص از سیستم‌های $n-k+1$—از—n، می‌توان به سیستم‌های سری و موازی اشاره کرد. در واقع سیستم موازی، یک سیستم ۱ از n است که تا زمان کار حداقل یک مؤلفه به کار خود ادامه می‌دهد و سیستم سری یک سیستم n از n است که تا زمانی کار می‌کند که تمام مؤلفه‌هایش سالم باشند.

بعد از این که یک سیستم $n-k+1$—از—n، از کار افتاد، هنوز $n-k$ مؤلفه‌ی سالم ولی مستهلک بر جای می‌ماند. سوالی که در ذهن مجسم می‌شود این است که آیا استفاده‌ی مجدد از این مؤلفه‌ها به

[۵] Barlow

[۶] Proschan

صرفه است؟ برای پاسخ به این سوال که در فصل‌های بعدی آورده شده است، لازم است بعضی از تعاریف مورد نیاز را در این جا بیان کنیم. در بخش‌های بعدی این فصل تعاریف و مفاهیم مورد نیاز را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

۱—۴ توابع مهم در قابلیت اعتماد

برای بررسی خصوصیات متغیرهای تصادفی برخی از توابع تعریف شده بر روی متغیرهای تصادفی را مطالعه می‌کنیم. توابعی از قبیل تابع مولد گشتاور، تابع بقا، تبدیل لاپلاس، توابع نرخ خطر و نرخ خطر معکوس و تابع میانگین باقی‌مانده‌ی عمر، از جمله توابع مهمی هستند که بسیاری از خصوصیات متغیرهای تصادفی را، مخصوصا زمانی که نشان‌دهنده‌ی عمر یک وسیله باشند، بیان می‌کنند. بنابراین برای شناخت بیشتر خصوصیات توزیع‌ها (در این جا توزیع طول عمر مؤلفه‌ها) بررسی این توابع که هر کدام توصیف‌کننده‌ی خصوصیتی از توزیع‌ها است، بسیار مفید خواهد بود. به عنوان اولین تابع، تابع میانگین یاقی‌مانده‌ی عمر را که نقش اساسی در نظریه‌ی قابلیت و طول عمر دارد، معرفی می‌کنیم.

۱—۴—۱ تابع میانگین باقی‌مانده‌ی عمر

متغیر تصادفی X با تابع توزیع F و تابع چگالی f را در نظر بگیرید. فرض کنید این متغیر توصیف‌کننده‌ی طول عمر یک وسیله باشد، در این صورت احتمال این که این وسیله بیشتر از زمان t عمر کند برابر است با:

$$\bar{F}_X(t) = P(X > t)$$

تابع $\bar{F}$ که در قابلیت و نظریه‌ی عمر کاربرد فراوانی دارد، به تابع بقا معروف است. حال فرض کنید که بدانیم این وسیله تا زمان t عمر کرده باشد (یعنی بدانیم طول عمر وسیله بزرگتر از t است)، در این صورت متغیر تصادفی $X_t = [X - t | X > t]$ را متغیر تصادفی باقی‌مانده‌ی عمر وسیله در زمان t می‌نامیم و تابع توزیع باقی‌مانده‌ی عمر بعد از زمان t را با F_t نشان می‌دهیم که برابر است با:

$$F_t(x) = P(X_t \leq x) = P(X \leq x + t | X > t) = \frac{F(t+x) - F(t)}{\bar{F}(t)}$$

در عمل این توزیع به دلیل بررسی باقی‌مانده‌ی عمر مؤلفه‌های کهنه (مثلا یک ماشین کهنه) دارای اهمیت فراوانی است. حال با در نظر گرفتن مفهوم باقی‌مانده‌ی عمر که در بالا توضیح داده شد، یکی از توابع مهم در بررسی طول عمر و نظریه‌ی بقا را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ مقدار میانگین متغیر تصادفی X_t را تابع میانگین باقی‌مانده‌ی عمر(تابع MRL) می‌گوییم. این تابع را که به زمان t بستگی دارد با $\psi_{F}(t)$ نشان می‌دهیم (اندیس F، توزیع مربوط به طول عمر وسیله‌ی مورد مطالعه است)، بنابراین

$$\psi_{F}(t) = E(X_t) = \int_{0}^{\infty} \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)} dx$$

جهت مطالعه‌ی بیشتر راجع به تابع MRL و کاربردهای آن می‌توان به کریشنان[۷] و رائو[۸] (۱۹۸۸) مراجعه کرد.

۱—۴—۲ توابع خطر و نرخ خطر

متغیر تصادفی X با تابع توزیع F را در نظر بگیرید. تابع خطر(تابع خطر کل) توزیع F به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(x) = -Log(\bar{F}(x))$$

با استفاده از رابطه‌ی بالا می‌توان تابع بقای متغیر تصادفی X را از روی تابع خطر آن محاسبه کرد:

$$\bar{F}(x) = Exp\,(-R(x))$$

در صورتی که توزیع X، مطلقا پیوسته و دارای تابع چگالی f باشد، می‌توان تابع نرخ خطر متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف کرد:

$$r_{F}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x | X > x)}{\Delta x}$$

بنابراین

$$r_{F}(x)\Delta x \simeq P(x < X < x + \Delta x | X > x)$$

یعنی $r_{F}(x)\Delta x$ تقریبا برابر احتمال این پیشامد است که مؤلفه‌ای با توزیع F در فاصله‌ی زمانی $(x, x+\Delta x]$ خراب شود، به شرط این که بدانیم این مؤلفه تا زمان x مشغول به کار بوده است. به وضوح هر چه مقدار نرخ خطر بزرگتر باشد می‌توان نتیجه گرفت که باقی‌مانده‌ی عمر آن مؤلفه به طور تصادفی کوچکتر است. این تفسیر از تابع نرخ خطر برای طول عمر یک مؤلفه، گویای اهمیت این تابع در مباحث

[۷] Krishnan

[۸] Rao

قابلیت اعتماد است. در صورتی که متغیر تصادفی X را به عنوان طول عمر یک وسیله در نظر بگیریم که دارای توزیع F و تابع چگالی f است، تابع نرخ خطر را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$r_{_F}(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} \ , \qquad \forall x : \bar{F}(x) > ۰$$

در این صورت

$$r(x) = \frac{\partial}{\partial x} R(x)$$

$$\bar{F}(x) = Exp\,(-\int_{۰}^{\infty} r(t)dt)$$

در روشی مشابه، تابع نرخ خطر متغیر تصادفی گسسته‌ی X که مقدار j را با احتمال p_j می‌پذیرد، در نقطه‌ی k برابر است با:

$$r(k) = \frac{p_{_k}}{\Sigma_{j=k}^{\infty} p_j}$$

برای آشنایی بیشتر با توابع خطر و نرخ خطر می‌توان به کتاب بارلو و پروشان مراجعه کرد.

۱–۴–۳ توابع خطر و نرخ خطر معکوس

برای متغیر تصادفی X با تابع توزیع F، تابع خطر معکوس (S) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(x) = Log(F(x))$$

در روشی مشابه با تابع نرخ خطر، اگر X، متغیر تصافی کاملا پیوسته با تابع چگالی f باشد، تابع نرخ خطر معکوس X، برابر است با:

$$s_{_F}(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{P(x - \Delta x < X < x | X < x)}{\Delta x}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$s_{_F}(x)\Delta x \simeq P(x - \Delta x < X < x | X < x)$$

یعنی احتمال این پیشامد که مؤلفه‌ای با توزیع F در فاصله‌ی زمانی $(x - \Delta x, x]$ از کار افتاده باشد، به شرط دانستن این موضوع که مؤلفه حداکثر تا زمان x فعال بوده است تقریبا برابر است با:

$$s_{_F}(x)\Delta x$$

بنابراین اگر توزیع F، توزیع عمر یک وسیله باشد، می‌توان گفت که هر چه مقدار تابع نرخ خطر معکوس در نقطه‌ی x بزرگتر باشد بدان معنی است که احتمال بقای آن تا زمان x بیشتر است (به شرط این که بدانیم حداکثر تا زمان x عمر کرده است). در صورتی که متغیر تصادفی X دارای توزیع کاملا پیوسته با تابع چگالی f باشد، نتیجه می‌شود:

$$s_F(x) = \frac{f(x)}{F(x)} \ , \qquad \forall x : F(x) > \circ$$

در این حالت $s_F(x) = \frac{\partial}{\partial x} S_F(x)$ و رابطه‌ی تابع توزیع و تابع نرخ خطر معکوس به صورت زیر است:

$$F(x) = Exp\,(\int_{\circ}^{\infty} s_F(t)dt)$$

به طور مشابه برای متغیر تصادفی گسسته‌ی X که مقدار j را با احتمال p_j می‌پذیرد، تابع نرخ خطر معکوس در نقطه‌ی k، برابر است با:

$$s(k) = \frac{p_k}{\Sigma_{j=-\infty}^{k} p_j}$$

در بیشتر موارد توابع نرخ خطر و نرخ خطر معکوس برای متغیرهای تصادفی نامنفی که طول عمر یک وسیله را توصیف می‌کنند، به کار گرفته می‌شود. با توجه به تعریف توابع نرخ خطر و نرخ خطر معکوس به وضوح مشاهده می‌شود که میان توابع نرخ خطر و نرخ خطر معکوس روابط زیر برقرار است:

$$s_F(x) \uparrow \Rightarrow r_F(x) \uparrow$$

$$r_F(x) \downarrow \Rightarrow s_F(x) \downarrow$$

پس از معرفی تعدادی از توابع مهم در قابلیت اعتماد، در بخش بعدی به معرفی ترتیب‌های تصادفی می‌پردازیم که با استفاده از آن می‌توانیم به مقایسه‌ی متغیرهای تصادفی بپردازیم.

۱−۵ ترتیب‌های تصادفی

خصوصیات توزیع‌های متغیرهای تصادفی مانند مقادیر مرکزی، پراکندگی، چولگی و ... از گذشته‌های دور برای اهداف توصیفی توزیع‌ها به کار گرفته می‌شد. به عنوان مثال انحراف معیار، شاخصی برای اندازه‌گیری پراکندگی توزیع‌ها است، بنابراین می‌توان برای مقایسه‌ی پراکندگی دو توزیع، انحراف‌معیار دو توزیع را مقایسه کرد. روش دیگر این است که متغیرهای تصادفی را به صورت احتمالی مقایسه کنیم. رفتار تصادفی متغیرهای تصادفی معمولا به وسیله‌ی توابع توزیع، بقا، چگالی، مولد گشتاور،

تبدیل لاپلاس، نرخ خطر، نرخ خطر معکوس و ... توصیف می‌شود. بنابراین برای مقایسه‌ی متغیرهای تصادفی می‌توان هر یک از توابع مذکور از متغیرهای تصادفی را با هم مقایسه کنیم. این روش از مقایسه‌ی متغیرهای تصادفی، به ترتیب‌های تصادفی میان متغیرهای تصادفی و یا به طور معادل میان توزیع‌ها معروف است. مفیدترین ترتیب تصادفی ترتیبی است که مقایسه‌ی احتمالی کاملتری را میان دو متغیر تصادفی انجام دهد. برای مثال زمانی که می‌نویسیم $F \le G$، این اطلاع را داریم که توزیع F خصوصیتی را به اندازه‌ی کمتری از توزیع G دارا می‌باشد. ترتیب‌های تصادفی نقش مهمی را در کران‌سازی و تقریب‌زنی مناسب در برخی مشخصه‌های طول عمر دارد. با اثبات وجود ترتیب تصادفی خاص میان مدل‌های ساده و مدل مورد مطالعه، می‌توان کران یا تقریب مناسبی برای مشخصه‌هایی مانند تابع MRL، تابع نرخ خطر و غیره از طول عمر وسیله‌ی مورد مطالعه به دست آورد. این روش برای اولین بار توسط من‌ویتنی[۹] در سال ۱۹۴۷ معرفی شد. همچنین مفهوم مرتب کردن توزیع‌ها، به طور متمرکز توسط لهمن[۱۰] در سال ۱۹۵۵ مطرح شد. برای مفهوم ترتیب تصادفی که به مقایسه‌ی بعضی از خواص توزیع‌ها می‌پردازد، خصوصیات بیشتری در نظر گرفته شده است، معمولا یک ترتیب تصادفی یک اندازه‌ای (شاخصی) مانند m را برای اندازه‌گیری خصوصیت خاصی از توزیع‌ها معرفی می‌کند، به طوری که ترتیب $F \le G$ به این معنا است که $m(F) \le m(G)$. علاوه بر این معمولا عملگر دوگانه‌ی $\le$ که بر روی مجموعه‌ی ناتهی χ تعریف می‌شود، به عنوان ترتیب تصادفی در نظر گرفته می‌شود اگر خواص زیر را داشته باشد:

۱) $X \le X \qquad \forall X \in \chi$

۲) $X \le Y, Y \le Z \Rightarrow X \le Z \qquad \forall X, Y, Z \in \chi$

در صورتی که این عملگر دارای خاصیت تقارنی نیز باشد به آن یک ترتیب جزئی می‌گوییم. این نکته را در این جا یادآوری می‌کنیم که بر خلاف مقایسه‌های عددی، برای ترتیب‌های تصادفی‌ای که معرفی می‌شود لازم نیست حتما یکی از روابط $F \le G$ یا $G \le F$ برقرار باشد. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد ترتیب‌های تصادفی می‌توان به کتاب‌های شیکد[۱۱] و شانتیکومار[۱۲] (۱۹۹۴،۲۰۰۷)،

۹ Manwitny

۱۰ Lehman

۱۱ Shaked

۱۲ Shantikumar

سزکلی [۱۳] (۱۹۹۵)، مولر [۱۴] و استویان [۱۵] (۲۰۰۲) و مارشال [۱۶] و اولکین [۱۷] (۲۰۰۷) مراجعه کرد.
با توجه به مطالبی که در بالا گفته شد، می‌توان ترتیب‌های تصادفی را بر اساس خصوصیتی که بررسی می‌کنند(مقادیر مرکزی، پراکندگی و یا جنبه‌های گوناگونی از شکل توزیع) به گروه‌های مختلفی دسته‌بندی کرد. برای مثال ترتیب‌های تصادفی ساده، نرخ خطر و نرخ خطر معکوس، شکل توزیع و ترتیب‌های پراکندگی، محدب و مجوریزیشن، پراکندگی توزیع را بررسی می‌کنند. در ادامه ترتیب‌های تصادفی مورد بررسی در این پایان‌نامه را معرفی خواهیم کرد.

۱—۵—۱ ترتیب تصادفی ساده

تعریف ۲.۱ متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب با توابع توزیع F و G را در نظر بگیرید. گوییم متغیر تصادفی X در ترتیب تصادفی ساده از متغیر تصادفی Y کوچکتر است($X \leq_{st} Y$) اگر داشته باشیم:

$$\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t) \qquad \forall t \in \Re$$

که در آن $\bar{F}$ و $\bar{G}$ به ترتیب توابع بقای متغیرهای تصادفی X و Y هستند.

با توجه به تعریف بالا اگر $X \leq_{st} Y$، نتیجه می‌شود که متغیر تصادفی X مقادیر بزرگتر را با احتمال کمتری نسبت به متغیر تصادفی Y می‌پذیرد. به عبارت دیگر اگر $X \leq_{st} Y$، آنگاه نتیجه می‌شود که Y با احتمال بیشتری نسبت به X مقادیر بزرگتر را اختیار می‌کند. در صورتی که متغیرهای تصادفی X و Y توصیف‌کننده‌ی طول عمر دو وسیله باشند، می‌توان گفت که وسیله‌ی دوم (متناظر با متغیر تصادفی Y) از نظر احتمالی طول عمر بیشتری دارد. در قضیه‌ی زیر یک شرط معادل برای ترتیب تصادفی ساده میان متغیرهای تصادفی X و Y را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۱ گزاره‌های زیر معادل هستند.

الف) $X \leq_{st} Y$

ب) به ازاء هر تابع نانزولی f که مقادیر $E[f(X)]$ و $E[f(Y)]$ موجود باشد، رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$E[f(X)] \leq E[f(Y)]$$

---

۱۳ Szekli

۱۴ Muller

۱۵ Stoyan

۱۶ Marshall

۱۷ Olkin

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم رابطه‌ی (الف) برقرار باشد و f تابعی نانزولی باشد. با توجه به تعریف ترتیب تصادفی ساده، اگر $X \leq_{st} Y$ باشد نتیجه می‌شود که $X \leq_{a.s} Y$ بنابراین چون f نانزولی است، نتیجه می‌شود:

$$f(X) \leq_{a.s} f(Y)$$

در نتیجه

$$E[f(X)] \leq E[f(Y)]$$

بالعکس فرض کنید که به ازاء هر تابع نانزولی f، که امید ریاضی‌های مذکور در فرض (ب) موجود باشند، رابطه‌ی $E[f(X)] \leq E[f(Y)]$ برقرار باشد. چون تابع $I_{(t,\infty)}(x)$ به ازاء هر مقدار t در x نانزولی است، نتیجه می‌شود:

$$P(X > t) = E[I_{(t,\infty)}(X)] \leq E[I_{(t,\infty)}(Y)] = P(Y > t) \qquad \forall t \in \Re$$

در نتیجه $X \leq_{st} Y$. □

در قضیه‌ی بعدی نشان می‌دهیم که ترتیب تصادفی ساده میان متغیرهای تصادفی تحت توابع نانزولی حفظ می‌شود.

قضیه ۲.۱ فرض کنید $X_۱$،...،X_n و $Y_۱$،...،Y_n متغیرهای تصادفی مستقلی باشند، به طوری که

$$X_i \leq_{st} Y_i \ , \qquad i = ۱, ..., n$$

همچنین فرض کنید که تابع $\psi : \Re^n \to \Re$ یک تابع نانزولی (تابعی که بر روی هر مؤلفه‌ی خود نانزولی است) باشد. آنگاه

$$\psi(X_۱, ..., X_n) \leq_{st} \psi(Y_۱, ..., Y_n)$$

برهان.

طبق قضیه‌ی قبل برای اثبات کافی است نشان دهیم که به ازاء هر تابع نانزولی f، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$E[f(\psi(X_۱, ..., X_n))] \leq E[f(\psi(Y_۱, ..., Y_n))]$$

اثبات را با کمک استقراء انجام می‌دهیم.

به ازاء مقدار $n = ۱$، چون ترکیب دو تابع نانزولی ψ و f خود یک تابع نانزولی است، از قضیه‌ی قبلی نتیجه می‌شود که:

$$E[f(\psi(X_۱))] \leq E[f(\psi(Y_۱))]$$

حال فرض کنید رابطه‌ی مورد نظر برای $k = n - ۱$ برقرار باشد، یعنی داشته باشیم:

$$E[f(\psi(X_۱, ..., X_{n-۱}))] \leq E[f(\psi(Y_۱, ..., Y_{n-۱}))]$$

نشان می‌دهیم که‌این رابطه برای $k = n$ نیز برقرار است. توابع $g(x)$ و $h(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = E[f(\psi(X_۱, ..., X_{n-۱}, x))] \qquad , \qquad h(x) = E[f(\psi(Y_۱, ..., Y_{n-۱}, x))]$$

به وضوح توابع g و h هر دو نانزولی هستند. با در نظر گرفتن فرض استقراء و این موضوع که تابع ψ صعودی است نتیجه می‌شود:

$$g(x) \leq h(x) \ , \qquad \forall x$$

از طرفی چون $X_n \leq_{st} Y_n$، نتیجه می‌شود:

$$E[f(\psi(X_۱, ..., X_n))] = E[g(X_n)] \leq E[h(X_n)] \leq E[h(Y_n)] = E[f(\psi(Y_۱, ..., Y_n))]$$

در نتیجه

$$\psi(X_۱, ..., X_n) \leq_{st} \psi(Y_۱, ..., Y_n)$$

□

نتیجه ۱—۱.۵ اگر $X_{۱:n}$،...،$X_{n:n}$ و $Y_{۱:n}$،...،$Y_{n:n}$ به ترتیب آماره‌های مرتب متناظر با متغیرهای تصادفی $X_۱$،...،X_n و $Y_۱$،...،Y_n باشند، آنگاه

$$X_{i:n} \leq_{st} Y_{i:n} \ , \qquad i = ۱, ..., n$$

در ادامه لمی بیان می‌شود که در اثبات قضایای مطرح شده در فصل دوم کاربرد فراوانی دارد.