بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

نظریه انحرافات بزرگ در فرآیندهای تصادفی؛ به خصوص فرآیندهای پواسون خوشه‌ای

سخنران: حسین محمدی

زمان: شنبه ۲۷ /۱۰ /۱۳۹۳ ساعت ۳۰ : ۱۳ بعدازظهر
مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر صفیه محمودی

۲– دکتر علی رجالی

۳– دکتر افشین پرورده

۴– دکتر زهرا صابری

چکیده

قضایای حدی یکی از مهم‌ترین نتیجه‌های نظری در نظریه احتمال هستند که از جمله قضیه‌های مهم آن قضیه حد مرکزی و قانون اعداد بزرگ است. به بیان ساده، قضیه حد مرکزی بیان می‌کند که توزیع مجموع تعداد زیادی از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با واریانس متناهی، به سمت یک متغیر تصادفی مشخص میل می‌کند که تقریبا دارای توزیع نرمال است. و در قانون اعداد بزرگ شرایطی بیان می‌شود که تحت آن شرایط میانگین دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با احتمال ۱، به متوسط امید ریاضی خود همگرا باشند. قضیه حد مرکزی نسبت به قانون اعداد بزرگ اطلاعات بیشتری در مورد رفتار میانگین دنباله ارائه می‌دهد اما در مورد نحوه همگرایی توزیع دنباله چیزی بیان نمی‌کند.

در این پایان‌نامه به نظریه انحرافات بزرگ پرداخته می‌شود که در آن به نحوه همگرایی و یا سرعت همگرایی چنین دنباله‌هایی می‌پردازد که در بسیاری از شرایط در عمل از اهمیّت به‌سزایی برخوردار است و به همین دلیل نیز در مسائل کاربردی از این روش استفاده زیادی شده است همچنین در این پایان‌نامه به فرآیند پواسون خوشه‌ای و فرآیند هاکس هم پرداخته می‌شود که این فرآیندها حالت خاصی از فرآیندهای خوشه‌ای هستند. بیشتر نتایج این پایان‌نامه براساس مقالات [۶] و [۵۴] نوشته شده است.

واژه‌های کلیدی : انحرافات بزرگ، فرآیندهای پواسون خوشه‌ای، فرآیندهای هاکس

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

نظریه انحرافات بزرگ در فرآیندهای تصادفی؛ به خصوص فرآیندهای پواسون خوشه‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار

حسین محمدی

استاد راهنما
دکتر صفیه محمودی

دی ۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار آقای حسین محمدی
تحت عنوان

نظریه انحرافات بزرگ در فرآیندهای تصادفی؛ به خصوص فرآیندهای پواسون خوشه‌ای

در تاریخ ۲۷ /۱۰ /۱۳۹۳ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما	دکتر صفیه محمودی
۲– استاد مشاور	دکتر علی رجالی
۳– استاد داور۱	دکتر افشین پرورده
۴– استاد داور۲	دکتر زهرا صابری

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر فرید بهرامی

من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد (ص) و خاندان پاک او

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللهّ عزّ و جلّ ": از پدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

از استاد با کمالات و شایسته؛ سرکار خانم دکتر صفیه محمودی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

از استاد صبور و فرهیخته، جناب آقای دکتر علی رجالی، که زحمت مشاوره این رساله را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید؛

و از اساتید فرزانه و دلسوز؛ جناب آقای دکتر افشین پرورده و سرکار خانم دکتر زهرا صابری که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

حسین محمّدی

دی‌ماه ۱۳۹۳

به نام پروردگار هستی بخش، آغاز و با نام او این دست نوشته حقیر را تقدیم می کنم:

به پدر و مادر عزیزتر از جانم که همه موفقیت خود را مدیون دعاهای آنها هستم.

به استاد گرامی و دلسوز سرکار خانم دکتر صفیه محمودی که به واقع حق استادی خود را ایفا نمودند.

و به برادران عزیز و خواهران مهربانم، که در این راه همیشه باعث دلگرمی من بودند.

من مدیون تمامی محبت های شما هستم.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جدول‌ها

چکیده

قضایای حدی یکی از مهم‌ترین نتیجه‌های نظری در نظریه احتمال هستند که از جمله قضیه‌های مهم آن قضیه حد مرکزی و قانون اعداد بزرگ است. به بیان ساده، قضیه حد مرکزی بیان می‌کند که توزیع مجموع تعداد زیادی از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با واریانس متناهی، به سمت یک متغیر تصادفی مشخص میل می‌کند که تقریبا دارای توزیع نرمال است. و در قانون اعداد بزرگ شرایطی بیان می‌شود که تحت آن شرایط میانگین دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با احتمال ۱، به متوسط امید ریاضی خود همگرا باشند. قضیه حد مرکزی نسبت به قانون اعداد بزرگ اطلاعات بیشتری در مورد رفتار میانگین دنباله ارائه می‌دهد اما در مورد نحوه همگرایی توزیع دنباله چیزی بیان نمی‌کند.

در این پایان‌نامه به نظریه انحرافات بزرگ پرداخته می‌شود که در آن به نحوه همگرایی و یا سرعت همگرایی چنین دنباله‌هایی می‌پردازد که در بسیاری از شرایط در عمل از اهمیّت به‌سزایی برخوردار است و به همین دلیل نیز در مسائل کاربردی از این روش استفاده زیادی شده است همچنین در این پایان‌نامه به فرآیند پواسون خوشه‌ای و فرآیند هاکس هم پرداخته می‌شود که این فرآیندها حالت خاصی از فرآیندهای خوشه‌ای هستند. بیشتر نتایج این پایان‌نامه براساس مقالات [۶] و [۵۴] نوشته شده است.

واژه‌های کلیدی : انحرافات بزرگ، فرآیندهای پواسون خوشه‌ای، فرآیندهای هاکس

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در ابتدا برای روشن شدن مفهوم نظریه انحرافات بزرگ[۱] به بیان مثالی پرداخته می‌شود. سکه سالمی در نظرگرفته شود که به دفعات پرتاب می‌شود. نتیجه پرتاپ iامین سکه با X_i، رخداد رو با ۱ و رخداد پشت با ۰ نشان داده می‌شود. $\overline{X}_n$ میانگین X_iها بعد از پرتاب nامین سکه در نظر گرفته می‌شود، که به صورت زیر خواهد بود :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

واضح است که مقدار $\overline{X}_n$ همواره بین ۰ و ۱ است. با توجه به قانون قوی اعداد بزرگ[۲]، هر چقدر مقدار n بزرگتر شود، با احتمال ۱، $\overline{X}_n$ به $E[X_1]$ نزدیکتر خواهد شد. همچنین براساس قضیه حد مرکزی[۳]، $\overline{X}_n$ دارای توزیع نرمال مجانبی حول ۵٪ به ازای مقادیر بزرگ n است.

قضیه حد مرکزی نسبت به قضیه اعداد بزرگ اطلاعات بسیاری را می‌تواند در مورد رفتار $\overline{X}_n$ ارائه دهد. مثلا با استفاده از قضیه حد مرکزی می‌توان توزیع مجانبی $\overline{X}_n$ یا $P(\overline{X}_n > x)$ محاسبه شود. در واقع قضیه حد مرکزی هر چند که در مورد نحوه همگرایی توزیع دنباله وقتی $n \to \infty$ چیزی بیان نمی‌کند، اما اطلاعاتی در مورد نحوه توزیع داده‌ها در نزدیکی نقطه حدی در اختیار می‌گذارد. روش‌های انحرافات بزرگ به نحوهٔ همگرایی و یا سرعت همگرایی چنین احتمالاتی می‌پردازد، که در بسیاری از شرایط در عمل از اهمیّت به‌سزایی برخوردار است و به همین دلیل نیز در مسائل کاربردی از این روش استفاده زیادی شده است. به خصوص در مورد احتمال رخداد پیشامدهای نادر که با بزرگتر شدن n به صفر نزدیک می‌شود. سرعت همگرایی در تصمیم‌گیری بسیار مهم است به طور مثال احتمال ورشکستگی یک

[۱] Large Deviations Theory

[۲] The Strong Law of Large Numbers

[۳] Central Limit Theorem

شرکت بیمه می‌تواند از جمله این اتفاقات باشد.
ساختار این پایان‌نامه به صورت زیر تدوین شده است.
در فصل ۲ ابتدا با بیان مثال‌هایی نظریه انحرافات بزرگ تشریح می‌شود و در بخش پایانی این فصل، اصل انحرافات بزرگ توضیح داده می‌شود. فصل ۳ را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد که در بخش اول فرآیند پواسون خوشه‌ای و فرآیند هاکس تعریف و خصوصیات آن‌ها بیان می‌شوند و در بخش دوم اصل انحرافات بزرگ عددی و مسیر نمونه‌ای، برای این فرآیندها بیان می‌شوند. در فصل ۴ ابتدا درستی برخی از قضایای بیان شده در فصل‌های قبل، با شبیه‌سازی نشان داده می‌شود و در ادامه فرآیند پواسون خوشه‌ای و فرآیند هاکس شبیه‌سازی می‌شود و با استفاده از آن درستی برخی از روابط فصل‌های قبل به صورت عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲.۱ تاریخچه

مفهوم نظریه انحرافات بزرگ اولین بار در سال ۱۹۳۲ توسط اسشر[۴] [۱۸] که علاقه‌مند به تجزیه و تحلیل احتمال خطر در صنعت بیمه بود، به کار برده شد. همچنین نتایج انحرافات بزرگ برای مجموع متغیرهای تصادفی مستقل توسط کرامر[۵] [۱۱] در سال ۱۹۳۸، و برای متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع توسط سانوف[۶] [۴۸] در سال ۱۹۵۷ بیان شد. البته این نظریه به شیوه‌ای که امروزه می‌شناسیم توسط وارادان[۷] [۵۵] در سال ۱۹۶۶ معرفی شد.
تعمیم نتایج نظریه انحرافات بزرگ به فرآیندها و زنجیرهای مارکف در مقالات متعددی، از جمله دونسکر و وارادان[۸] [۱۴–۱۶] و گارتنر[۹] [۲۱] بیان شده است. همچنین وارادان [۵۳] در سال ۲۰۰۳ در مبحث قدم زدن تصادفی نظریه انحرافات بزرگ را وارد کرد که در سال ۲۰۱۲ بروکف و موگولسکی[۱۰] [۷] هم در این زمینه به تحقیق پرداختند. البته در زمینه انحرافات بزرگ افراد دیگری همچون الیس[۱۱] [۱۷]، دمبو و زیتونی[۱۲] [۱۳]، فنگ و کرتز[۱۳] [۱۹] نیز کارهای مهمی انجام داده‌اند.
با توجه به اسناد چاپی موجود، در سال ۱۷۶۷ میچل[۱۴] [۳۲] برای اولین بار در ستاره‌شناسی از ویژگی‌های فرآیند پواسون استفاده کرد. اما استفاده از نام فرآیند پواسون، توسط فرای[۱۵] [۲۰] به سال ۱۹۲۸ باز می‌گردد. همچنین

[۴] Esscher
[۵] Cramer
[۶] Sanov
[۷] Varadhan
[۸] Donsker and Varadhan
[۹] Gärtner
[۱۰] Borovkov and Mogulskii
[۱۱] Ellis
[۱۲] Dembo and Zeitouni
[۱۳] Feng and Kurtz
[۱۴] Michell
[۱۵] Fry

مطالعه در مورد فرآیندهای خوشه‌ای از سال ۱۹۳۹ توسط نیمن[۱۶] [۳۵] آغاز شد و در سال‌های ۱۹۴۹ و ۱۹۵۲ به ترتیب توسط توماس[۱۷] [۵۱]، و نیمن و اسکات[۱۸] [۳۶] توسعه یافت [۲۳].

فرآیندهای پواسون خوشه‌ای[۱۹] یکی از مهمترین فرآیندهای نقطه‌ای هستند [۱۲، ۳۰] . فرآیندهای پواسون خوشه‌ای بسیار متنوع هستند که از میان آن‌ها فرآیند هاکس[۲۰] دارای اهمیت و کاربرد بیشتری است. کاربرد فرآیند پواسون خوشه‌ای در کیهان شناسی، بوم شناسی و علم بیماری‌های واگیردار دیده می‌شود. از جمله نیمن و اسکات [۳۷] ، بریکس و چادوف[۲۱] [۸] و مولر[۲۲] [۲۸، ۲۹] به این فرآیند به صورت مفصل پرداخته‌اند. کاربرد فرآیندهای هاکس به ویژه برای برنامه‌های لرزه‌نگاری است، در واقع آن‌ها به طور گسترده‌ای از مدل‌های آماری برای مطالعه فعالیت‌های منظم سری‌های زلزله استفاده کردند [۳۸، ۴۰، ۴۱، ۵۲، ۵۶].

فرآیندهای هاکس همچنین کاربردهایی در علوم اعصاب دارند که توسط جانسون[۲۳] [۲۶] در سال ۱۹۹۶ بیان شد. به تازگی کاربردهای جدیدی از فرآیندهای هاکس در امور مالی [۲۲] و مدل سازی DNA [۱۰] مطرح شده‌اند.

۳.۱ تعاریف و پیش‌نیازها

در این بخش تعاریف و مفاهیم اولیه بیان می‌شوند که خود به دو بخش کلی تقسیم می‌شود. بخش اول مطالبی در مورد فرآیندهای تصادفی است و در بخش دوم مقدماتی از آنالیز حقیقی بیان خواهد شد.

۱.۳.۱ فرآیندهای نقطه‌ای

فرآیندهای نقطه‌ای، مدل‌هایی را برای الگوهای بی‌قاعده از نقاط ارائه می‌دهند. این نظریه در پاسخ به مسایل متعدد فیزیک، زیست‌شناسی و نظریه صف توسعه یافته است مرحله جدید نظریه از ۱۹۶۰ تا ۱۹۷۵ توسط دانشمندانی همچون کالنبرگ[۲۴]، کرستان[۲۵]، کریکبرگ[۲۶]، متس[۲۷] و ریل و ناردزوسکی[۲۸] بسط یافته است. به عنوان مثال مکان درختان در جنگل یا مراکز اجسام کروی نمونه‌ای از مثال‌های فرآیندهای نقطه‌ای در علوم زیستی هستند.

[۱۶] Neyman

[۱۷] Thomas

[۱۸] Neyman and Scott

[۱۹] Poisson Cluster Processes

[۲۰] Hawkes Process

[۲۱] Brix and Chadoeuf

[۲۲] Møller

[۲۳] Johnson

[۲۴] Kallenberg

[۲۵] Kerstan

[۲۶] Krickeberg

[۲۷] Matthes

[۲۸] Ryll and Nardzewski

فرآیندهای نقطه‌ای حالت خاصی از مجموعه‌های تصادفی[۲۹] به حساب می‌آیند. به این معنا که برای هر نقطه خاص x از فرآیند، پیشامد آن‌که این نقطه متعلق به یک مجموعه باشد، وابسته به شانس است. مجموعه‌های تصادفی به عنوان تعمیمی از متغیرهای تصادفی به کار می‌روند [۳۱]. اگر $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ یک فضای احتمال باشد، متغیرهای تصادفی به عناصر تک عضوی $\mathbb{R}$ از اعضای Ω نسبت داده می‌شوند، در حالی که مجموعه‌های تصادفی به زیرمجموعه‌های ناتهی $\mathbb{R}$ که از عناصر Ω ساخته شده‌اند، نسبت داده می‌شوند.
شبیه هر پدیده تصادفی، یک فرآیند نقطه‌ای را نیز می‌توان با تعریف فضای پیشامدهای ممکن و در نتیجه مشخص کردن احتمال‌های پیشامدهای متفاوت، توصیف کرد. فضای نمونه یک فرآیند نقطه‌ای، یک فضای نمایی شامل تمام پیکربندی‌های نقاط متناهی به شکل $X = \{x_۱, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ با $n = ۰, ۱, ۲, \dots$ است. برای اطلاع در مورد فضای نمایی می‌توان به [۹] مراجعه کرد.

تعریف ۱.۳.۱ اندازه شمارشی[۳۰]، یک اندازه با مقادیر صحیح نامنفی است که روی هر مجموعه فشرده، دارای یک مقدار متناهی است.

فضای تحقق یک فرآیند نقطه‌ای در $\mathbb{R}^d$، $\mathbb{N}$ یعنی مجموعه‌ی همه اندازه‌های شمارشی روی $\mathbb{R}^d$ است [۹]. یک پیشامد پایه مربوط به فرآیند نقطه‌ای، پیشامد آن است که دقیقاً k نقطه در ناحیه A وجود داشته باشد یعنی

$$\{N(A) = k\} = \{N \in \mathbb{N} : N(A) = k\}$$

برای مجموعه‌ی فشرده $A \subset \mathbb{R}^d$ و عدد صحیح $k = ۰, ۱, ۲, \dots$ به قسمی که $N(A)$ تعداد نقاط داخل مجموعه A است.

تعریف ۲.۳.۱ خانواده $\mathcal{M}$ از زیرمجموعه‌های Ω را یک σ-جبر گویند هرگاه،

۱) $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

۲) اگر $E \in \mathcal{M}$، آن‌گاه $E^c \in \mathcal{M}$.

۳) اگر $\{E_n\}_{n=۱}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ آن‌گاه $\bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$.

در این صورت $(\Omega, \mathcal{M})$ را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathcal{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در Ω گویند.

تعریف ۳.۳.۱ اگر $\mathbb{N}$ مجموعه همه اندازه‌های شمارشی روی $\mathbb{R}^d$ باشد و $\mathcal{N}$، σ-جبر زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ باشد که به وسیله همه پیشامدهای به فرم $\{N(A) = k\}$ تولید می‌شود، فضای $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$ را فضای پیشامد[۳۱] یک فرآیند نقطه‌ای در $\mathbb{R}^d$ می‌نامند.

---

[۲۹] Random Sets

[۳۰] Counting Measure

[۳۱] Space of Outcome

یک فرآیند نقطه‌ای را می‌توان با استفاده از اندازه شمارشی $N = N_X$، به عنوان نگاشت اندازه‌پذیر $N : \Omega \to \mathbb{N}$ از یک فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ به فضای پیشامد $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$ تعریف کرد. حال دو نکته در مورد فرآیندهای نقطه‌ای بیان می‌شود:

۱) عبارت ''فرآیند''، این‌جا یک تکامل تدریجی پویا حول زمان را نتیجه نمی‌دهد. از نظر تاریخی، محققان اولیه در این نظریه، درصدد دنباله‌های تصادفی از پیشامدهای زمانی، نظیر مثال‌های از ورود تماس‌های تلفنی در مراکز تلفن، ورود مشتریان در یک صف و غیره بودند. به هر حال، غالباً یک تصور از زمان در کاربردهای فرآیندهای نقطه‌ای در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$، وجود ندارد. اصطلاح ''میدان نقطه‌ای تصادفی'' یک عبارت دقیق‌تری خواهد بود، که در اشتویان[۳۲] [۴۹] به کار برده شده است.

۲) فرآیندهای نقطه‌ای را می‌توان به عنوان مجموعه‌های تصادفی از نقاط گسسته یا به عنوان اندازه‌های تصادفی شمارش موجود در ناحیه‌های فضایی، در نظر گرفت.

۲.۳.۱ فرآیندهای دوجمله‌ای

ابتدایی‌ترین مثال برای یک فرآیند نقطه‌ای، فرآیندی است که شامل یک نقطه باشد. یک نقطه تصادفی x که به‌طور یکنواخت در مجموعه فشرده $W \subset \mathbb{R}^d$ توزیع می‌شود، نقطه‌ای است که

$$P(x \in A) = \frac{\nu_d(A)}{\nu_d(W)}$$

برای تمام زیرمجموعه‌های بورل A از $W \subset \mathbb{R}^d$ وقتی ν_d اندازه لبگ مجموعه‌ی A در $\mathbb{R}^d$ است و اگر $d = 2$ باشد، این مقدار برابر مساحت ناحیه A است که همواره با $|A|$ نشان‌داده می‌شود.

یک نقطه تصادفی به طور یکنواخت توزیع شده، یک الگوی تصادفی نسبتاً جزیی است. با این وجود n نقطه تصادفی مستقل و به طور یکنواخت توزیع شده را می‌توان به شکل یک فرآیند نقطه‌ای دوجمله‌ای با n نقطه تولید کرد. یک چنین فرآیندی، توسط n نقطه مستقل $x_1, \dots, x_n$ به طور یکنواخت توزیع شده در مجموعه فشرده W شکل می‌گیرد. بنابراین برای زیر مجموعه‌های بورل $A_1, \dots, A_n$ داریم

$$P(x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n) = P(x_1 \in A_1) \cdots P(x_n \in A_n) = \frac{\nu_d(A_1) \dots \nu_d(A_n)}{\nu_d(W)^n}$$

در نتیجه الگوی نقطه‌ای $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ از یک فرآیند نقطه‌ای دوجمله‌ای در $W \subset \mathbb{R}^d$ است، اگر X به‌طور یکنواخت در W^n توزیع شده باشد.

اگر $N(B)$ نشان‌دهنده تعداد نقاطی از این فرآیند باشند که درون ناحیه $B \subset \mathbb{R}^2$ قرار می‌گیرند، یعنی

$$N(B) = \sum_{i=1}^{n} I\{x_i \in B\}$$

[۳۲] Stoyan

به آسانی دیده می‌شود که $N(B)$ دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و $p = \frac{|B\cap W|}{|W|}$ است. توجه کنید که متغیرهای شمارشی $N(B)$ برای زیرمجموعه‌های متفاوت B مستقل نیستند. اگر $B_۱$ و $B_۲$ مجزا باشند در این‌صورت داریم

$$N(B_۱) + N(B_۲) = N(B_۱ \cup B_۲) \leq n$$

بنابراین $N(B_۱)$ و $N(B_۲)$ به یکدیگر وابسته هستند. در حقیقت، توزیع توأم $(N(B_۱), N(B_۲))$ توزیع چندجمله‌ای روی n آزمایش با احتمال‌های موفقیت $(p_۱, p_۲)$ است وقتی که $p_i = \frac{|B_i\cap W|}{|W|}$.

۳.۳.۱ فرآیندهای نقطه‌ای علامت‌دار

با پیوستن یک مشخصه به هر نقطه از فرآیند، یک فرآیند نقطه‌ای علامت‌دار حاصل می‌شود. در نتیجه یک فرآیند نقطه‌ای علامت‌دار روی $\mathbb{R}^d$، یک دنباله تصادفی $\{(x_n, m_n)\}$ از نقاط x_nی که با هم، فرآیند نقطه‌ای (غیر علامت‌دار) در $\mathbb{R}^d$ را تشکیل می‌دهند و m_n که نشانه‌های مرتبط با هر x_n است را می‌سازد. مثال‌های خاصی از فرآیند نقطه‌ای علامت‌دار به صورت زیر هستند:

۱) x مرکز یک ذره، m حجم ذره،

۲) x موقعیت یک درخت، m قطر تنه‌ی درخت در فاصله ۱ متری از سطح زمین،

۳) x مرکز یک اتم، m نوع اتم.

نشانه‌ها، اساساً می‌توانند متغیرهای پیوسته باشند، همان‌گونه که در دو مثال اول بالا می‌بینیم یا انواع نشانگرها (مثال سوم) باشند.

تعریف ۴.۳.۱ فرآیند نقطه‌ای علامت‌دار روی فضای S با نشانه‌هایی در فضای $\mathcal{M}$، یک فرآیند نقطه‌ای Y روی $S\times M$ است به قسمی که برای تمام مجموعه‌های فشرده $K \subset S$، با احتمال یک داشته باشیم $N_Y(K\times \mathcal{M}) < \infty$.

باید توجه داشت که فضای نشانه‌های $\mathcal{M}$ می‌تواند بسیار کلی باشد. ممکن است یک مجموعه‌ای متناهی یا شاید یک فاصله پیوسته از اعداد حقیقی و شاید یک فضای پیچیده‌تر مانند مجموعه تمام چندضلعی‌های محدب باشد. اگر Y یک فرآیند نقطه‌ای علامت‌دار روی فضای S با فضای نشانه $\mathcal{M}$ باشد، می‌توان Y را یک فرآیند نقطه‌ی روی فضای $S \times \mathcal{M}$ در نظر گرفت.

۴.۳.۱ فرآیندهای تصادفی

تعریف ۵.۳.۱ خانواده‌ی متغیرهای تصادفی $\{X_t, t \in T\}$ را که روی یک فضای احتمال تعریف شده‌اند، یک فرآیند تصادفی با فضای پارامتر T و فضای وضعیت S می‌گویند؛ هرگاه S مجموعه تمام مقادیری باشد که به ازای هر $t \in T$ متغیر تصادفی X_t می‌تواند اختیار کند.

تعریف ۶.۳.۱ فرآیند تصادفی $\{X_t, t \in T\}$ یک فرآیند مارکف نامیده می‌شود، هرگاه برای همه مقادیر $x \in S$، $x_0, \dots, x_t$ و $t \in T$،

$$P\{X_{t+1} = x | X_0 = x_0, ..., X_t = x_t\} = P\{X_{t+1} = x | X_t = x_t\}.$$

یعنی، فرآیند مارکف دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی است که برای هر t با فرض معلوم بودن X_t، متغیر تصادفی X_{t+1} به طور شرطی، مستقل از $X_0, X_1, ...X_{t-1}$ است [۴۶].

تعریف ۷.۳.۱ زنجیرهای مارکوف حالت خاصی از فرآیندهای مارکوف هستند که در آن هم فضای پارامتر T و هم فضای وضعیت فرآیند مجموعه‌های گسسته هستند.

تعریف ۸.۳.۱ فرآیند تصادفی $\{N(t), t \geq 0\}$ را یک فرآیند شمارشی می‌نامند، هرگاه در شرایط زیر صدق کند،

۱) مقادیر $N(t)$ صحیح باشند.

۲) $N(t) \geq 0$.

۳) اگر $t_1 < t_2$، آن‌گاه $N(t_1) \leq N(t_2)$.

۴) برای $t_1 < t_2$، $N(t_2) - N(t_1)$ تعداد رخدادهای در فاصله $(t_1, t_2]$ باشد.

[۴۶]

تعریف ۹.۳.۱ فرآیند شمارشی دارای نموهای مستقل است، اگر تعداد پیشامدها در فاصله‌های زمانی جدا از هم، مستقل باشند. یعنی برای هر t و s تعداد پیشامدها تا زمان t، ($N(t)$) مستقل از تعداد پیشامدها بین زمان‌های t و $t+s$، ($N(t+s) - N(t)$) است.

تعریف ۱۰.۳.۱ یک فرآیند شمارشی دارای نموهای مانا است، هرگاه به ازای هر h و $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$، $(N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}))$ و $(N(t_1+h), \dots, N(t_n+h) - N(t_{n-1}+h))$ هم‌توزیع باشند.

فرآیند پواسون یک فرآیند شمارشی است که در حالت عملی، تعداد وقوع یک پیشامد خاص را در طول زمان می‌شمارد. مثال‌هایی از این نوع فرآیند عبارتند از ورود مشتریان به یک باجه، وقوع زلزله در یک ناحیه معین، قطع برق و غیره. این فرآیند یک ابزار مدل‌سازی بدیهی برای بسیاری از مسائل کاربردی است. این فرآیند نه تنها بسیاری از پدیده‌های اطراف زندگی بشر را مدل‌بندی می‌کند، بلکه امکان انجام تحلیل‌های ریاضی را هم فراهم می‌نماید. تعریف ریاضی این فرآیند به صورت زیر است :

تعریف ۱۱.۳.۱ فرآیند شمارشی $\{N(t), t \geq 0\}$ یک فرآیند پواسون با نرخ λ است، هرگاه:

۱) $N(0) = 0$،

۲) فرآیند دارای نموهای مستقل و مانا باشد،

۳) تعداد پیشامدها در هر فاصله دلخواه به طول t دارای توزیع پواسون با میانگین λt باشد. یعنی، به ازای هر $s, t \geq ۰$، رابطه زیر برای هر $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$، برقرار باشد :

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^n}{n!}.$$

[۴۶]

همچنین تعریف معادل دیگری از فرآیند پواسون به صورت زیر است.

تعریف ۱۲.۳.۱ فرآیند شمارشی $\{N(t), t \geq ۰\}$ یک فرآیند پواسون با نرخ λ نامیده می‌شود، اگر:

۱) $N(۰) = ۰$،

۲) فرآیند دارای نموهای مستقل و مانا باشد،

۳) $P(N(h) = ۱) = \lambda h + o(h)$، وقتی $h \to ۰$،

۴) $P(N(h) \geq ۲) = o(h)$، وقتی $h \to ۰$.

[۴۶]

تعریف ۱۳.۳.۱ اگر $\{N(t), t \geq ۰\}$ یک فرآیند پواسون و $\{Y_i\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع، و مستقل از فرآیند $\{N(t), t \geq ۰\}$ باشد، همچنین W_i زمان انتظار تا iامین رخداد فرآیند پواسون فرض شود، آن‌گاه دنباله از جفت‌های $(W_۱, Y_۱), (W_۲, Y_۲), \ldots, (W_n, Y_n)$ را فرآیند پواسون علامت‌دار[۳۳] نامند. [۵۰]

تعریف ۱۴.۳.۱ یک فرآیند را ایستا (ایستای اکید) نامند هرگاه

$$[X(t_۱), \ldots, X(t_n)] \stackrel{d}{=} [X(t_۱ + \tau), \ldots, X(t_n + \tau)] \quad \forall \tau \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t_۱, t_۲, \ldots, t_n \in T.$$

تعریف ۱۵.۳.۱ اگر Y یک فرآیند نقطه‌ای روی $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه آن را ارگودیک[۳۴] می‌نامند، هرگاه

۱) Y یک فرآیند ایستا با نرخ متناهی $E\left(N_Y(۰, ۱]\right)$ باشد

[۳۳] Marked Poisson Process

[۳۴] Ergodic

۲)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_Y(0,t]}{t} = E\left(N_Y(0,1]\right) \qquad a.s.$$

[۶]

۵.۳.۱ آنالیز حقیقی

تعریف ۱۶.۳.۱ اگر Ω یک مجموعه ناتهی باشد، گردایه τ از زیرمجموعه‌های Ω را یک توپولوژی بر روی Ω می‌نامند، هرگاه

۱) τ شامل مجموعه تهی و Ω باشد،

۲) τ شامل اجتماع هر تعداد (متناهی یا نامتناهی) از مجموعه‌های موجود در آن باشد،

۳) اشتراک هر دو عضو τ به τ تعلق داشته باشد،

در این‌صورت (Ω,τ) را یک فضای توپولوژیک، و اعضای τ را مجموعه‌های باز می‌نامند [۳].

مثال ۱۷.۳.۱ اگر $\Omega=\{a,b,c,d\}$ و $\tau_1=\{\Omega,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$، آنگاه τ_1 طبق تعریف ۱۶.۳.۱ یک توپولوژی بر روی Ω است.

تعریف ۱۸.۳.۱ اگر τ یک توپولوژی روی Ω باشد، آنگاه $A\subseteq\Omega$ بسته است هرگاه $\Omega-A$ مجموعه‌ای باز باشد. اشتراک همه مجموعه‌های بسته شامل A را با $\overline{A}$ نمایش داده و آن را بستار A می‌نامند. همچنین اجتماع تمام زیرمجموعه‌های باز A را با A° نمایش داده و آن را درون A می‌نامند. [۳]

تعریف ۱۹.۳.۱ مجموعه Ω یک فضای متری است، هرگاه به هر دو نقطه p و q از Ω عدد حقیقی $d(p,q)$ (فاصله از p تا q) طوری مربوط شده باشد که،

۱) برای هر $p\neq q$ داشته باشیم $d(p,q)>0$ و $d(p,p)=0$،

۲) $d(p,q)=d(q,p)$ به ازای هر $p,q\in\Omega$،

۳) به ازای هر $r,p,q\in\Omega$، $d(p,q)\leq d(p,r)+d(r,q)$،

هر تابع برخوردار از این سه خاصیت یک تابع فاصله یا یک متر نام دارد [۳].

تعریف ۲۰.۳.۱ اگر Ω یک مجموعه و $\mathcal{M}$ یک σ-جبر روی Ω باشد، آنگاه یک اندازه (اندازه مثبت) روی Ω تابعی مانند $\mu:\mathcal{M}\to[0,\infty]$ است به طوری‌که