دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش جبر

موضوع:

گراف‌های کیلی موضعا اولیه روی گروه‌های آبلی متناهی

استاد راهنما:

دکتر محسن قاسمی

نام دانشجو:

حدیث حیدری

شهریور ۱۳۹۳

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را، عشق را،

و به کسانی که عشقشان را در وجودم دمید.

به پدر و مادرم، مهربان فرشتگانی که لحظات ناب باور بودن، لذت غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگیم مدیون حضور سبز آن‌هاست.

به برادر عزیزم که همواره در طول تحصیل، متحمل زحماتم بود و وجودش مایه دلگرمی من می‌باشد.

و به خواهران و خواهرزاده‌های دلبندم که با چشم‌هایی پر از شوق و زیبایی حضور در کنارم، خستگی‌های این راه را به امید و روشنی راه تبدیل نمودند.

سپاس گزاری...

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که، هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش، رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

اکنون که به یاری خداوند متعال یکی دیگر از مراحل زندگی ام را به پایان رسانده ام، بر خود واجب می دانم تا از راهنمایی های ارزنده و مساعدت های بی دریغ استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر قاسمی که مرا در انجام این پروژه با صبر و بردباری همراهی نمودند از صمیم قلب تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین از اساتید ارجمند جناب آقای دکتر بهروش و جناب آقای دکتر سنریده که زحمت داوری، بازخوانی و ویرایش این پایان نامه را تقبل فرمودند سپاسگذاری می نمایم.

چکیده

فرض کنید Γ یک گراف همبند موضعا اولیه روی یک گروه آبلی متناهی باشد. در این پایان نامه نشان خواهیم داد یکی از حالت‌های زیر برقرار می‌باشد:

۱) $\Gamma = K_n, K_{n,n}, K_{n,n} - nK_2, K_n \times ... \times K_n$

۲) Γ یک پوشش نرمال دوتایی استاندارد از $K_n \times ... \times K_n$ است.

۳) Γ یک گراف کیلی نرمال یا دو نرمال روی یک ۲ ـ گروه آبلی مقدماتی یا ۲ ـ گروه فرا آبلی می باشد.

فهرست مطالب

فهرست مطالب ث

پیشگفتار ج

۱ گروه های متناهی و جایگشتی ۱
۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی از گروه‌های متناهی و جایگشتی ۱
۲.۱ گروه‌های خطی ، آفین و ماتیو گروه‌ها ۱۱

۲ نظریه جبری گراف ۱۴
۱.۲ مفاهیم اولیه از گراف ۱۴
۲.۲ گراف‌های کیلی ۱۹

۳ طبقه بندی گراف‌های کیلی موضعا اولیه روی گروه‌های آبلی متناهی ۲۳
۱.۳ تعاریف و قضایای مقدماتی ۲۳
۲.۳ گراف‌های شبه اولیه ۳۱
۳.۳ گراف‌های دوشبه اولیه ۳۶
۴.۳ طبقه بندی گراف‌های کیلی موضعا اولیه روی گروه‌های آبلی متناهی ۳۹
۱.۴.۳ اگر $\overline{X}$ روی W اولیه باشد ۴۲
۲.۴.۳ اگر $\overline{X}$ روی W اولیه مضاعف باشد. ۴۷

مراجع ۵۲

پیشگفتار

جبرها حقایق هندسی هستند که اثبات می‌شوند. (حکیم عمر خیام)

پیشرفت‌های اخیر در ریاضیات به ویژه در کاربردهای آن موجب گسترش چشمگیر نظریه‌ی گراف شده است، به گونه‌ای که هم اکنون نظریه‌ی گراف ابزار مناسبی برای تحقیق در زمینه‌های گوناگون مانند نظریه‌ی کد گذاری، تحقیق در عملیات، آمار، علوم رایانه، شیمی، زیست شناسی و سایر زمینه‌ها گردیده است.

از سویی دیگر مفاهیمی نظیر گروه خود ریختی‌های گراف و یا گراف‌هایی مثل گراف کیلی موجب ایجاد ارتباط تنگاتنگی بین نظریه‌ی گراف و نظریه‌ی گروه‌ها در جبر می‌شود، زیرا تعریف گراف کیلی وابسته به وجود یک گروه است. آنچه در این پژوهش مد نظر ماست بررسی گراف‌های کیلی موضعا اولیه روی گروه‌های آبلی است که البته تعاریف مورد نیاز در فصل‌های آتی در اختیار خوانندگان عزیز قرار خواهد گرفت.

گراف‌های کیلی روی گروه‌های آبلی در مقالات زیادی مورد توجه قرار گرفته‌اند، به عنوان مثال ایوانف[۱] و پرگر[۲] در [۹] گراف‌های کیلی ۲ـ کمان انتقالی روی ۲ـ گروه‌های آبلی مقدماتی را طبقه بندی کرده‌اند. گراف‌های کیلی ۲ـ کمان انتقالی روی گروه‌های دوری توسط آل اسپیچ[۳]، ماروسیک[۴]

[۱] Ivanov
[۲] Praeger
[۳] Alspach
[۴] Marusic

و کاندر[1] در [۱] دسته بندی شده‌اند. بعلاوه افرادی نظیر لی[2]، پرگر، گودسیل[3] و...، گراف‌های موضعا اولیه و موضعا sـ کمان انتقالی را در [۱۵, ۱۱, ۶] بررسی کرده‌اند. ذکر این نکته نیز خالی از فایده نیست که امروزه ثابت شده است که گراف‌های sـ کمان انتقالی زیر دسته‌ای از گراف‌های موضعا اولیه می‌باشند. در این پایان نامه سعی داریم طبقه بندی از گراف‌های کیلی موضعا اولیه روی گروه‌های آبلی را ارائه داده و خواص آن را بیان کنیم.

این پایان نامه بر اساس مقاله زیر تدوین گردیده است:

- Li. C. H, Lou. B. G, Pan. J. M . *Finite locally primitive abelian Cayley graphs*. *Journal of Science China Mathematics*, 2011, 54: 845-854.

[1] Conder
[2] Li
[3] Godsil

فصل ۱

گروه های متناهی و جایگشتی

در این فصل تعاریف و قضایایی از نظریه گروه‌های متناهی و جایگشتی را که در فصل‌های آینده مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان می‌کنیم. بیشتر قضایا بدون اثبات بیان می‌شوند و علاقه مندان می‌توانند اثبات آن‌ها را از منابع مذکور بیابند.

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی از گروه‌های متناهی و جایگشتی

تعریف ۱.۱.۱. گوییم گروه G بر مجموعه ناتهی X عمل می‌کند اگر به هر $g \in G$ و $x \in X$ عضو یکتای $xg \in X$ طوری متناظر شود که به ازای هر $x \in X$ و $g_۱, g_۲ \in G$ داشته باشیم:

(۱) $(xg_۱)g_۲ = x(g_۱g_۲)$

(۲) $x.۱ = x$

می‌گوییم g عضو (یا نقطه) x را ثابت نگه می‌دارد هرگاه $xg = x$. مجموعه اعضایی از G که

هر عضو X را ثابت نگه می‌دارند، هسته‌ی عمل[۱] نامیده می‌شود.

نکته ۲.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت از جمله روش‌هایی که G می‌تواند بر خودش عمل کند از طریق ضرب دو عضو از G و یا با عمل تزویج می‌باشد.

قضیه ۳.۱.۱. *فرض کنید گروه G بر X عمل کند. در این صورت همریختی $\rho : G \longrightarrow S(X)$ با ضابطه‌ی $g\rho = \rho_g$ که درآن $\rho_g \in S(X)$ و $x\rho_g = xg$ ، متناظر با عمل G روی X وجود دارد.*

برهان. به [۲۴، قضیه ۱.۱.۲] مراجعه شود. □

همریختی موجود در قضیه فوق را نمایش جایگشتی متناظر باعمل G روی X می‌نامیم و هسته‌ی آن را همان هسته عمل در نظر می‌گیریم.

عمل G روی X را صادق[۲] گویند هرگاه $ker\rho = 1$. به عبارت دیگر ρ یک به یک باشد.

فرض کنید $\alpha \in X$ در این صورت مجموعه‌ی $\{\alpha^g : g \in G\}$ را مدار شامل α می‌نامیم و با نماد α^G یا $\mathrm{orb}(\alpha)$ نمایش می‌دهیم. واضح است که مدارها مجموعه‌ی X را افراز می‌کنند.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی X عمل کند در این صورت منظور از ساختار G^X مجموعه جایگشت‌های نظیر این عمل است یعنی:

$$G^X = \{\rho_g : g \in G\}$$

البته نماد G^X گاهی اوقات به معنای عمل G بر X نیز به کار برده می‌شود. حال اگر G با ضرب از راست روی خودش عمل کند مجموعه‌ی $\{\rho_g : x\rho_g = xg\}$ را نمایش منظم راست G می‌نامند و با $R(G)$ نمایش می‌دهند. به سادگی ثابت می‌شود که $G \cong R(G)$.

[۱] kernel action
[۲] faithful

تعریف ۵.۱.۱. عمل G روی X را انتقالی[۱] می‌گویند هرگاه G فقط شامل یک مدار در X باشد. یا به عبارت دیگر عمل G روی X انتقالی است هرگاه به ازای هر $\alpha, \beta \in X$ یک $g \in G$ وجود داشته باشد به‌طوریکه $\alpha^g = \beta$.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $\alpha \in X$ در این صورت مجموعه‌ی $\{g \in G : \alpha^g = \alpha\}$ را پایدارساز α در G می‌نامند و با نماد G_α یا $\mathrm{Stab}_G(\alpha)$ نمایش می‌دهند. واضح است که G_α زیر گروهی از G می‌باشد.

قضیه ۷.۱.۱ (قضیه مدار ــ پایدارساز). *فرض کنید گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند و $x \in X$ در این صورت :*

$$|G : G_x| = |x^G|$$

برهان. به [۲۱، لم ۱۱.۴] مراجعه کنید. □

لم ۸.۱.۱. *فرض کنید H یک زیرگروه انتقالی از G باشد و $\alpha \in X$ در این صورت $G = HG_\alpha$.*

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که $G \subseteq HG_\alpha$. فرض کنیم $g \in G$. اگر $\alpha^g = \alpha$، آن‌گاه $g \in G_\alpha$. بنابراین فرض کنیم $\alpha^g = \beta$، چون H انتقالی است، $h \in H$ وجود دارد به طوری که $\alpha^h = \beta$. بنابراین $\alpha^{gh^{-1}} = (\alpha^g)^{h^{-1}} = \beta^{h^{-1}} = \alpha$ و از آن‌جا $\alpha^{gh^{-1}} = \alpha$. بنابراین $gh^{-1} \in G_\alpha$ و از آن‌جا $g \in G_\alpha H$. پس $G \subseteq G_\alpha H$. از طرف دیگر چون $G_\alpha \subseteq G$ و $H \leq G$، پس داریم $G_\alpha H \subseteq G$. بنابراین $G = G_\alpha H$. □

تعریف ۹.۱.۱. عمل G روی X را نیم منظم[۲] گوییم هرگاه به ازای هر $\alpha \in X$ ، $G_\alpha = 1$. همچنین G را منظم[۳] گوییم هرگاه انتقالی و نیم منظم باشد.

[۱] transitive
[۲] semi regular
[۳] regular

لم ۱۰.۱.۱. *هر گروه آبلی و انتقالی G روی مجموعه‌ی X منظم است.*

برهان. به [۲۳، قضیه ۴.۴] مراجعه شود. □

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیدG یک گروه جایگشتی روی Ω باشد. زیرمجموعه‌ی ψ از Ω را یک بلوک از G گوییم هرگاه به ازای هر $g \in G$:

$$\psi^g = \psi \quad \text{یا} \quad \psi^g \cap \psi = \phi$$

واضح است که ϕ, Ω و مجموعه‌های تک عضوی $\{\alpha\}$ به طوری که $\alpha \in \Omega$ ، بلوک‌های بدیهی برای G هستند.

تعریف ۱۲.۱.۱. گروه G را اولیه[۱] گوییم هرگاه هیچ بلوک غیر بدیهی نداشته باشد. در غیر اینصورت G را غیراولیه[۲] گوییم.

قضیه ۱۳.۱.۱. *اگر گروه انتقالی G شامل یک زیرگروه غیرانتقالی نرمال مخالف ۱ مانند N باشد آنگاه G غیر اولیه است.*

برهان. اگر ψ یک مدار از N باشد آنگاه به ازای هر $g \in G$، ψ^g یک مدار از $g^{-1}Ng$ است. اما N در G نرمال است لذا $g^{-1}Ng = N$. بنابراین ψ^g نیز یک مدار برای N است و برای هر $g \in G$ داریم $\psi = \psi^g$ یا $\psi \cap \psi^g = \phi$. در نتیجه ψ یک بلوک غیر بدیهی برای G است و G یک گروه غیر اولیه است. □

قضیه ۱۴.۱.۱. *هر زیرگروه نرمال مخالف ۱ مانند N ، از گروه اولیه G، انتقالی است.*

[۱] primitive
[۲] imprimitive

برهان. به برهان خلف فرض کنید N انتقالی نباشد. میدانیم که هرگروه انتقالی که شامل یک زیرگروه نرمال غیرانتقالی باشد غیراولیه است بنابراین نتیجه می‌گیریم G غیراولیه است که با فرض قضیه تناقض دارد. پس فرض خلف رد می‌شود و N انتقالی است. $\square$

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنید G یک گروه جایگشتی روی Ω باشد، G را $k-$انتقالی گوییم هرگاه برای هر دو $k-$تایی مرتب مانند $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ و $(\beta_1, ..., \beta_k)$ از نقاط Ω ، عضو $g \in G$ موجود باشد به طوریکه $(\alpha_1, ..., \alpha_k)^g = (\beta_1, ..., \beta_k)$.

قضیه ۱.۱.۱۶. *هر گروه دو انتقالی G، اولیه است.*

برهان. فرض کنید Δ یک بلوک غیر بدیهی برای G باشد لذا $|\Delta| \geq 2$. فرض کنید $x, y \in \Delta$ و $z \in \Omega - \Delta$، حال زوج‌های (x, y) و (z, y) را در نظر می‌گیریم، چون G دوانتقالی است $g \in G$ وجود دارد بطوریکه $(x, y)^g = (z, y)$. بنابراین $\{z, y\} \subseteq \Delta^g$. لذا $\Delta^g \neq \Delta$ و $\Delta \cap \Delta^g \neq \phi$. اما روابط اخیر با تعریف بلوک تناقض دارد. لذا G بلوک غیر بدیهی ندارد و اولیه است. $\square$

تعریف ۱.۱.۱۷. گروه G روی Ω را $\frac{1}{2}-$ انتقالی یا نیم انتقالی می‌نامیم هرگاه طول همه‌ی مدارهای آن مساوی و بزرگتر از یک باشد. اگر $|\Omega| = 1$ آنگاه G را به طور قراردادی $\frac{1}{2}-$انتقالی در نظر می‌گیریم.

قضیه ۱.۱.۱۸. *هر زیرگروه نرمال مخالف ۱ از یک گروه انتقالی، نیم انتقالی است.*

برهان. به [۲۳، قضیه ۱.۱.۲] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنید p یک عدد اول و G یک گروه آبلی باشد. در این صورت G یک $p-$ گروه آبلی مقدماتی نامیده می‌شود هرگاه مرتبه‌ی هر عضوش p باشد. به عبارت دیگر $G \cong Z_p \times ... \times Z_p$.

قضیه ۱.۱.۲۰. *اگر G یک گروه آبلی مقدماتی باشد، آنگاه $G \cong C_p \times ... \times C_p$.*

برهان. به [۲۴، صفحه ۱۰۳] مراجعه شود. □

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و N یک زیرگروه از G باشد. N را زیرگروه مشخصه‌ی G گوییم هرگاه N تحت $\mathrm{Aut}(G)$ پایا باشد و آن را با نماد $N\,ch\,G$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲۲.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه، N و M دو زیر گروه از G باشند به طوری که $N \lhd G$ و $MchN$، در این صورت $M \lhd G$.*

برهان. به [۲۲، قضیه ۲۰.۵] مراجعه شود. □

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و $H \leq G$ باشد. در این صورت H را زیرگروه هال G می‌نامیم هرگاه $(|H|, |G : H|) = 1$.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنید $H \leq G$، به ازای هر $g \in G$ مجموعه $\bigcap(g^{-1}Hg)$ را مغز H در G می‌نامیم و بانماد $\text{core}_G(H)$ یا H_G نمایش می‌دهیم. در این صورت $H_G \lhd G$ و اگر $K \leq H \leq G$ و $K \lhd G$ آنگاه $K \leq H_G$. پس H_G بزرگترین زیرگروه نرمال یکتای G است که در H قرار دارد. بعلاوه اگر $H_G = 1$ آنگاه H را زیرگروه بدون مغز[1] G می‌نامند.

تعریف ۲۵.۱.۱. گروه G را فرا آبلی[2] گوییم هرگاه دارای زیرگروه نرمالی مانند N باشد به طوری که N و $\frac{G}{N}$ هر دو آبلی باشند.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنید H و K دو گروه دلخواه و $\phi : H \longrightarrow K$ یک همریختی باشد. (به ازای هر h از H تصویر h تحت ϕ را با ϕ_h نمایش می‌دهند). در حاصلضرب دکارتی $H \times K$ عمل دوتایی زیر را تعریف می‌کنیم:

---

[1] core free
[2] meta-abelian

$$(h_۱, k_۱)(h_۲, k_۲) = (h_۱h_۲, (k_۱\phi_{h_۲})k_۲)$$

مجموعه‌ی $H \times K$ با عمل فوق تشکیل یک گروه می‌دهد، این گروه را حاصلضرب نیم مستقیم[1]، H و K با عمل ϕ می‌نامند و آن را با علامت $H \times_\phi K$ نمایش می‌دهند و اصطلاحا می‌گویند گروه H بر K با ϕ عمل می‌کند. درحالتی که ابهامی در مورد ϕ پیش نیاید به جای علامت مذکور از علامت $H \ltimes K$ استفاده می‌شود.

در صورتی که ϕ همریختی بدیهی باشد، ضرب نیمه مستقیم به حاصلضرب مستقیم تبدیل می‌شود.

قضیه ۲۷.۱.۱. *فرض کنید $G = H \times_\phi K$ و $\phi : H \longrightarrow Aut(K)$ یک همریختی باشد. در این صورت G زیرگروه نرمالی مانند N و زیرگروهی مانند M دارد که $H \cong M$ و $K \cong N$ به طوریکه $G = M.N$ و $M \cap N = ۱$.*

برهان. به [۲۴، قضیه ۱.۱.۸] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۲۸.۱.۱. *اگر G روی خودش عمل کند آنگاه* $N_{\mathrm{Sym}(G)}(R(G)) = R(G) \ltimes \mathrm{Aut}(G)$

برهان. برای سهولت در نوشتن، قرار می‌دهیم $K = R(G)$ و $N = N_{Sym(G)}R(G)$. باید ثابت کنیم $N = K\mathrm{Aut}(G)$. ابتدا ثابت می‌کنیم که $K\mathrm{Aut}(G) \leq N$. چون $K \leq N$، کافی است نشان دهیم $\mathrm{Aut}(G) \leq N$. فرض کنیم $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ و $g \in G$، به آسانی دیده می‌شود که $(\alpha R_g \alpha^{-۱}) = R_{\alpha(g)}$ از آن‌جا $K^\alpha = K$. بنابراین $\alpha \in N$.

اکنون ثابت می‌کنیم $N \leq K\mathrm{Aut}(G)$. فرض کنیم $\alpha \in N$ و $x = \alpha(۱)$. در این‌صورت $\alpha R_{x^{-۱}}$، ۱ را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد $\alpha(۱) = ۱$ و هم‌چنین فرض

[1] semidirect

می‌کنیم $G \in g_1 g_2$. چون $\alpha \in N$، گروه G اعضایی مانند h_1 و h_2 دارد که $R^\alpha_{g_1} = R_{h_1}$ و $R^\alpha_{g_2} = R_{h_2}$.
از آن‌جا $(\alpha R_{g_1} \alpha^{-1}) = R_{h_1}$ و $(\alpha R_{g_2} \alpha^{-1}) = R_{h_2}$. داریم

$$\alpha R_{g_2 g_1} \alpha^{-1} = (\alpha R_{g_1} \alpha^{-1})(\alpha R_{g_2} \alpha^{-1}) = R_{h_1} R_{h_2} = R_{h_2 h_1}$$

پس

$$\alpha R_{g_2 g_1} \alpha^{-1}(1) = R_{h_2 h_1}(1).$$

لذا $\alpha(g_2 g_1) = \alpha R_{g_2 g_1}(1) = h_2 h_1$. همچنین از $R^\alpha_{g_1} = R_{h_1}$ و $R^\alpha_{g_2} = R_{h_2}$ داریم

$$\alpha(g_1) = \alpha R_{g_1} \alpha^{-1}(1) = R_{h_1}(1) = h_1$$

و $\alpha(g_2) = h_2$. بنابراین $\alpha(g_1 g_2) = h_2 h_1 = \alpha(g_2)\alpha(g_1)$. یعنی α یک همریختی است. در نتیجه $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ و حکم برقرار است. $\square$

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید H و K دو گروه باشند و نیز فرض کنید H روی مجموعه‌ی ناتهی Γ عمل کند. در این صورت حاصلضرب حلقوی K در H با توجه به این عمل عبارت است از ضرب نیم مستقیم $Fun(\Gamma, K) \rtimes H$ که در آن $Fun(\Gamma, K)$ مجموعه توابع تعریف شده از Γ به K است و H با تعریف زیر روی مجموعه‌ی $Fun(\Gamma, K)$ عمل می‌کند:

$$f(r)^x = f(r^{x^{-1}}) \qquad x \in H, \quad r \in \Gamma, \quad f \in Fun(\Gamma, K)$$

ما این گروه را با نماد $KwrH$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳۰.۱.۱. *می‌دانیم* $|\mathrm{Fun}(\Gamma,K)|=|K|^{|\Gamma|}$. *لذا اگر* $|\Gamma|=n$ *آنگاه* $|KwrH|=|H|.|K|^n$.

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنید گروه H روی مجموعه‌ی Δ عمل می‌کند و نیز فرض کنید $P\leq S_l$. اگر $W=HwrP$ آنگاه W روی مجموعه‌ی $\Omega=\Delta^l$ عمل می‌کند که این عمل را عمل ضربی [۱] می‌نامند و به این صورت تعریف می‌شود که برای هر $(\alpha_1,...,\alpha_l)\in\Omega$ و $x=(h_1,...,h_l)\in H$ و $\sigma\in P$ داریم:

$$(\alpha_1,...,\alpha_l)^{(h_1,...,h_l)\sigma}=(\beta_1,...,\beta_l)\quad \text{به طوری که}\quad \beta_i=\alpha_{i^{\sigma^{-1}}}^{h_{i^{\sigma^{-1}}}}.$$

قضیه ۳۲.۱.۱. *با توجه به تعریف فوق* W *روی* Ω *اولیه است اگر و فقط اگر* H *روی* Δ *به طور اولیه اما غیرمنظم عمل کند و* P *یک زیرگروه انتقالی از* S_l *باشد.*

برهان. به [۵، لم ۷.۲] مراجعه شود. □

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و G_1، ...، G_n زیرگروه‌هایی از G باشند. گروه G را حاصلضرب مرکزی[۲] $G_1,...,G_n$ گوییم و با نماد $G_1o\ldots oG_n$ نشان می‌دهیم در صورتی که:

(۱) $G=G_1....G_n$

(۲) به ازای هر i و j که $1\leq i<j\leq n$ داشته باشیم $[G_i,G_j]=1$

تعریف ۳۴.۱.۱. زیرگروه تولید شده توسط مجموعه‌ی همه زیرگروه‌های نرمال مینیمال G را سوکل[۳] G نامیده و با نماد $\mathrm{Soc}(G)$ نشان می‌دهیم.

نکته ۳۵.۱.۱. واضح است که $\mathrm{Soc}(G)$ زیرگروه مشخصه‌ی G است.

قضیه ۳۶.۱.۱. *فرض کنید* G *یک گروه باشد. زیرگروه‌های نرمال مینیمال* K_1، ...، K_n *وجود دارد به طوریکه* $Soc\ (G)=K_1\times...\times K_n$.

[۱] product action
[۲] central product
[۳] socle

برهان. به [۵، قضیه A.۴.۳] مراجعه شود. □

تعریف ۳۷.۱.۱. گروه G را تقریبا ساده گوییم هرگاه $\mathrm{Soc}(G)$ ساده و غیرآبلی باشد.

فرض کنید G یک گروه اولیه باشد. در مرجع [۲۰] ثابت شده است که هشت خانواده از این گروه‌ها وجود دارد. همچنین اگر قرار دهیم $N = \mathrm{Soc}(G)$، آنگاه به طور کامل توضیح داده شده است که برای پنج دسته از این گروه‌ها N تنها زیرگروه نرمال مینیمال آن‌ها می‌باشد. گروه‌های تقریبا ساده یکی از این پنج گروه می‌باشد.

لم ۳۸.۱.۱. *گروه G تقریبا ساده است اگر و فقط اگر یک گروه ساده غیر آبلی T موجود باشد بطوری که $T \leq G \leq \mathrm{Aut}(T)$.*

برهان. فرض کنید G یک گروه تقریبا ساده باشد لذا $\mathrm{Soc}(G) = T$ به طوری که T یک گروه ساده غیر آبلی است. چون T ساده است لذا $Z(T) = ۱$ بنابراین $T \cong Inn(T)$. لذا $Inn(T) \leq G$. از طرفی $C_G(T) \lhd N_G(T)$. لذا $C_G(T) \lhd G$. چون T تنها زیرگروه نرمال مینیمال G است لذا $C_G(T) = ۱$. اکنون عمل مزدوج G روی T را در نظرمی‌گیریم، هسته‌ی این عمل $C_G(T)$ می‌باشد لذا $G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$.

اکنون فرض کنید T یک گروه ساده باشد و $T \leqslant G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$. می‌دانیم $T \cong Inn(T)$ و $Inn(T) \lhd \mathrm{Aut}(T)$. لذا با توجه به اینکه T یک گروه ساده است، T یک زیرگروه نرمال مینیمال از G است. فرض کنید H زیرگروه نرمال مینیمال دیگری باشد، لذا $H \cap T = ۱$ و بنابراین $H \leq C_{\mathrm{Aut}(T)}(T)$. ولی بنا به رابطه‌ی $\dfrac{\mathrm{Aut}(T)}{C_{\mathrm{Aut}(T)}(T)} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(T)$ داریم $C_{\mathrm{Aut}(T)}(T) = ۱$. لذا $H = ۱$ و T تنها زیرگروه نرمال مینیمال G است. بنابراین $\mathrm{Soc}(G) = T$ و حکم ثابت می‌شود. □

۲.۱ گروه‌های خطی ، آفین و ماتیو گروه‌ها

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه همه ماتریس‌های وارون پذیر $n\times n$ را که درایه‌های آن در F باشد با $\mathrm{GL}(n,F)$ نشان می‌دهیم.(دترمینان هر عضو $\mathrm{GL}(n,F)$ ناصفر است.) مجموعه‌ی همه‌ی اعضایی از $\mathrm{GL}(n,F)$ که دترمینان آنها یک است تشکیل یک زیرگروه می‌دهند که با $\mathrm{SL}(n,F)$ نمایش می‌دهیم. این گروه را، گروه خطی خاص می‌نامند.

اگر F یک میدان دلخواه باشد، گروه خارج قسمتی $\dfrac{\mathrm{GL}(n,F)}{\mathrm{Z}(\mathrm{GL}(n,F))}$ را گروه خطی عام تصویری[۱] می‌نامند و با نماد $\mathrm{PGL}(n,F)$ نشان می‌دهند. همچنین گروه $\dfrac{\mathrm{SL}(n,F)}{\mathrm{Z}(\mathrm{GL}(n,F))\cap \mathrm{SL}(n,F)}$ را گروه خطی خاص تصویری[۲] می‌نامند و آن را با $\mathrm{PSL}(n,F)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد، مجموعه‌ی همه تبدیلات خطی وارون پذیر روی V را با $\mathrm{GL}(V,F)$ یا $\mathrm{GL}(V)$ می‌نامیم. این گروه را گروه خطی عام می‌گوییم.

واضح است که $\mathrm{GL}(n,F)\cong \mathrm{GL}(V)$. (کافی است پایه ای برای V انتخاب کنیم و هر تبدیل خطی V را به ماتریس آن تبدیل خطی در آن پایه نظیر کنیم.)

تبصره ۳.۲.۱. اگر $|F|=q$ آنگاه گروه‌های $\mathrm{PGL}(n,F)$ و $\mathrm{PSL}(n,F)$ را با نمادهای $\mathrm{PGL}(n,q)$ و $\mathrm{PSL}(n,q)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۴.۲.۱. *اگر F میدان دلخواهی با بیش از سه عضو باشد آنگاه گروه $\mathrm{PSL}(۲,F)$ ساده است.*

برهان. به [۲۴، نتیجه ۱۰.۲.۳] مراجعه شود. □

قضیه ۵.۲.۱. *پایدار ساز گروه‌های $\mathrm{PSL}(۲,۵)$، $\mathrm{PSL}(۲,۷)$، $\mathrm{PSL}(۲,۱۱)$ به ترتیب $A_۴$، $S_۴$، $A_۵$ می‌باشند.*

[۱] projective general linear group
[۲] projective special general linear group

برهان. به [۴] مراجعه شود. □

تعریف ۶.۲.۱. یک تبدیل شبه خطی فضای برداری V عبارت است از نگاشت $T : V \longrightarrow V$ با خواص زیر:

۱) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

۲) $T(\lambda v) = \lambda^{\tau} T(v)$

به طوری که u و v بردارهای دلخواهی از V می‌باشند و τ یک خودریختی میدان F است و $\lambda \in F$ عضوی دلخواه می‌باشد.

لم ۷.۲.۱. *مجموعه‌ی تبدیلات شبه خطی وارون پذیر V دارای ساختار گروه است.*

برهان. به [۲۵، لم ۶.۳] مراجعه شود. □

تعریف ۸.۲.۱. گروه تبدیلات شبه خطی وارون پذیر V را با نماد $\Gamma\mathrm{L}(V,F)$ نمایش داده و آن را گروه شبه خطی می‌نامیم. همچنین گروه $\dfrac{\Gamma\mathrm{L}(V,F)}{\mathrm{Z}(\mathrm{GL}(n,F))}$ را گروه شبه خطی تصویری نامیده با $\mathrm{P}\Gamma\mathrm{L}(V,F)$ نمایش می‌دهیم.

همانند قبل اگر بعد V برابر n و $|F| = q$ از نمادهای $\Gamma\mathrm{L}(n,q)$ و $\mathrm{P}\Gamma\mathrm{L}(n,q)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F با بعد n باشد. در این صورت جایگشت‌هایی به فرم $t : V \longrightarrow V$ با ضابطه‌ی $x \longrightarrow xA + c$ که $A \in GL(n,F)$ و $c \in V$ تشکیل یک گروه می‌دهد که به آن گروه آفین[۱] می‌گویند و با نماد $\mathrm{AGL}(n,F)$ نمایش داده می‌شوند. اگر $|F| = q$ آنگاه از نماد $\mathrm{AGL}(n,q)$ استفاده می‌کنیم.

[۱] Affine