بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه تفرش

دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی ترمودینامیک هندسی سیاهچاله های BTZ با ثابت کیهان شناسی

استاد راهنما:

آقای دکتر بهروز میرزا

استاد مشاور:

آقای دکتر فیروز آرش

دانشجو:

علیرضا بهزادی مهر

زمستان ۱۳۸۹

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

و تمام کسانی که از صمیم قلب دوستشان دارم.

سپاس گزاری

مراتب سپاس و قدردانی خویش را از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر بهروز میرزا، که خالصانه و در نهایت سعه صدر با رهنمودهای ارزشمند و سازنده، اینجانب را در تدوین و نگارش پایان نامه مورد محبت خویش قرار داده اند، ابراز می دارم.

وهمچنین از جناب آقای دکتر فیروز آرش، استاد مشاور بزرگوارم، و همه اساتید محترم گروه فیزیک دانشگاه تفرش و دوست عزیزم آقای محمد حسین سازش کمال تشکر و قدردانی دارم. در آرزوی روزی که بتوانم حداقل قدری از زحمات این بزرگواران را جبران نمایم.

چکیده

در این پایان نامه نظریه راپنیر که درمورد افت و خیزهای ترمودینامیکی یک متریک در هندسه ریمانی است را معرفی می کنیم. متریک راپنیر برای گاز ایده ال یک متریک مسطح است و مکانیک آماری وابسته به آن غیر بر همکنشی است. ما هندسه ترمودینامیک بعضی از خانواده ی سیاهچاله ها را مورد بررسی قرار می دهیم. آن هندسه برای سیاهچاله های ریسنر – نوردستروم و BTZ مسطح است. در حالی که در میزان انحنای سیاهچاله ریسنر – نوردستروم پاد دو ستیه تکینگی وجود دارد. همچنین انحنای ترمودینامیکی سیاهچاله های کر و ریسنر – نوردستروم را در بالاتر از ۴ بعد بررسی می کنیم. در یک حالت ویژه نیز قانون اول ترمودینامیک را برای سیاهچاله BTZ در (۲+۱) بعد مورد بررسی قرارمی دهیم. ما با بررسی ثابت کیهان شناسی به عنوان یک پارامتر حالت متغیر هندسه ترمودینامیکی را به دست می آوریم.

کلید واژه: افت و خیزهای ترمودینامیک، ثابت کیهان شناسی، متریک راپنیر

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل ۱

مقدمه

در طی ۳۰ سال گذشته تحقیق در مورد نظریه ی سیاهچاله ها در نسبیت عام دلایل روشن و مهمی را مبنی بر وجود ارتباط عمیق بین گرانش، ترمودینامیک و مکانیک کوانتومی آشکار ساخته است. پایه و اساس این ارتباط ترمودینامیک سیاهچاله ها است. در همین راستا تحقیقات هاوکینگ[1] ثابت کرد که مساحت سیاهچاله ها هیچ گاه کاهش نمی یابد، یعنی تغیرات در سیاهچاله به طوری کلی در تمام فرآیند ها با افزایش مساحت اتفاق می افتد که این موضوع یادآور قانون دوم ترمودینامیک (آنتروپی در یک سیستم ترمودینامیکی بسته همواره افزایش می یابد) است. همچنین چهار قانون ترمودینامیک سیاهچاله ها با قوانین ترمودینامیک متناظر هستند. بر اساس این قوانین خصوصیات مهم ترمودینامیکی شامل دمای هاوکینگ که متناسب با سطح گرانشی سیاهچاله در افق، و آنتروپی که متناسب با سطح افق رویداد است بیان می شود [۶]. از طرف دیگر وینهولد[2] مفهوم هندسه در ترمودینامیک را معرفی کرد، که متریک آن از تعریف متریک ریمانی و بر حسب مشتق دوم انرژی داخلی نسبت به آنتروپی و دیگر متغیرهای ترمودینامیکی بدست می آید.

$$g_{ij}^{W} \equiv \partial_i \partial_j M \left(S, N^{\alpha}\right) \qquad (۱-۱)$$

همچنین راپنیر[3] یک متریک ریمانی بر اساس نظریه ی افت و خیزهای ترمودینامیکی معرفی کرد. در این نظریه فاصله ی بین سطوح مختلف که هر کدام مربوط به یک معادله حالت هستند با افت و خیزهای ترمودینامیکی ارتباط دارد. متریک راپنیر بنابر مشتق دوم آنتروپی سیستم نسبت به انرژی داخلی و دیگر متغیرهای ترمودینامیکی تعریف می شود.

$$g_{ij}^{R} = -\partial_i \partial_j S \left(M, N^{\alpha}\right) \qquad (۲-۱)$$

---

[1] Hawking
[2] Weinhold
[3] Ruppeiner

هندسه راپنیر و هندسه وینهولد با استفاده از تبدیلات همدیس به یکدیگر مربوط می شوند[۳] ،

$$ds^2 = g_{ij}^{R} dM^i dM^j = \frac{1}{T} g_{ij}^{W} dS^i dS^j \qquad (۳-۱)$$

یکی از نتایج کاربرد هندسه در ترمودینامیک شرح دادن تغیر فاز بر حسب تکینگی های انحنا و همچنین تفسیر انحنا به عنوان مقیاسی برای شدت بر هم کنش است. بسیاری از فیزیکدانان هندسه ترمودینامیک فیزیک سیاهچاله ها را مورد بررسی قرار داده اند. ما هندسه راپنیر و وینهولد را برای تعدادی از خانواده های سیاهچاله ها بررسی کرده ایم. و نقاط بحرانی و خواص ترمودینامیکی آنها را نشان داده ایم. همچنین قانون اول ترمودینامیک را برای سیاهچاله BTZ[۴] چرخان و باردار که به شکل $dM = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ$ است، در مورد خاصی بررسی کرده ایم. ابتدا در صورتی که ثابت کیهان شناسی را به عنوان یک پارامتر غیر متغیر در نظر بگیریم، قانون اول در (۲+۱) بعد به تناقض می رسد، که این تناقض را با توجه به این که ثابت کیهان شناسی را به عنوان یک پارامتر متغیر در نظر بگیریم و با اضافه کردن عبارت Θdl به قانون اول قابل رفع است[۲]. از آنجایی که ترکیب Θl دارای بعد انرژی است برای محاسبه متریک های راپنیر و وینهولد ثابت کیهان شناسی l را باید به عنوان پارامتر متغیر در نظر گرفت. اسکالر ریچی محاسبه شده از متریک راپنیر برای سیاهچاله های BTZ چرخان و باردار غیر صفر بوده ولی اسکالر ریچی در متریک وینهولد برای سیاهچاله BTZ چرخان صفر، و برای سیاهچاله BTZ باردار غیر صفر است. در سیاهچاله BTZ چرخان متریک راپنیر و ظرفیت گرمایی نقاط مربوط به تغیر فاز با هم سازگاری کامل دارند.

در این پایان نامه فصول مختلف به شرح زیر است: فصل دوم ابتدا با حل معادله ی انشتین آشنا می شویم و سپس تقسیم بندی سیاهچاله ها را معرفی می کنیم. در فصل سوم به معرفی متریک و انحنا پرداخته و همچنین متریک های شواتزشیلد، کر، ریسنر – نوردستروم و کر – نیومن را بررسی می کنیم. سپس چهار قانون ترمودینامیک سیاهچاله ها و تناظر آن با قوانین ترمودینامیک را بیان می کنیم. فصل چهارم را نیز با چگونگی رابطه ترمودینامیک و هندسه آغاز می کنیم و سپس متریک های راپنیر و وینهولد و همچنین بعضی از خواص ترمودینامیکی در سیاهچاله های BTZ، ریسنر – نوردستروم، کر و کر – نیومن را بررسی می کنیم. فصل پنجم را با بررسی قانون اول ترمودینامیک سیاهچاله ها برای سیاهچاله های BTZ باردار و چرخان در (۲+۱) بعد آغاز می کنیم. با استفاده از این که می توان ثابت کیهان شناسی را به عنوان یک پارامتر متغیر در نظر بگیریم، قانون اول را اصلاح می کنیم. در انتها با توجه به قانون اول اصلاح شده، متریک های راپنیر و وینهولد را برای سیاهچاله های BTZ باردار و چرخان محاسبه می کنیم. همچنین میزان انحنا متریک ها را محاسبه و نمودارهای میزان انحنا و ظرفیت گرمایی محاسبه شده را رسم و مقایسه می کنیم.

---

٤ Banados – Teitlboim – Zanelli

فصلç

نسبیت عام و سیاهچاله ها

فرضیه وجود سیاهچاله ها اولین بار توسط لاپلاس در سال ۱۷۹۵ مطرح گردید. او اجسام کلاسیکی را که دارای سرعت گریز بالاتر از سرعت نور باشند بررسی کرد. بعدها شواتز شیلد[۵] توانست معادلات میدان گرانشی انشتین[۶] را برای فضای خارجی یک جسم کروی بدون بار حل کند.

فیزیک سیاهچاله ها براساس نظریه ی نسبیت عام انشتین تعریف می گردد. نسبیت یک نظریه ی هندسی است. نسبیت عام، نظریه ای است که در سال ۱۹۱۵ توسط آلبرت انشتین مطرح شد. این نظریه تعمیمی بر نظریه نسبیت خاص بوده و برای تمامی ناظرها اعم از لخت و غیرلخت صادق است. در این نظریه فضا – زمان توسط هندسه ی ریمانی توصیف می شود و نیروی گرانش نیز یک تعبیر هندسی پیدا می کند. به این معنا که گرانش نامی است که به اثر انحنای فضا – زمان بر حرکت اشیا اطلاق می کنیم. آزمایش های بسیاری مؤید آن است که اگر نیروی جز گرانش در کار نباشد، همه ی اجسام با یک شتاب می افتند. در سال ۱۹۱۱ انشتین اصلی به عنوان اصل هم ارزی را مطرح کرد که نتایج حاصل از این اصل را می توان اینگونه بیان نمود:

۱- نوری که از زمین به بالا فرستاده می شود وقتی به ارتفاع بالا می رسد طول موجش افزایش می یابد.

۲- ساعت ها در نزدیکی سطح زمین کندتر کار می کنند.

۳- در اثر عبور پرتو نور از کنار یک جسم سنگین تر همانند خورشید پرتو نور خم خواهد شد.

معادلات ماکسول ارتباط میدان های الکتریکی، مغناطیسی، بار و جریان را نشان می دهند. معادلات میدان انشتین نیز ارتباط هندسه فضا - زمان، انرژی و تکانه را بیان می کنند. در این قسمت با روشی ساده معادلات انشتین را بدست می آوریم. سپس به سیاهچاله شواتز شیلد می پردازیم، و در انتها نیز سیاهچاله کر را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۲-۱- معادلات انشتین

۱ Schwartzschild
۲ Einstein field equation

گرانش نیوتنی با دو معادله بیان می شود. اولین معادله، مسیر ذره در فضا را توصیف می کند. اگر یک ذره تحت تأثیر میدان گرانشی با پتانسل φ شروع به حرکت کند، می توان نیروی وارد بر آن را به صورت زیر نوشت:

$$F = -m\nabla\varphi \qquad (۲-۱-۱)$$

این معادله با معادله ی بدست آمده برای ژئودزیک ها قابل مقایسه است:

$$\frac{D^2\eta^a}{D\tau^2} = R^{abcd}u^b u^c u^d \qquad (۲-۱-۲)$$

در معادله ی دیگر گرانش نیوتنی، جرم به عنوان یک منبع میدان گرانشی در نظر گرفته می شود:

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho \qquad (۲-۱-۳)$$

که در آن $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ لاپلاسین، مشتق مرتبۀ دوم نسبت به مختصات فضایی و ρ چگالی جرم است. در نسبیت خاص جرم و انرژی معادل یکدیگر می باشند، بنابراین می توان انتظار داشت که تانسور انرژی - تکانه به عنوان منبع میدان گرانشی در نظر گرفته شود و همچنین تانسور خمش [4] شامل مشتقات دوم متریک باشد.

$$R^a_{\ bcd} = \partial_c\Gamma^a_{bd} - \partial_d\Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed} \qquad (۲-۱-۴)$$

که در آن داریم،

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}\left(\frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bd}}{\partial x^c}\right) \qquad (۲-۱-۵)$$

با این فرض که مولفه های تانسور متریک نقش پتانسیل گرانشی را به عهده دارند و با توجه به معادله ی (۲-۱-۳) که رابطه بین رد[۷] $\nabla_i\nabla_j\varphi$ با چگالی جرم است، انتظار داریم که رد تانسور ریچی، جایگزین خوبی برای جمله ی سمت چپ معادله ی (۲-۱-۳) باشد:

$$R_{ab} \propto T_{ab} \qquad (۲-۱-۶)$$

اگر قانون پایستگی انرژی $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ را در نظر بگیریم، از عبارت فوق رابطه ای به صورت $\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0$ خواهیم داشت با در نظرگرفتن اتحاد بیانچی [۸] و مطلب بیان شده داریم:

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R \qquad (۲-۱-۷)$$

بنابراین برای برقرار بودن این اتحاد و همچنین قانون پایستگی انرژی باید تانسور مرتبه دوم جدیدی را به صورت $G_{\mu\nu}$ به نام تانسور انشتین[۹][1] معرفی می کنیم. $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ از رابطۀ $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ تبعیت می کند، بنابراین خواهیم داشت:

---

[۳] trace
[٤] Bianchi idetity
[٥] Einstion tensor

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \qquad (۲-۱-۸)$$

معادله ی بالا یک معادله حرکت برای متریک است. برای معادلات خلاء که میدانهای گرانشی در یک ناحیه از فضا – زمان خارج از منبع را نشان می دهند، یعنی جایی که جرم و انرژی حضور ندارد، معادلات انشیتن به صورت $G_{\mu\nu} = 0$ بیان خواهد شد. مقدار ثابت κ در حالت میدان های ضعیف و در مقایسه با معادله ی پواسن برابر $8\pi G$ به دست می آید (c=1).

۲-۲ سیاهچاله ها

آشنایی مقدماتی بشر با مفهوم سیاهچاله از سال ۱۷۸۴ شروع شد. در آن زمان کشیشی به نام میشل[۱۰] متوجه شد که اگر سرعت فرار از سطح یک ستاره بزرگتر از سرعت نور شود، آن ستاره غیرقابل رویت می گردد، او چنین ستاره هایی را ستاره سیاه نامید. ۱۵ سال بعد در سال ۱۷۹۹ لاپلاس[۱۱] رابطه بین شعاع و جرم ستاره های سیاه را بدست آورد. در آن زمان نظریه گرانشی نیوتن و مفهوم سرعت فرار از جاذبه، قطعی و واضح بودند.

در سال ۱۹۲۰ نیز چاندراسخار به این نتیجه رسیده بود که یک جسم غیرچرخان با جرم ۱/۴۴ برابر جرم خورشید، ناپایدار خواهد شد. اگر جرم یک کوتوله سفید از این حد جرمی بیشتر باشد ناپایدار خواهد شد و یک ستاره نوترونی را به وجود خواهد آورد. بر طبق نظریه ی نسبیت عام یک سیاهچاله به وسیله رمبش گرانشی شکل می گیرد و به یک حالت شبه ایستا تبدیل می شود. سیاهچاله ها تنها با سه پارامتر مشخص می شوند:

۱– جرم

۲– بار

۳– تکانه

این موضوع به عنوان قضیه بدون مو[۱۲][7] شناخته می شود. معمولا سه مشخصه سیاهچاله ها را در دسته های کلی زیر قرار می دهند:

الف) سیاهچاله های مانا[۱۳]، بدون بار الکتریکی که با حل های شواتر شیلد[۱۴]، قابل توصیف هستند.

ب) سیاهچاله های دارای بار الکتریکی که با حل «ریسنر – نوردستروم» قابل توصیف هستند.

ج) سیاهچاله های چرخان به نام کر.

د) سیاهچاله های چرخان و باردار به نام کر – نیومن.

---

[۶] Michel
[۷] laplace
[۸] Black holes have no hair
[۹] Static
[۱۰] Schwartzshild

شواتز شیلد نشان داد براساس معادله ی انشتین اگر چگالی ماده در یک ناحیه از حد مشخصی بیشتر شود، در اطراف این ناحیه مرزی به وجود خواهد آمد که هیچ چیز حتی نور نیز نمی تواند از آن فرار کند. برای تشکیل این مرز بی نهایت زمان مورد نیاز است، این مرز افق رویداد [۱۵] نامیده می شود. هاوکنیگ[۱۶] اثبات کرد که توپولوژی افق رویداد یک سیاهچاله غیرچرخان، کروی است. بررسی بیشتر این موضوع را در فصل بعد انجام می دهیم.

فصل ۳

متریک و انحنا

۳-۱- متریک

در حالت کلی فاصله بین دو نقطه با مختصه های x^μ، $x^\mu + dx^\mu$ به صورت زیر بیان می شود:

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad (۳-۱-۱)$$

که در آن $g_{\mu\nu}$ تانسور متریک است. در این پایان نامه از قرارداد جمع بر روی اندیس های تکراری استفاده می شود. به عنوان مثال در مورد کره دو بعدی داریم:

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \qquad (۳-۱-۲)$$

که در آن (θ,φ) مختصات قطبی کروی هستند. بنابراین مولفه های تانسور متریک عبارتند از:

$$g_{\theta\theta} = r^2 \quad , \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta \quad , \quad g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0 \qquad (۳-۱-۳)$$

معکوس تانسور متریک را با $g^{\mu\nu}$ نشان می دهند، به طوری که داریم،

[۱۱] Event horizon
[۱۲] Hawking

$$g_{\nu\lambda} g^{\lambda\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} \qquad (۴-۱-۳)$$

سطح دو بعدی کره یک فضای خمیده است، در حالی که سطح استوانه دو بعدی با متریک:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \qquad (۵-۱-۳)$$

یک فضای تخت است. در حالت کلی برای مشخص کردن انحنای فضا – زمان از روی متریک، ابتدا نماد کریستوفل[۱۷] را به صورت زیر تعریف می کنیم!

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} (\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} g_{\lambda\nu} - \partial_{\nu} g_{\lambda\mu}) \qquad (۶-۱-۳)$$

این رابطه به خودی خود هیچ معنی ذاتی برای توصیف انحنا ندارد، چرا که صفر بودن یا نبودن این نماد به انتخاب دستگاه مختصات بستگی دارد. با کمک گرفتن از هندسه دیفرانسیل کلاسیک می توان گفت! آنچه انحنای ذاتی یک فضا – زمان را معرفی می کند تانسور انحنای ریمان است که به صورت زیر تعریف می شود!

$$R_{\lambda\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\lambda}^{n} \Gamma_{\nu n}^{\alpha} - \Gamma_{\nu n}^{n} \Gamma_{\nu\alpha}^{\alpha} \qquad (۷-۱-۳)$$

در هندسه دیفرانسیل انحنا صفر است اگر و تنها اگر فضا تخت باشد. تانسور ریچی و اسکالر ریچی به ترتیب به صورت زیر بدست می آید:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} \qquad (۸-۱-۳)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{\mu}^{\mu} \qquad (۹-۱-۳)$$

۳-۲ متریک شواتز شیلد

فضای اطراف یک سیاهچاله ی بدون بار را می توان برحسب متریک شواتز شیلد به صورت زیر بیان کرد:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad (۱-۲-۳)$$

که در اینجا $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ می باشد. متریک شواتز شیلد در واقع توصیف میدان گرانشی اطراف یک سیاهچاله است. ظاهراً این متریک در $r = \frac{2GM}{c^2}$ (شعاع شواتزشیلد) دارای یک تکنیگی است. شعاع شواتز شیلد برای زمین حدوداً ۰/۱ سانتی متر و برای ستاره ای به اندازه خورشید حدود ۳ کیلومتر است. به این نکته باید توجه کرد که با انتخاب مختصات مناسب تکنیگی در $r = \frac{2GM}{c^2}$ قابل رفع است. سطحی در سیاهچاله به نام افق رویداد [۱۸] وجود

---

۱ Christofell

۲ Event horizon

دارد که از بیرون نمی توان داخل آن را دید و صرفاً ناحیه خارج از سطح سیاهچاله که $r > \frac{2GM}{c^2}$ است را می توان دید. متریک شواتز شیلد را برای r های بزرگ می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$ds^2 \cong -(1-\frac{2M}{r})dt^2 + (1+\frac{2M}{r})dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad (۲-۲-۳)$$

در اینجا متوجه شدیم که متریک شواتز شیلد تنها به جرم بستگی دارد. از نظر نجومی یک سیاهچاله از فروپاشی ستاره ای بدون بار و غیرچرخشی با تقارن کروی پدید می آید. انواع سیاهچاله ها را می توان با جرم، تکانه زاویه ای و بار الکتریکی بیان کرد.

۳-۳- متریک ریسنر – نوردستروم [۱۹]

متریک ریسنر – نوردستروم مربوط به سیاهچاله های باردار است و به صورت زیر بیان می شود: (از این پس در کل این پایان نامه $G = c = \hbar = 1$ قرار می دهیم.)

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{\frac{-1}{2}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad (۱-۳-۳)$$

که در آن داریم:

$$N^2 = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \qquad (۲-۳-۳)$$

Q و M مجموع جرم و بار هستند که به وسیله ناظر لخت اندازه گیری می شود. افق رویداد با حل معادله ی زیر به دست می آید:

$$N^2 - (1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}) = 0 \qquad (۳-۳-۳)$$

از معادله بالا دو ریشه r_- و r_+ بدست می آید به طوری که داریم:

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \qquad (۴-۳-۳)$$

برای سیاهچاله های فرینال (اکسترمال[20]) $r_+ = r_-$ است. برای حقیقی بودن $r_\pm$ همواره $M^2 \geq Q^2$ را در نظر می گیریم.

۳-٤ متریک کر [۲۱]

---

۳ Reissner – Nordstrom metric

۴ Extermal

حل کر توصیفی از یک سیاهچاله ی چرخشی با جرم M و تکانه زاویه ای J است و متریک آن به شکل زیر به دست می آید:

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2} dt^2 - 2a\frac{2Mr\sin^2\theta}{\rho^2} dt d\varphi \qquad (۱-۴-۳)$$

$$+\frac{(r^2+a^2) - a^2\Delta\sin^2\theta}{\rho^2}\sin^2\theta d\varphi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr + \rho^2 d\theta^2$$

که در آن داریم:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad , \qquad a = \frac{J}{M} \qquad (۲-۴-۳)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \qquad (۳-۴-۳)$$

مقدار a در حل کر داری اهمیت است به طوری که:

$\frac{J}{M} = 0$ ⇔ تکانه زاویه ای صفر است، بنابراین حل به همان حل شواتز شیلد تبدیل می شود.

$\frac{J}{M} = 1$ ⇔ این حد به عنوان حل فرینال (اکسترمال) شناخته می شود.

حل کر، ایستاست و محور تقارن دارد و دارای ۲ رویه است، یک رویه بالا و یک رویه پایین، که ناحیه ی بین دو رویه افق رویداد و حد استاتیک به محدوده ی ارگوسفر معروف است حد ایستایی موضعی در پیرامون سیاهچاله است که در آن ذره نمی تواند در حال سکون باشد.

۳-۵- متریک کر - نیومن[۲۲]

حل سیاهچاله ی کر به همراه بار الکتریکی به نام سیاهچاله ی کر- نیومن شناخته می شود. شکل متریک کر- نیومن شبیه متریک کر می باشد، اما:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \qquad (۱-۵-۳)$$

افق رویداد سیاهچاله کر- نیومن با رابطه ی زیر مشخص می گردد:

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \qquad (۲-۵-۳)$$

حد فرینال (اکسترمال) سیاهچاله در $a^2 = M^2 + Q^2$ به دست می آید.

---

[۵] Kerr – metric
[۶] Kerr – Newman metric

۳-٦- ترمودینامیک سیاهچاله

در راستای تحقیقات در زمینه ترمودینامیک سیاهچاله ها، هاوکینگ[۲۳] [9] در سال ۱۹۷۱ به این نتیجه رسید که مساحت سیاهچاله ها هیچ گاه کاهش نمی یابد، و وقتی که دو سیاهچاله به یکدیگر می پیوندند، مساحت سیاهچاله نهایی نمی تواند کمتر از مجموع مساحت اولیه دو سیاهچاله ی اولیه باشد. از طرف دیگر هنگامی که ذره ای توسط سیاهچاله جذب می شود، دیگر هیچ اطلاعی از آن در دست نیست. در واقع پس از اینکه سیاهچاله ذره ای را جذب کرد، مجدداً به حالت تعادل وارد می شود. از آن پس تمام جزئیات و اطلاعات مربوط به ذره جذب شده از دست می رود و از نظر مشاهده گر خارجی، قسمتی از آنتروپی کل عالم ناپدید شده است. طبق قانون دوم ترمودینامیک، آنتروپی در یک سیستم ترمودینامیکی بسته همواره افزایش می یابد. یک جهان، یک سیستم بسته است که هیچ چیزی نمی تواند از آن خارج شود. قانون اول ترمودینامیک عبارت است از:

$$dE = TdS - PdV \qquad (۳-۶-۱)$$

که در آن T دما، S آنتروپی، P فشار و V حجم و جمله PdV بیانگر کار انجام شده روی سیستم است. از طرف دیگر به طور طبیعی جمله $\Omega_H dJ$ را می توان به صورت کار انجام شده روی سیاهچاله به وسیله پرتاب جسم به داخل آن در نظر گرفت. کمیت های ترمودینامیکی انرژی، آنتروپی و دما به ترتیب متناظر با جرم، مساحت و گرانش سطحی سیاهچاله هستند. این تناظر در جدول (۳-۱) نشان داده شده است.

(۳-۱): تشابه بین پارامترهای ترمودینامیکی و پارامترهای سیاهچاله

مکانیک سیاهچاله	ترمودینامیک سیستم
κ: گرانش سطح[۲۴]	T : دما
M : جرم سیاهچاله	E : انرژی
A : مساحت افق رویداد	S : آنتروپی

در چارچوب نسبیت عام کلاسیک این همسانی بین قوانین ترمودینامیک و قوانین مکانیک سیاهچاله ها کامل به نظر می رسد. در بدست آوردن رابطه ی همسانی بین این کمیت ها بایستی توجه داشت که از برابر قراردادن TdS با $\frac{\kappa dA}{8\pi G}$ نمی توان به طور جداگانه مشخص کرد که هر کدام از ضرایب رابطه ی S، A، T، κ !!!!!! ! !!

۷ Hawking

۲۴ Surface gravity

۳-۷ – قوانین ترمودینامیک سیاهچاله ها

در سال ۱۹۷۵ کشف شد که کلید حل تمامی این مشکلات، در مکانیک کوانتومی نهفته است. با در نظرگرفتن فرآیندهای کوانتومی یک سیاهچاله دمای هاوکینگی متناسب با ثابت پلانک دارد، آنتروپی به صورت یک چهارم سطح سیاهچاله تقسیم بر مربع طول پلانک $(l_p^2 = \frac{\hbar G}{c^3})$ است و سطح سیاهچاله از طریق تابش هاوکینگ می تواند کاهش یابد.

۳-۸- قانون صفرم

گرانش سطحی بر روی سطح افق رویداد کمیتی ثابت است. این ثابت بودن همسان با قانون صفرم ترمودینامیک است که بیان می کند دمای یک سیستم در حال تعادل ترمودینامیکی در همه جای آن یکسان است. سطح گرانشی در تمام افق رویداد ثابت است. سطح گرانش وابسته به دمای سیاهچاله (دمای هاکینگ) است.

$$T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B} \qquad (۳-۸-۱)$$

در مورد خاص سیاهچاله شواتز شیلد که در آن $\kappa = \frac{1}{4GM}$ است دما از عبارت زیر بدست می آید:

$$T_H = \frac{\hbar}{8\pi G k_B M} \approx 6.2\times10^{-8}\frac{M_\oplus}{M}K \qquad (۳-۸-۲)$$

نکته قابل توجه در معادله (۳-۸-۲) آن است که این دما بری سیاهچاله با جرم از مرتبه خورشید کاملا قابل صرف نظر است. در سیاهچاله چرخان (سیاهچاله کر) دمای هاوکینگ به سبب چرخش کاهش می یابد و به طور واضح مشخص است:

$$T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B} = 2(1+\frac{M}{\sqrt{M^2-a^2}})^{-1}\frac{\hbar}{8\pi M k_B} \le \frac{\hbar}{8\pi M k_B} \qquad (۳-۸-۳)$$

که در آن $a = \frac{J}{M}$ است. برای سیاهچاله ی غیرچرخشی (سیاهچاله ریسنر – نوردستروم) دما به صورت زیر محاسبه می شود:

$$T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B} = (1-\frac{Q^4}{r_+^4})^{-1}\frac{\hbar}{8\pi M k_B} \le \frac{\hbar}{8\pi M k_B} \qquad (۳-۸-۴)$$