دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده‌ی علوم

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

ریاضی محض — آنالیز

موضوع:

قضیه نقطه ثابت برای نگاشت‌های زامفیرسکیوی ضعیف

نگارش:

رقیه شوقی آبکنار

استاد راهنما:

دکتر سید هاشم پروانه‌مسیحا

استاد مشاور:

دکتر کوروش نوروزی

مهر ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا فضای نقطه ثابت برای نگاشت‌های زامفیرسکیو معرفی و با قضایای نقطه ثابت باناخ، کانان و چاتِریا مقایسه می‌شود. سپس ایده‌ی داگانجی و گراناس برای توسیع نگاشت‌های انقباضی را در نظر گرفته و نگاشت‌های زامفیرسکیوی ضعیف تعریف می‌شوند. در پایان، روش پیوستار را روی نگاشت‌های زامفیرسکیوی ضعیف بررسی کرده و یک نتیجه‌ی هم‌مکانی بیان می‌شود.

کلمات کلیدی: نقطه‌ی ثابت؛ نگاشت زامفیرسکیو؛ نگاشت انقباضی ضعیف؛ روش پیوستار؛ هم‌مکانی.

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

پیشرفت بیشتر علوم بدون شک مدیون گسترش دانش ریاضی است. از ویژگی‌های ریاضیات در قرن بیستم توسعه و تعمیم مفاهیم و قضایای مربوط به فضاها و مجموعه‌های ملموس است. در واقع تعمیم در ریاضیات یکی از مسائلی است که چه در گذشته و چه در حال توجه ریاضیدانان را به خود جلب کرده است. چه بسا نتایجی مهم در ریاضیات که از تعمیم مسائل ساده به دست آمده است. برای مثال، ریاضیدانان به مطالعه خواص گروه جمعی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ اکتفا نکرده و به بررسی گروه‌های متناهی و نامتناهی پرداختند که هم اکنون در شاخه‌های مختلف علوم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اصل انقباضی باناخ [۱] یکی از ساده‌ترین و پر کاربردترین نتایج اولیه در نظریه نقطه ثابت است که در سال ۱۹۲۲ توسط استفان باناخ برای کلاس نگاشت‌های انقباضی ارائه شد[۵]. در سال ۱۹۷۲، زامفیرسکیو[۲] تعمیمی از این قضیه ارائه داد که توسیعی از قضایای نقطه ثابت مطرح شده توسط کانان [۳] و چاتِریا [۴] نیز می‌باشد[۱۷]. از طرفی داگانجی[۵] و گراناس[۶] در سال ۱۹۷۸ روشی ارائه دادند که در آن کلاس نگاشت‌های انقباضی به کلاس نگاشت‌های انقباضی ضعیف توسیع یافت[۱۱]. به این ترتیب آریزا [۷] وجود نقطه ثابت را ابتدا در سال ۲۰۱۰ برای نگاشت‌های کانان ضعیف و سپس در سال

[۱] Banach
[۲] Zamfirescu
[۳] Kannan
[۴] Chaterjia
[۵] Dugundji
[۶] Granas
[۷] Ariza

۲۰۱۱ برای نگاشت‌های زامفیرسکیوی ضعیف اثبات نمود [۳]، [۴]. وی همچنین در مقالات خود به بررسی خاصیت هم مکانی روی این کلاس از نگاشت‌ها پرداخت که برای اولین بار در سال ۱۹۹۴ توسط گراناس برای نگاشت‌های انقباضی مطرح شده بود[۱۰]. البته پس از گراناس، فریگون[۸] برای نگاشت‌های انقباضی ضعیف[۹] و آگاروال [۹] برای کلاس خاصی از نگاشت‌های شبه انقباضی [۱] این ویژگی را مورد بررسی قرار داده‌اند.

در این پایان نامه که مطالب اصلی آن از [۳]، [۴]، [۹]، [۱۱]، [۱۲] و [۱۷] استخراج شده است، به گردآوری و مرتب نمودن این قضایا و ارائه‌ی مثال‌هایی برای آن‌ها پرداخته‌ایم.

قابل ذکر است، شماره‌هایی که در مقابل تعاریف، قضایا و ... و همچنین در متن پایان‌نامه داخل قلاب آورده شده‌اند، شماره‌ی مراجعی هستند که کل یا قسمتی از این مطالب از آن‌ها برداشت شده‌است و ممکن است آن مراجع برای اولین بار مطلب مورد نظر را ذکر نکرده باشند.

---

[۸] Frigon

[۹] Agarwal

فصل ۱

چند قضیه نقطه ثابت روی فضاهای متریک

در این فصل، پس از بیان مقدمات، ابتدا نگاشت زامفیرسکیو را تعریف کرده، سپس یک قضیه نقطه ثابت برای این کلاس از نگاشت‌ها بیان می‌شود و در ادامه اصل انقباضی باناخ و قضایای نقطه ثابت کانان و چاتِریا به عنوان نتیجه‌ای از آن حاصل می‌شوند. همچنین در بخش سوم با ارائه‌ی مثال‌هایی نشان می‌دهیم کلاس نگاشت‌های انقباضی، کانان و چاتِریا مستقلند.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

در تمام این پایان نامه (X, d) یک فضای متریک و D زیرمجموعه‌ای (غیر تهی) از X است. طبق تعریف، فضای X را فضای نقطه ثابت گوییم، هرگاه هر نگاشت $f : X \longrightarrow X$ یک نقطه‌ی ثابت داشته باشد. در حالت کلی تشخیص فضای نقطه ثابت بودن X مشکل است، اما وجود نقطه ثابت می‌تواند تماماً از ماهیت فضای X ناشی نشود و به شکل خاصی که نگاشت f دارد نیز وابسته باشد. در واقع اگر X یک فضای نقطه ثابت نباشد، ممکن است هر نگاشت با تعدادی خواص ویژه، دارای یک نقطه‌ی ثابت باشد.

به این ترتیب با ارائه‌ی تعریف زیر یکی از مهمترین قضایای نقطه ثابت بیان می‌شود:

تعریف ۱.۱.۱ نگاشت $f : D \longrightarrow X$ انقباضی است هرگاه $\alpha \in (۰, ۱)$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in D$،

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) . \qquad (۱)$$

قضیه ۱.۱.۱ [۱۲] هر فضای متریک تام یک فضای نقطه ثابت برای کلاس نگاشت‌های انقباضی است.

به این ترتیب بنابر **اصل انقباضی باناخ** هر نگاشت انقباضی در یک فضای متریک تام همواره یک نقطه‌ی ثابت دارد. این قضیه با جایگزینی کلاس‌هایی از نگاشت‌ها با شرط (۱) توسیع داده شده است. به عنوان مثال، دو شرط بیان شده در تعریف بعد را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲.۱.۱ نگاشت $f : D \longrightarrow X$ را در نظر بگیرید. برای هر $x, y \in X$ ،

الف) f یک نگاشت **کانان** است هرگاه $\beta \in (۰, ۱)$ موجود باشد به طوری که،

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{\beta}{۲}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] . \qquad (۲)$$

ب) f نگاشت **چاتِریا** است هرگاه $\gamma \in (۰, ۱)$ وجود داشته باشد به طوری که،

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{\gamma}{۲}[d(x, f(y)) + d(y, f(x))] . \qquad (۳)$$

تبصره ۱.۱.۱ هر نگاشت انقباضی پیوسته است، (کافی است در تعریف پیوستگی $\delta < \frac{\varepsilon}{\alpha}$ در نظر گرفته شود) اما نگاشت‌های کانان و چاتِریا لزوماً پیوسته نیستند. (مثال‌های بخش‌های بعد این مطلب را نشان می‌دهد)

مقالات بسیاری برای تعمیم شرایط بالا یا حتی برقراری همزمان هر سه شرط ارائه شدند. از آن جمله نگاشت‌های زامفیرسکیو است که در سال ۱۹۷۲ با ترکیب سه رابطه (۱)، (۲) و (۳) معرفی شد.

۲.۱ قضیه نقطه ثابت زامفیرسکیو

در این بخش پس از تعریف نگاشت‌های زامفیرسکیو، یک قضیه‌ی نقطه ثابت برای این کلاس از نگاشت‌ها بیان و ثابت می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱ [۱۷] نگاشت $f : D \longrightarrow X$ را زامفیرسکیو نامیم هرگاه اعداد حقیقی $\alpha \in (0, 1)$ و $\beta, \gamma \in (0, \frac{1}{2})$ موجود باشند به طوری که برای هر $x, y \in D$ حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

i) $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$،

ii) $d(f(x), f(y)) \leq \beta[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$،

iii) $d(f(x), f(y)) \leq \gamma[d(x, f(y)) + d(y, f(x))]$.

کلاس نگاشت‌های زامفیرسکیو زیر کلاسی از کلاس نگاشت‌های f برقرار در شرط زیر است: $0 \leq q < 1$ موجود باشد به طوری که،

$$d(f(x), f(y)) \leq q \max\left\{d(x, y), d(x, f(x)), d(y, f(y)), d(x, f(y)), d(y, f(x))\right\}. \qquad (4)$$

این کلاس از نگاشت‌ها توسط چریچ[1] [۸] در سال ۱۹۷۴ معرفی و یک قضیه‌ی نقطه ثابت تحت این شرط ارائه شد. در واقع تعریف نگاشت زامفیرسکیو را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۱.۲.۱ [۳] نگاشت $f : D \longrightarrow X$ را زامفیرسکیو نامیم هرگاه $\xi \in [0, 1)$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in D$،

$$d(f(x), f(y)) \leq \xi \max\left\{d(x, y), \frac{1}{2}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))], \frac{1}{2}[d(x, f(y)) + d(y, f(x))]\right\}. \qquad (5)$$

تبصره ۱.۲.۱ [۱۵] مفاهیم بیان شده در تعریف ۱.۲.۱ و قضیه‌ی ۱.۲.۱ معادلند.

[1] Ćirić

قضیه ۲.۲.۱ [۱۷] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک تام و $f : X \longrightarrow X$ نگاشت زامفیرسکیو برقرار در تعریف ۱.۲.۱ باشد. در این صورت f یک نقطه ثابت منحصر به فرد مانند $u \in X$ دارد. به علاوه برای هر $x_\circ \in X$ دنباله $\{f^n(x_\circ)\}$ همگرا به u است.

برهان. δ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\delta = \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{۱-\beta}, \frac{\gamma}{۱-\gamma}\right\} ,$$

واضح است که $\delta < ۱$. (هر یک از مقادیر α و β و γ، طبق تعریف بین صفر و یک هستند.) حال عضوی دلخواه از X مانند $x_\circ$ انتخاب کرده و $n \geq \circ$ را ثابت در نظر بگیرید. فرض کنید $x = f^n(x_\circ)$ و $y = f^{n+۱}(x_\circ)$. اگر $x = y$، حکم برقرار و x همان نقطه ثابت f خواهد بود.

بنابراین فرض کنید $x \neq y$. حالات زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول. فرض کنید برای دو نقطه‌ی x و y شرط (i) برقرار باشد. در این صورت:

$$d(f^{n+۱}(x_\circ), f^{n+۲}(x_\circ)) \leq \delta d(f^n(x_\circ), f^{n+۱}(x_\circ)) .$$

حالت دوم. فرض کنید x و y در شرط (ii) صدق کند، دراین صورت:

$$d(f^{n+۱}(x_\circ), f^{n+۲}(x_\circ)) \leq \beta\Big(d(f^n(x_\circ), f^{n+۱}(x_\circ)) + d(f^{n+۱}(x_\circ), f^{n+۲}(x_\circ))\Big) ,$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} d(f^{n+۱}(x_\circ), f^{n+۲}(x_\circ)) &\leq \frac{\beta}{۱-\beta} d(f^n(x_\circ), f^{n+۱}(x_\circ)) \\ &\leq \delta d(f^n(x_\circ), f^{n+۱}(x_\circ)) . \end{aligned}$$

حالت سوم. اگر شرط (iii) برای x و y برقرار باشد، آن‌گاه داریم

$$\begin{aligned} d(f^{n+۱}(x_\circ), f^{n+۲}(x_\circ)) &\leq \gamma\Big(d(f^n(x_\circ), f^{n+۲}(x_\circ)) + d(f^{n+۱}(x_\circ), f^{n+۱}(x_\circ))\Big) \\ &= \gamma(f^n(x_\circ), f^{n+۲}(x_\circ)) \\ &\leq \gamma(d(f^n(x_\circ), f^{n+۱}(x_\circ)) + d(f^{n+۱}(x_\circ), f^{n+۲}(x_\circ))) . \end{aligned}$$

در این صورت مشابه حالت قبل داریم

$$d(f^{n+1}(x_\circ), f^{n+2}(x_\circ)) \leq \delta d(f^n(x_\circ), f^{n+1}(x_\circ)) \ .$$

و بنابر استقرا،

$$d(f^n(x_\circ), f^{n+1}(x_\circ)) \leq \delta d(f^{n-1}(x_\circ), f^n(x_\circ)) \leq \cdots \leq \delta^n d(x_\circ, f(x_\circ)) \ .$$

از آن جایی که نامساوی‌های فوق برای هر $n \geq \circ$ برقرار است و $\delta < 1$، $\{f^n(x_\circ)\}_{n=\circ}^{\infty}$ دنباله‌ای کشی و بنابر تام بودن X همگرا به نقطه‌ای مانند u است. حال نشان می‌دهیم u نقطه ثابت f است.

فرض کنید $f(u) \neq u$. گوی $B = \left\{x \in X \ ; \ d(x,u) \leq \frac{1}{4} d(u, f(u))\right\}$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $x \in B$، $d(x, f(u)) \geq \frac{3}{4} d(u, f(u))$، زیرا

$$d(u, f(u)) - \frac{1}{4} d(u, f(u)) \leq d(u, f(u)) - d(u,x) \leq d(x, f(u)) \ .$$

همچنین از آن جایی که $f^n(x_\circ) \longrightarrow u$، عدد N موجود است به طوری‌که برای هر $n \geq N$، $f^n(x_\circ) \in B$. قرار دهید، $x = f^N(x_\circ)$ و $y = u$. به این ترتیب حالات زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول. با توجه به شرط (i) داریم $d(f^{N+1}(x_\circ), f(u)) \leq \alpha d(f^N(x_\circ), u)$، که این یک تناقض است، زیرا

$$\alpha d(f^N(x_\circ), u) \leq d(f^N(x_\circ), u) \leq \frac{1}{4} d(u, f(u)) < d(f^{N+1}(x_\circ), f(u)) \ .$$

حالت دوم. در این حالت داریم

$$d(f^{N+1}(x_\circ), f(u)) \leq \beta\Big(d(f^N(x_\circ), f^{N+1}(x_\circ)) + d(u, f(u))\Big) \ ,$$

اما:

$$\begin{aligned}
\beta\Big(d(f^N(x_\circ), f^{N+1}(x_\circ)) + d(u, f(u))\Big) &< \frac{1}{2}\Big(d(f^N(x_\circ), u) + d(u, f(u)) + d(f^{N+1}(x_\circ), u)\Big) \\
&\leq \frac{3}{4} d(u, f(u)) \\
&\leq d(f^{N+1}(x_\circ), f(u)) \ .
\end{aligned}$$

و این یک تناقض است.

حالت سوم. $d(f^{N+1}(x_0), f(u)) \leq \gamma\Big(d(f^N(x_0), f(u)) + d(f^{N+1}(x_0), u)\Big)$،
که مشابه حالات قبل تناقض است، چون:

$$\begin{aligned}\gamma\Big(d(f^N(x_0), f(u)) + d(f^{N+1}(x_0), u)\Big) &< \frac{1}{2}\Big(d(f^N(x_0), u) + d(u, f(u)) + d(f^{N+1}(x_0), u)\Big) \\ &\leq \frac{3}{4}d(u, f(u)) \\ &\leq d(f^{N+1}(x_0), f(u)) \ .\end{aligned}$$

بنابراین از حالات فوق نتیجه می‌گیریم که $f(u) = u$.

حال نشان می‌دهیم نقطه ثابت f منحصر به فرد است: فرض کنید $u' \in X$ موجود باشد به طوری که $f(u') = u'$ و $u \neq u'$. در این صورت:

$$d(f(u), f(u')) = d(u, u') \ ,$$

$$d(f(u), f(u')) > d(u, f(u)) + d(u', f(u')) \ ,$$

$$d(f(u), f(u')) = \tfrac{1}{2}(d(u, f(u')) + d(u', f(u))) \ .$$

بنابراین هیچ یک از شرایط قضیه برای نقاط u و u' برقرار نیست و این یک تناقض است. ∎

از قضیه‌ی ۲.۲.۱، بلافاصله نتایج زیر که قضایای اصلی نقطه‌ی ثابت برای نگاشت‌های انقباضی، کانان و چاتِریا هستند، حاصل می‌شوند.

نتیجه ۱.۲.۱ [۱۷] فرض کنید (X, d) فضای متریک تام، $0 < \alpha < 1$ و $f : X \longrightarrow X$ نگاشت برقرار در رابطه‌ی (۱) باشد. در این صورت f یک نقطه ثابت منحصر به فرد مانند $u \in X$ دارد و برای هر $x_0 \in X$ دنباله $\{f^n(x_0)\}$ همگرا به u است.

نتیجه ۲.۲.۱ [۱۷] فرض کنید (X,d) فضای متریک تام و $0 < \beta < 1$ است. اگر $f : X \longrightarrow X$ نگاشت برقرار در رابطه‌ی (۲) باشد، آن‌گاه f یک نقطه ثابت منحصر به فرد مانند $u \in X$ دارد و برای هر $x_0 \in X$ دنباله $\{f^n(x_0)\}$ همگرا به u است.

نتیجه ۳.۲.۱ [۱۷] فرض کنید (X,d) فضای متریک تام، $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ و $f : X \longrightarrow X$ نگاشتی باشد که در رابطه‌ی (۳) صدق می‌کند. در این صورت f یک نقطه ثابت منحصر به فرد مانند $u \in X$ دارد و برای هر $x_0 \in X$ دنباله $\{f^n(x_0)\}$ همگرا به u است.

۳.۱ مثال‌ها

در این بخش برای هر یک از روابط (۱) و (۲) و (۳) مثال‌هایی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد این شرایط و درنتیجه شرط‌های تعریف ۱.۲.۱ مستقل هستند.

مثال ۱.۳.۱ فرض کنید $X = \mathbb{R}^2$ با نرم اقلیدسی $\|\cdot\|_2$ باشد. همچنین فرض کنید D گوی یکه بسته $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \|(x_1, x_2)\|_2 \leq 1\}$ باشد. نگاشت $f : D \longrightarrow X$ را به صورت $f(x_1, x_2) = \alpha(x_1, x_2)$ تعریف می‌کنیم، که در آن $\alpha \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$ است. در این صورت f یک نگاشت انقباضی است، اما نگاشت کانان و نگاشت چاتِریا نیست:
از آن جایی که $0 < \alpha < 1$ و هر دوران نیز یک ایزومتری است، به وضوح f انقباضی خواهد بود. نشان می‌دهیم f کانان و چاتِریا نمی‌باشد. قرار دهید $x = (1, 0)$ و $y = (-1, 0)$. همچنین α را به صورت $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \alpha$ در نظر بگیرید. در این صورت با جایگذاری و محاسبات ساده داریم

$$d(f(x), f(y)) \geq \tfrac{1}{2}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] \; ,$$

$$d(f(x), f(y)) \geq \tfrac{1}{2}[d(x, f(y)) + d(y, f(x))] \; .$$

مثال ۲.۳.۱ فضای متریک (X,d) را در نظر بگیرید که در آن $X=[۰,۱]$ و d متر معمولی روی $\mathbb{R}$ است. نگاشت

$$f(x)=\begin{cases} ۱\,, & ۰<x\leq ۱\,,\\ \frac{۲}{۳}\,, & x=۰\,.\end{cases}$$

یک نگاشت چاتِریا است، اما نگاشت انقباضی و نگاشت کانان نیست:

از آن جایی که f پیوسته نیست، به وضوح f انقباضی نمی‌باشد. زیرا کافی است $\varepsilon=\delta$ انتخاب شود.

حال نشان می‌دهیم f یک نگاشت کانان نیست.

$$\lim_{n\to ۱^-}\frac{۲d(f(x),f(۰))}{d(x,f(x))+d(۰,f(۰))}=\lim_{n\to ۱^-}\frac{۲|۱-\frac{۲}{۳}|}{|x-۱|+|۰-\frac{۲}{۳}|}=\lim_{n\to ۱^-}\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۵}{۳}-x}=۱\,,$$

که این تناقض است، زیرا:

$$۱=\lim_{n\to ۱^-}\frac{۲d(f(x),f(۰))}{d(x,f(x))+d(۰,f(۰))}\leq\beta<۱\,.$$

در انتها، ثابت می‌شود f با تعریف فوق یک نگاشت چاتِریا است. فرض کنید $x\in(۰,۱]$ و $y=۰$. در این صورت:

$$\frac{۲d(f(x),f(y))}{d(x,f(y))+d(y,f(x))}=\frac{\frac{۲}{۳}}{|x-\frac{۲}{۳}|+۱}\leq\frac{۲}{۳}\,.$$

بنابراین اگر $\gamma\in[\frac{۲}{۳},۱)$ را در نظر بگیرید، برای هر $x,y\in[۰,۱]$ داریم

$$d(f(x),f(y))\leq\frac{\gamma}{۲}[d(x,f(y))+d(y,f(x))]\,,$$

یعنی f چاتِریا است.

مثال ۳.۳.۱ فرض کنید فضای متریک (X,d) با متر معمولی روی $\mathbb{R}$ باشد. نگاشت $f:[۰,۱]\longrightarrow[۰,۱]$ با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۳}\,, & ۰\leq x<۱\,,\\ ۰\,, & x=۱\,.\end{cases}$$

یک نگاشت کانان است، اما نگاشت چاتِریا نیست:

مشابه مثال قبل چون f پیوسته نیست، انقباضی هم نیست. برای نشان دادن چاتِریا نبودن f کافی است توجه کنیم که

$$\frac{2d(f(0),f(1))}{d(0,f(1))+d(1,f(0))}=\frac{2|\frac{1}{3}-0|}{|0-0|+|1-\frac{1}{3}|}=1\ .$$

حال کافی است نشان دهیم f یک نگاشت کانان است. فرض کنیم $x\in[0,1)$ و $y=1$. در این صورت:

$$\frac{2d(f(x),f(1))}{d(x,f(x))+d(1,f(1))}=\frac{23}{|x-\frac{1}{3}|+1}\le\frac{2}{3}\ .$$

از این رو با انتخاب $\beta\in[\frac{2}{3},1)$ برای هر $x,y\in[0,1]$ خواهیم داشت:

$$d(f(x),f(y))\le\frac{\beta}{2}[d(x,f(x))+d(y,f(y))]\ ,$$

مثال ۴.۳.۱ فرض کنید نگاشت $f:[0,1]\longrightarrow X$ به صورت زیر باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ , & 0\le x<1\ ,\\ \frac{1}{4}\ , & x=1\ .\end{cases}$$

در این صورت f یک نگاشت کانان با $\frac{2}{5}\le\beta<1$ است، اما f یک نگاشت انقباضی نیست. زیرا برای هر $x\in(\frac{3}{4},1)$ داریم $d(f(x),f(1))=\frac{1}{4}>d(x,1)$.

مثال ۵.۳.۱ نگاشت $f(x)=\frac{x}{4}$ را برای هر $x\in[0,1]$ در نظر می‌گیریم. در این صورت f یک نگاشت انقباضی است، اما یک نگاشت کانان نیست. زیرا هیچ β ی در $[0,1)$ وجود ندارد که برای هر $x,y\in[0,1]$ نامساوی $|x-y|\le\beta(x+y)$ برقرار باشد.

فصل ۲

تعمیم قضیه نقطه ثابت زامفیرسکیو

در این فصل با توجه به ایده‌ی داگانجی و گراناس تعمیمی از اصل انقباضی باناخ ارائه می‌شود که مفهوم نگاشت انقباضی را به کلاس نگاشت‌های انقباضی ضعیف توسیع می‌دهد. سپس این روش را روی نگاشت‌های زامفیرسکیو بررسی می‌کنیم.

۱.۲ نگاشت‌های انقباضی ضعیف

مفهوم نگاشت انقباضی ضعیف با جایگزینی تابع $\alpha = \alpha(x, y)$ با ثابت α به دست می‌آید.

تعریف ۱.۱.۲ نگاشت $f : D \longrightarrow X$ را انقباضی ضعیف گوییم، هرگاه تابع $\alpha : D \times D \longrightarrow [۰, ۱)$ برقرار در شرط،

$$\theta(a, b) := \sup\Big\{\alpha(x, y) \ ; \ a \leq d(x, y) \leq b\Big\} < ۱ \ , \qquad ۰ < a \leq b \ ,$$

موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in D$:

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha(x, y) d(x, y) \ . \qquad (۱)$$

تبصره ۱.۱.۲ اگر $f : D \subset X \longrightarrow X$ یک نگاشت انقباضی ضعیف باشد و $\alpha_f(x,y)$ را روی $D \times D$ به صورت زیر تعریف کنیم :

$$\alpha_f(x,y) = \begin{cases} \frac{d(f(x),f(y))}{d(x,y)} & x \neq y, \\ 0 & x = y \ . \end{cases} \qquad (۲)$$

آن‌گاه α_f خوش تعریف است، مقادیر بین $[0,1]$ را می‌پذیرد، برای هر $0 < a \leq b$ در $\sup\{\alpha_f(x,y) \ ; \ a \leq d(x,y) \leq b\} < 1$ صدق می‌کند و α_f از هر α وابسته به f کوچکتر است. همچنین با جایگزینی α با α_f برای هر $x,y \in D$ شرط (۱) برقرار است.

بر عکس اگر α_f تعریف شده به صورت (۲) در مجموعه‌ی شرایط فوق صدق کند، آن‌گاه f نگاشت به طورضعیف انقباضی است.

تبصره ۲.۱.۲ هر نگاشت انقباضی ضعیف حداکثر یک نقطه ثابت دارد.

برای نشان دادن این موضوع، فرض می‌کنیم $u \neq v$ دو نقطه‌ی ثابت f باشند. در این صورت با توجه به شرط $\sup\{\alpha_f(x,y) \ ; \ a \leq d(x,y) \leq b\} < 1$ در تعریف ۱.۱.۲ داریم

$$0 < d(u,v) = d(f(u),f(v)) \leq \alpha(u,v)d(u,v) \leq \theta(a,b)d(u,v) < d(u,v) \ ,$$

که به وضوح یک تناقض است.

تبصره ۳.۱.۲ هر نگاشت انقباضی ضعیف پیوسته است. در واقع کافی است در تعریف پیوستگی $\delta < \frac{\varepsilon}{1-\alpha(x,y)}$ در نظر گرفته شود.

مثال بعد نشان می‌دهد کلاس نگاشت‌های انقباضی ضعیف بزرگتر از کلاس نگاشت‌های انقباضی است.

مثال ۱.۱.۲ زیر مجموعه‌ی $D = [0, \frac{\pi}{2}]$ از فضای متریک $X = \mathbb{R}$ با متریک معمولی $d(x,y) = |x-y|$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $f : D \longrightarrow X$ تابعی با ضابطه $f(x) = \sin(x)$ باشد. دراین صورت f نگاشت انقباضی ضعیف است، اما نگاشت انقباضی نیست:

f در شرط انقباضی (۱) صدق نمی‌کند، زیرا

$$\lim_{x \to 0} \frac{d(f(x), f(0))}{d(x, 0)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \ .$$

حال نشان می‌دهیم f نگاشت انقباضی ضعیف است. تابع $\alpha_f : [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت (۲) در نظر بگیرید. از آن جایی که برای هر $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ داریم، $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|$، بنابراین تابع α_f خوش تعریف است و مقادیر بین ۰ و ۱ را می‌پذیرد. حال فرض کنید $0 < a \leq b$. در این صورت

$$\theta(a,b) = \sup\left\{\alpha(x,y) \ ; \ a \leq d(x,y) \leq b \ , x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]\right\} < 1 \ .$$

توجه داریم که اگر $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ و $0 < a \leq |x-y| \leq b$، آن‌گاه:

$$\frac{a}{2} \leq \frac{x+y}{2} \ ,$$

و بنابراین طبق یکنوایی تابع کسینوس روی $[0, \frac{\pi}{2}]$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \alpha_f(x,y) &= \frac{|\sin(x) - \sin(y)|}{|x-y|} \\ &= \frac{|2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})|}{|x-y|} \\ &\leq \cos(\frac{x+y}{2}) \\ &\leq \cos(\frac{a}{2}) < 1 \ . \end{aligned}$$

قضیه‌ی بعد در اثبات قضیه‌ی نقطه ثابت برای نگاشت‌های انقباضی ضعیف کاربرد دارد.

قضیه ۱.۱.۲ [۱۲] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک تام و $f : X \longrightarrow X$ نگاشتی باشد که ضرورتاً پیوسته نیست. همچنین فرض کنید،

برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta(\varepsilon) > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $d(x, f(x)) < \delta(\varepsilon)$، آن‌گاه $f[B(x,\varepsilon)] \subset B(x,\varepsilon)$ که در آن $B(x,\varepsilon)$ یک گوی باز به مرکز $x \in X$ و شعاع ε است.
در این صورت اگر برای $x \in X$، $d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \longrightarrow 0$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f^n(x)\}$ همگرا به نقطه‌ی ثابت f است.

برهان. قرار دهید $x_n = f^n(x)$. ابتدا نشان می‌دهیم $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی کشی است:
فرض کنید $\varepsilon > 0$. N را آن قدر بزرگ در نظر می‌گیریم که برای هر $n \geq N$ نامساوی $d(x_n, x_{n+1}) < \delta(\varepsilon)$ برقرار باشد. از آن جایی که $d(x_N, f(x_N)) < \delta$، داریم

$$f[B(x_N,\varepsilon)] \subset B(x_N,\varepsilon) \ ,$$

بنابراین $f(x_N) = x_{N+1} \in B(x_N,\varepsilon)$. پس بنابر استقرا برای هر $k \geq 0$ داریم

$$f^k(x_N) = x_{N+k} \in B(x_N,\varepsilon) \ .$$

از این رو برای هر $s, k \geq N$،

$$d(x_k, x_s) < 2\varepsilon \ .$$

بنابراین $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی و در نتیجه همگرا به عضوی مانند $u \in X$ است.
حال نشان می‌دهیم u نقطه‌ی ثابت f است. فرض کنید این طور نباشد (فرض خلف)، یعنی $d(u, f(u)) = a > 0$. می‌توان $x_n \in B(u, \frac{a}{3})$ را طوری انتخاب کرد که $d(x_n, x_{n+1}) < \delta(\frac{a}{3})$، در این صورت طبق فرض

$$f[B(x_n, \frac{a}{3})] \subset B(x_n, \frac{a}{3}) \ .$$

(ε را $\frac{a}{3}$ در نظر گرفته‌ایم، پس طبق فرض، $\delta(\frac{a}{3})$ وجود دارد.) از طرفی بنابر رابطه‌ی فوق $f(u) \in B(x_n, \frac{a}{3})$ که این غیر ممکن است، زیرا

$$d(f(u), x_n) \geq d(f(u), u) - d(x_n, u) \geq \frac{2a}{3} \ ,$$

یعنی $f(u) \notin B(x_n, \frac{a}{3})$. به این ترتیب $d(u, f(u)) = 0$ و u یک نقطه‌ی ثابت f است. ■

قضیه ۲.۱.۲ [۱۲] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک تام و $f : X \longrightarrow X$ نگاشت انقباضی ضعیف باشد. در این صورت f یک نقطه‌ی ثابت منحصر به فرد مانند u دارد و برای هر $x \in X$، $f^n(x) \longrightarrow u$.

برهان. برای هر $x \in X$ دنباله‌ی $\{d(f^n(x), f^{n+1}(x))\}$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned} c_n &= d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \\ &\leq \alpha(f^{n-1}(x), f^n(x))\ d(f^{n-1}(x), f^n(x)) \\ &= \alpha(f^{n-1}(x), f^n(x)) c_{n-1} \\ &\leq c_{n-1}\ , \end{aligned}$$

بنابراین دنباله‌ی فوق نزولی و همگرا به $a \geq 0$ است. ادعا می‌کنیم $a = 0$. زیرا اگر $a > 0$، آن‌گاه برای n های بزرگ داریم $d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \in [a, a+1]$. بنابراین اگر قرار دهیم $c = \theta(a, a+1)$، بنا بر استقرا می‌توان n را طوری انتخاب کرد که برای هر $k > 0$،

$$a \leq d(f^{n+k}(x), f^{n+1+k}(x) \leq c^k d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq c^k(a+1)\ .$$

اما این یک تناقض است، زیرا $c < 1$.

حال فرض کنید $\varepsilon > 0$، $\theta = \theta(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)$ و قرار دهید $\delta = \min[\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon(1-\theta)]$. در این صورت اگر $d(x, f(x)) < \delta$ و $z \in B(x, \varepsilon)$، آن‌گاه:

$$d(f(z), x) \leq d(f(z), f(x)) + d(f(x), x)\ .$$

بنابراین دو حالت زیر را داریم:

حالت اول. اگر $d(z,x) < \frac{\varepsilon}{2}$، آن‌گاه:

$$d(f(z), x) \leq d(z, x) + d(f(x), x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ ,$$

حالت دوم. اگر $\frac{\varepsilon}{2} \leq d(z,x) < \varepsilon$، آن‌گاه:

$$d(f(z), x) \leq \alpha(z, x) d(z, x) + d(f(x), x) < \theta \cdot \varepsilon + (1-\theta)\varepsilon = \varepsilon\ .$$